研究速報
UDC 624.074.7

シェル構造の離散化極限解析（その5）
——曲面剛体要素モデルの球殻への応用——

Discrete Limit Analysis of Shell Structures (Part 5)
——Curved rigid element models applied to spherical shells——

大友俊夫*・都井　裕**・川井忠彦**・岡崎敦子*
Toshio OHTOMO, Yutaka TOI, Tadahiko KAWAI and Atsuko OKAZAKI

1. 序

薄肉シェル構造の離散化極限解析用曲面剛体要素モデルの球殻への応用について述べる．曲面剛体要素モデルは，すでに都井により任意の直交曲線座標系に対する一般的定式化が行われており，[1] 本報告ではこの一般論に基づき球座標系に対する諸関係式を誘導し，二，三の解析例を示す．

2. 球殻に対する曲面剛体要素モデル

2.1 要素境界の剛性特性

（i） 球殻の剛体変位場

直角座標系（x, y, z）と，

$$\left.\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\varphi \\ y &= R\sin\theta\sin\varphi \\ z &= R\cos\theta,\ R=\text{const} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

なる関係にある球座標系（Fig. 1）において，文献1）の剛体変位関数（9）式；

$$u'(x', y') = h_{1j}(x', y', c)\quad a_j$$
$$v'(x', y') = h_{2j}(x', y', c)\quad a_j$$
$$w'(x', y') = h_{3j}(x', y', c)\quad a_j$$

における h_{ij} 成分は Table 1 のように与えられる．ここに，a_1, a_2, a_3 は x, y, z 軸まわりの回転変位，a_4, a_5, a_6 は x, y, z 軸方向の並進変位である．

（ii） 相対変位

Fig. 2(a) に示す2要素A，B間の相対変位は，文献1）の（10）式から面外せん断変形による項を除き，マトリックス表示で次のように表される．

$$\{d\} = [B]\{a\} = [-B_2 \ \vdots\ B_2]\left\{\frac{a^A}{a^B}\right\} \qquad (2)$$

ここに，

$$\{d\}^t = \lfloor \phi_s, \phi_n, \delta_s, \delta_t \rfloor$$
$$\{a\}^t = \lfloor a_1^A a_2^A \cdots\cdots a_6^A a_1^B a_2^B \cdots\cdots a_6^B \rfloor$$

$[B_2]$ マトリックスの具体形を Table 2 に示す．なお，（2）式の誘導の際，要素分割線は次式を仮定している．

$$\left.\begin{aligned} \theta(\xi) &= (1-\xi)\theta_1 + \theta_3 \\ \varphi(\xi) &= (1-\xi)\varphi_1 + \varphi_3 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

（iii） 変位自由度

変位自由度は節点（三角形頂点）に法線方向たわみ（w_i'），要素重心点に面内変位（u_i', v_i', θ_i'）を設定する．Fig. 2(a) の要素A，Bの変位自由度と未知係数 a_j^A, a_j^B の関係は Table 1 より導かれ，これを $\{a\}$ について解くことにより次式が求められる．

$$\{a\} = \left\{\frac{a^A}{a^B}\right\} = [A]\{u'\} = \left[\frac{A_1}{A_2}\right]\{u'\} \qquad (4)$$

ここに，

$$\{u'\}^T = [w_1'\ w_2'\ w_3'\ w_4'\ u_5'\ v_5'\ \theta_5'\ u_6'\ v_6'\ \theta_6']$$

$[A_1]$ マトリックスの具体形を Table 3 に示す．

（iv） 断面力

断面力としては相対変位成分 $\phi_s, \phi_n, \delta_s, \delta_t$ に対応する，曲げモーメント M_s，面内モーメント M_n，面内せん断力 N_s，面内垂直力 N_t を考慮し，マトリックス形で次

Table 1　h_{ij} components

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
u'	$-R\sin\varphi$	$R\cos\varphi$	0	$\cos\theta\ \cos\varphi$	$\cos\theta\ \sin\varphi$	$-\sin\theta$
v'	$-R\cos\theta\cos\varphi$	$-R\cos\theta\ \sin\varphi$	$R\sin\theta$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
w'	0	0	0	$\sin\theta\ \cos\varphi$	$\sin\theta\ \sin\varphi$	$\cos\theta$

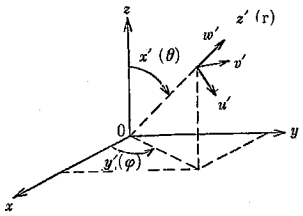
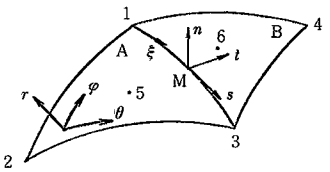
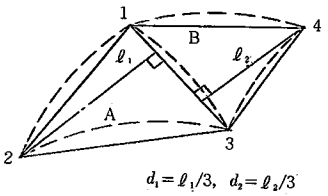


Fig. 1　Coordinate systems and displacement notations

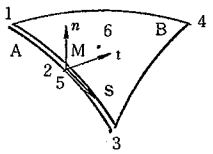
* 大林組電子計算センター
** 東京大学生産技術研究所　第2部



(a) two adjacent rigid elements



(b) definition of l_1, l_2



(c) boundary element

Fig. 2 Curved rigid elements for spherical shells

のように与えられる．

$$\{s\}=[D]\{d\} \tag{5}$$

ここに，$\{s\}^t=\lfloor M_s\ M_n\ N_s\ N_t\rfloor$

$[D]=\lceil k_{rs}\ k_{rn}\ k_{ps}\ k_{pt}\rfloor$

弾性変形時におけるばね定数は次式により与えられる．

$$\left.\begin{aligned} k_{rs}&=2Dl_{13}/(l_1+l_2)\\ k_{rn}&=k_p l_{13}t/12\\ k_{ps}&=El_{13}t/(1+\nu)(d_1+d_2)\\ k_{pt}&=El_{13}t/(1-\nu^2)(d_1+d_2)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ここに，l_1, l_2, d_1, d_2 は Fig. 2(b) に示されており，l_{13} は境界辺 13 の長さである．

(v) 剛性マトリックス

以上に誘導した諸マトリックスを用いて，Castigliano の定理より剛性マトリックス $[k]$ は次式で与えられる．

$$[k]=[A]^T[B]^T[D][B][A] \tag{7}$$

(vi) 降伏関数

塑性状態における $[D]$ マトリックスは M_n の項を除いた降伏関数

$$f=(\bar{M}_s/M_{s0})^2+(\bar{N}_s/N_{s0})^2+(\bar{N}_t/N_{t0})^2-1=0 \tag{8}$$

Table 2 $[B_2]$ matrix in eq. (2)

	a_1^A	a_2^A	a_3^A	a_4^A	a_5^A	a_6^A
ϕ_s	Δ_{11}	Δ_{12}	$-\Delta_{13}$	0	0	0
ϕ_n	T_{12}	T_{11}	$\cos\theta_M$	0	0	0
δ_s	$R\Delta_{14}$	$R\Delta_{15}$	$R\Delta_{16}$	$-\Delta_{11}$	Δ_{12}	$-\Delta_{13}$
δ_t	$R\Delta_{11}$	$-R\Delta_{12}$	$R\Delta_{13}$	Δ_{14}	Δ_{15}	Δ_{16}

where

$$T_{11}=\sin\theta_M\sin\varphi_M \qquad T_{12}=\sin\theta_M\cos\varphi_M$$

$$T_{21}=\cos\theta_M\sin\varphi_M \qquad T_{22}=\cos\theta_M\cos\varphi_M$$

$$\Delta=\sqrt{\{(\theta_3-\theta_1)^2+(\varphi_3-\varphi_1)^2\sin\theta_M\}}$$

$$\Delta_{11}=\frac{1}{\Delta}\{(\theta_3-\theta_1)\cdot T_{22}-(\varphi_3-\varphi_1)\cdot T_{11}\}$$

$$\Delta_{12}=\frac{1}{\Delta}\{(\theta_3-\theta_1)\cdot T_{21}+(\varphi_3-\varphi_1)\cdot T_{21}\}$$

$$\Delta_{13}=\frac{1}{\Delta}(\theta_3-\theta_1)\sin\theta_M$$

$$\Delta_{14}=\frac{-1}{\Delta}\{(\theta_3-\theta_1)\sin\varphi_M+(\varphi_3-\varphi_1)T_{12}\cos\theta_M\}$$

$$\Delta_{15}=\frac{1}{\Delta}\{(\theta_3-\theta_1)\cos\varphi_M-(\varphi_3-\varphi_1)T_{21}\sin\theta_M\}$$

$$\Delta_{16}=\frac{1}{\Delta}(\varphi_3-\varphi_1)\sin^2\theta_M$$

Table 3 $[A_1]$ matrix in eq. (4)

	w_1'	w_2'	w_3'	w_4'	u_5'	v_5'	θ_5'	u_6'	v_6'	θ_6'
a_1^A										
a_2^A	$-[H_{21}]^{-1}[H_{22}][H_{12}]^{-1}$			0	$[H_{21}]^{-1}$			0		
a_3^A										
a_4^A										
a_5^A	$[H_{12}]^{-1}$			0	0			0		
a_6^A										

where

$$[H_{12}]^{-1}=\frac{1}{\Delta_1}\begin{bmatrix} S_{22}C_3-C_2S_{33} & -S_{11}C_3+C_1S_{33} & S_{11}C_2-C_1S_{22}\\ -C_{22}C_3+C_2C_{33} & C_{11}C_3-C_1C_{33} & -C_{11}C_2+C_1S_{22}\\ C_{22}C_{33}-S_{22}C_{33} & -C_{11}S_{33}+S_{11}C_{33} & C_{11}S_{22}-S_{11}C_{22}\end{bmatrix}$$

$$C_i=\cos\theta_i \qquad C_{ii}=\sin\theta_i\cos\varphi_i \qquad S_{ii}=\sin\theta_i\sin\varphi_i \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} C_{11} & S_{11} & C_1\\ C_{22} & S_{22} & C_2\\ C_{33} & S_{33} & C_3\end{vmatrix}$$

$$[H_{21}]^{-1}=\frac{1}{R}\begin{bmatrix} -e & -C_5f & Rf\,S_5\\ f & -C_5e & Re\,S_5\\ 0 & S_5 & RC_5\end{bmatrix} \qquad [H_{22}]=\begin{bmatrix} C_5f & C_5e & -S_5\\ -e & f & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$e=\sin\varphi_5 \qquad f=\cos\varphi_5 \qquad S_i=\sin\theta_i$$

を塑性ポテンシャルとして塑性流れ則により定める．ここに，全塑性断面力 M_{s0}, N_{s0}, N_{t0} は Table 4 のように仮定しており，また $\bar{M}_s=M_s/l_{13}$, $\bar{N}_s=N_s/l_{13}$, $\bar{N}_t=N_t/l_{13}$ である．

2.2 境界要素

境界要素は A を境界要素とした場合，点 2 における法線方向たわみ w_2' のかわりに s 軸まわりの回転変位 θ_2' を採用し，Table 3 の 2 行目を次式と置きかえ，前節と同

様にして剛性マトリックスを導くことができる．

$$\theta_2' = l_s a_1^A + m_s a_2^A + n_s a_3^A \qquad (9)$$

ここに

$l_s = \{(\theta_3-\theta_1)\cos\theta_M \cos\varphi_M - (\varphi_3-\varphi_1)\sin\theta_M \sin\varphi_M\}/\Delta$

$m_s = \{(\theta_3-\theta_1)\cos\theta_M \cos\varphi_M + (\varphi_3-\varphi_1)\sin\theta_M \sin\varphi_M\}/\Delta$

$n_s = -(\theta_3-\theta_1)\sin\theta_M/\Delta$

Δ は Table 2 に同じ

3. 解 析 例

以下の塑性解析例において比較の対象とした諸プログラムを Table 5 に示す．なお，3.1，3.2 の解析例では降伏条件として Table 4 の Mises-II を用いた．

3.1 頂部集中荷重を受ける周辺固定部分球殻

解析結果を Fig. 3 に示す．NONSAP および円錐台要素モデルによる結果と良好に一致している．

3.2 等分布外圧を受ける周辺固定部分球殻

解析結果を Fig. 4 に示す．円錐台要素モデルによる解析結果および理論解と良好な一致が見られる．

3.3 非軸対称線荷重を受ける周辺固定部分球殻

解析結果を Fig. 5 に示す．塑性域の進展は ADINA による有限要素解と良好な対応が見られるが，最高荷重値には相当の隔たりがある．本法において Mises-I の降伏条件を用いた塑性解析は最高荷重値の上界を与えると考えられるので本解析による解がより真の解に近いと判断されるが，有限要素解析においてもステップ数あるいは剛性修正の回数を増す，数値積分点を多くとるなどの方法によりさらに解を改善する余地は残されている．

なお，IBM-370/M158 による 1 ステップ当たりの計算時間は，本法で約 6 秒，ADINA で約 80 秒である．これは，主に総自由度数（本法 265，ADINA 765）の相違によるものと思われる．

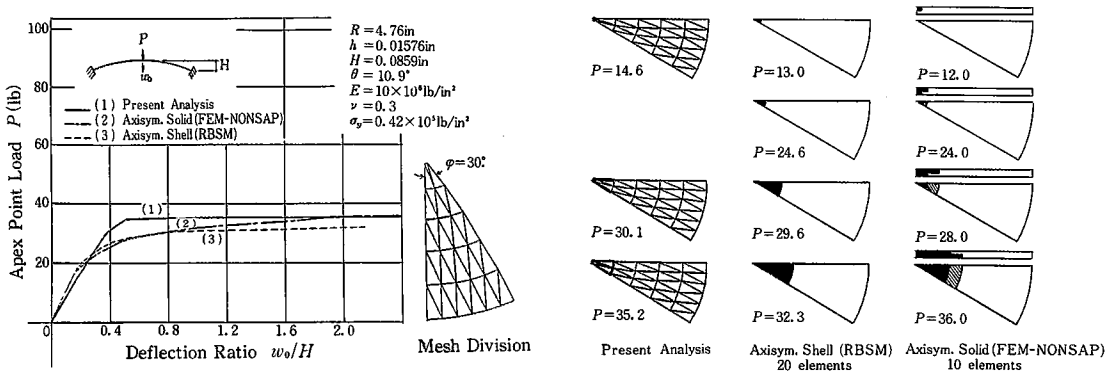
Table 4 Full plastic resultant forces

	M_{s0}	N_{s0}	N_{t0}
MISES-I	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\sigma_0 t^2$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_0 t$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 t$
MISES-II	$\frac{1}{4}\sigma_0 t^2$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_0 t$	$\sigma_0 t$

（σ_0：uniaxial yield stress）

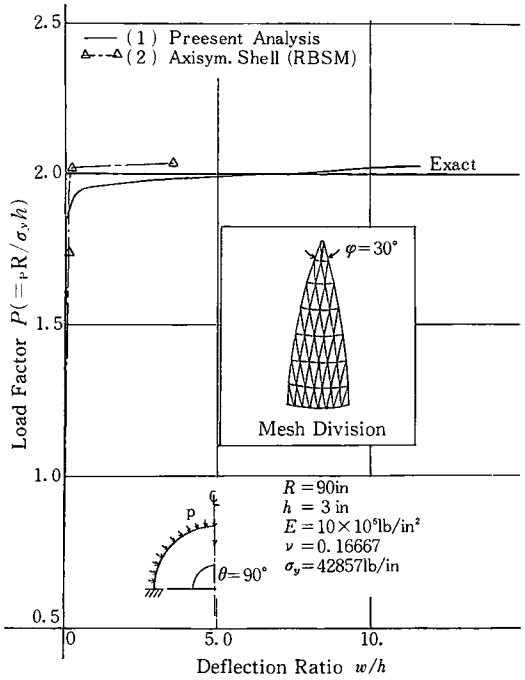
Table 5 Computer programs used in the present report

解析プログラム	要 素	降伏条件および判定位置	荷 重 増 分 法
軸対称シェル[2] (*RBSM*)	円錐台要素	$f = (N_\theta^2 - N_\theta N_\varphi + N_\varphi^2)/N_0^2 + (M_\theta^2 - M_\theta M_\varphi + M_\varphi^2)/M_0^2 - 1$ $N_0 = \sigma_0 t \quad M_0 = \sigma_0 t^2/4$	接線剛性法、不釣合力無視
NONSOP[3]	軸対称ソリッド要素 (8節点アイソパラメトリック)	*von Mises* 積分点 2×2	接線剛性法、不釣合力考慮
ADINA[4]	三次元シェル要素 (8節点アイソパラメトリック)	*von Mises* 積分点 2×2×2	5ステップごとに接線剛性を求め、その間定剛性、不釣合力考慮
本 法	球殻要素 (面内回転拘束)	*Table* 4	山田の方法

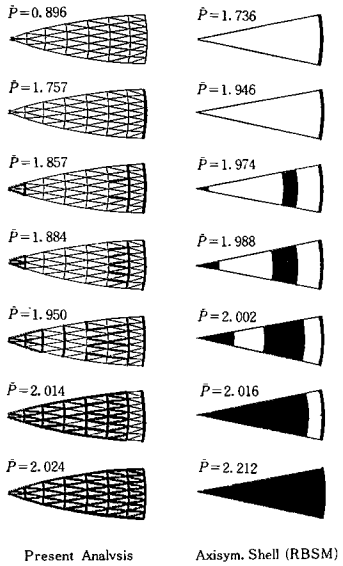


（a） load-deflection curves （b） development of yield lines

Fig. 3 Plastic analysis of spherical caps under con- centrated loading

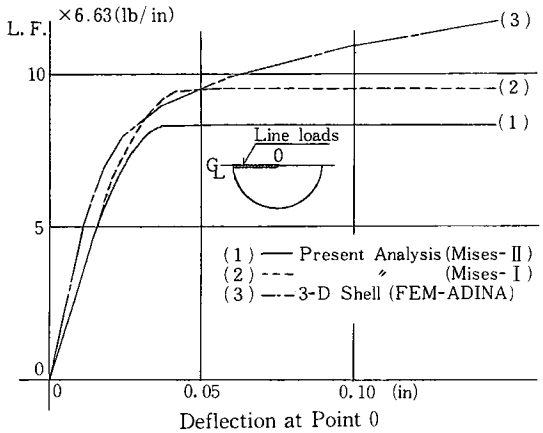


(a) load-deflection curves

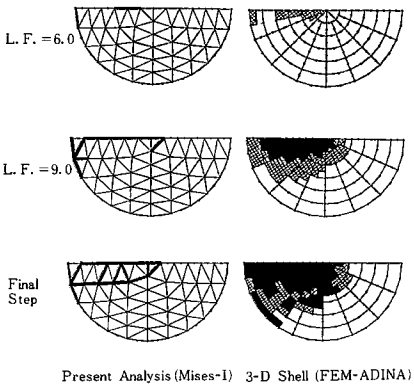


(b) development of yield lines

Fig. 4 Plastic analysis of spherical caps under external pressure



(a) load-deflection curves



(b) development of yield lines

Fig. 5 Plastic analysis of spherical caps under nonaxisymmetric line loading

4. 結 語

曲面剛体要素モデルの一般論を球殻に適用し，最終強度解析モデルとして計算時間および精度の面で有効であることを確認した。

(1982年4月8日受理)

参 考 文 献

1) 都井：シェル構造の離散化極限解析（その1）一曲面剛体要素モデルの誘導一，生産研究，第33巻5号（1981）
2) 都井他：回転対称シェルの非線形挙動の一離散化解析，日本鋼構造協会第15回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集（1981）
3) K.J. Bathe: NONSAP (a structural analysis program for static and dynamic response of nonlinear systems).UCB, UCSESM 74-3 (1974)
4) K.J. Bathe: ADINA (a finite element program for automatic dynamie incremental nonlinear analysis), MIT report 82448-1 (1978)