

# シェル構造の離散化極限解析 (その4)

## —厚肉シェルの有限変形解析—

Discrete Limit Analysis of Shell Structures (Part 4)

—Finite Deformation Analysis of Thick-Walled Shells—

都 井 裕\*・川 井 忠 彦\*

Yutaka TOI and Tadahiko KAWAI

### 1. 序

前報<sup>1)</sup>では、平板剛体要素モデルを薄肉シェル構造の有限変形問題に応用する場合の手順を論じたが、本報ではこれを厚肉シェルの有限変形解析に拡張する。すなわち、前報における「薄肉」の仮定を除いた一般的な3次元剛体変位関数に基づき、面外せん断変形とねじり変形を考慮した汎用的な定式化を行う。

### 2. 有限変形問題における一般的な剛体変位関数

厚肉シェルの有限変形問題を剛体要素モデルにより定式化するための準備として、3次元有限変形問題における剛体変位関数の一般形を誘導する必要がある。ここでは、Eulerの角により表現された厳密な3次元剛体変位関数から出発して、数学的なオーダ評価により、厚肉シェルを含む各種構造物に対する剛体変位関数を逐次導くことにする。

#### 2.1 3次元問題における厳密な剛体変位関数

Fig.1のように定義されるEulerの角 $\theta, \phi, \varphi$ を用いると、厳密な3次元剛体変位関数は次式により表される。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 + l_\xi \cdot x + l_\eta \cdot y + l_\zeta \cdot z - x \\ v(x, y, z) &= v_0 + m_\xi \cdot x + m_\eta \cdot y + m_\zeta \cdot z - y \end{aligned} \quad (1)$$

$$w(x, y, z) = w_0 + n_\xi \cdot x + n_\eta \cdot y + n_\zeta \cdot z - z$$

ここに

$$\begin{aligned} l_\xi &= \cos\theta \cos\phi \cos\varphi - \sin\phi \sin\varphi \\ l_\eta &= -\cos\theta \cos\phi \sin\varphi + \sin\phi \cos\varphi \\ l_\zeta &= \sin\theta \cos\phi \\ m_\xi &= \cos\theta \sin\phi \cos\varphi + \cos\phi \sin\varphi \\ m_\eta &= -\cos\theta \sin\phi \sin\varphi + \cos\phi \cos\varphi \\ m_\zeta &= \sin\theta \sin\phi \\ n_\xi &= -\sin\theta \cos\varphi \\ n_\eta &= \sin\theta \sin\varphi \\ n_\zeta &= \cos\theta \end{aligned} \quad (2)$$

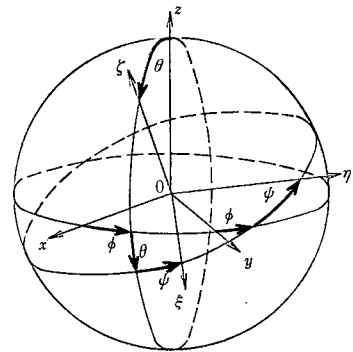


Fig. 1 Definition of Eulerian angles

(2)式に具体形を示した $l_\xi, l_\eta, \dots$ などは、運動前の物体固定座標軸 $(x, y, z)$ と運動後の物体固定座標軸 $(\xi, \eta, \zeta)$ のなす方向余弦であり、<sup>1)</sup> $u_0, v_0, w_0$ は原点の並進変位成分である。

Fig.1のようなEulerの角 $\theta, \phi, \varphi$ を用いた場合、運動前後における非回転の条件は

$$\theta = 0, \phi + \varphi = 0 \quad (3)$$

と表される。したがって、 $\phi, \varphi$ の代わりに次の回転自由度を設定する。

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi + \varphi \\ \phi_2 &= \phi - \varphi \end{aligned} \quad (4)$$

(2)式の方角余弦を $\theta, \phi_1, \phi_2$ を用いて表現すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} l_\xi &= \cos\theta(\cos\phi_1 + \cos\phi_2)/2 - (\cos\phi_2 - \cos\phi_1)/2 \\ l_\eta &= -\cos\theta(\sin\phi_1 - \sin\phi_2)/2 + (\sin\phi_1 + \sin\phi_2)/2 \\ l_\zeta &= \sin\theta \cos\{(\phi_1 + \phi_2)/2\} \\ m_\xi &= \cos\theta(\sin\phi_1 + \sin\phi_2)/2 + (\sin\phi_1 - \sin\phi_2)/2 \\ m_\eta &= -\cos\theta(\cos\phi_2 - \cos\phi_1)/2 \\ &\quad + (\cos\phi_1 + \cos\phi_2)/2 \\ m_\zeta &= \sin\theta \sin\{(\phi_1 + \phi_2)/2\} \\ n_\xi &= -\sin\theta \cos\{(\phi_1 - \phi_2)/2\} \\ n_\eta &= \sin\theta \cos\{(\phi_1 - \phi_2)/2\} \end{aligned} \quad (5)$$

\* 東京大学生産技術研究所 第2部

研 究 速 報

$$n_z = \cos \theta$$

2.2 3次元問題における近似剛体変位関数

(5)式の各方向余弦を(3)式, すなわち

$$\theta = 0, \phi_1 = 0 \tag{6}$$

を中心に Taylor 展開し, 2次項まで考慮すると次式を得る.

$$\begin{aligned} l_\xi &= 1 - \phi_1^2/2 - \theta^2(1 + \cos \phi_2)/4 \\ l_\eta &= -\phi_1 - (\theta^2 \sin \phi_2)/4 \\ l_\zeta &= \theta \cos(\phi_2/2) - \{\theta \phi_1 \sin(\phi_2/2)\}/2 \\ m_\xi &= \phi_1 - (\theta^2 \sin \phi_2)/4 \\ m_\eta &= 1 - \phi_1^2/2 - \theta^2(1 - \cos \phi_2)/4 \\ m_\zeta &= \theta \sin(\phi_2/2) + \{\theta \phi_1 \cos(\phi_2/2)\}/2 \\ n_\xi &= -\theta \cos(\phi_2/2) - \{\theta \phi_1 \sin(\phi_2/2)\}/2 \\ n_\eta &= -\theta \sin(\phi_2/2) + \{\theta \phi_1 \cos(\phi_2/2)\}/2 \\ n_\zeta &= 1 - \theta^2/2 \end{aligned} \tag{7}$$

(7)式において, さらに

$$\begin{aligned} a_1 &= -\theta \sin(\phi_2/2) \\ a_2 &= \theta \cos(\phi_2/2) \\ a_3 &= \phi_1 \end{aligned} \tag{8}$$

と変数変換すると次式を得る.

$$\begin{aligned} l_\xi &= 1 - \{(a_2)^2 + (a_3)^2\}/2 \\ l_\eta &= -a_3 + (a_1 a_2)/2 \\ l_\zeta &= a_2 + (a_1 a_3)/2 \\ m_\xi &= a_3 + (a_2 a_1)/2 \\ m_\eta &= 1 - \{(a_3)^2 + (a_1)^2\}/2 \\ m_\zeta &= -a_1 + (a_2 a_3)/2 \\ n_\xi &= -a_2 + (a_3 a_1)/2 \\ n_\eta &= a_1 + (a_3 a_2)/2 \\ n_\zeta &= 1 - \{(a_1)^2 + (a_2)^2\}/2 \end{aligned} \tag{9}$$

(9)式を(1)式に代入し

$$a_4 = u_0, a_5 = v_0, a_6 = w_0 \tag{10}$$

と置けば, 最終的に次式を得る.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= a_4 - a_3 y + a_2 z \\ &\quad - \{(a_2)^2 + (a_3)^2\}x/2 + a_1 a_2 y/2 + a_1 a_3 z/2 \\ v(x, y, z) &= a_5 - a_1 z + a_3 x \\ &\quad - \{(a_3)^2 + (a_1)^2\}y/2 + a_2 a_3 z/2 + a_2 a_1 x/2 \\ w(x, y, z) &= a_6 - a_2 x + a_1 y \\ &\quad - \{(a_1)^2 + (a_2)^2\}z/2 + a_3 a_1 x/2 + a_3 a_2 y/2 \end{aligned} \tag{11}$$

(11)式は,  $a_i$  に関して2次項まで考慮した近似的な3次元剛体変位関数であり,  $a_1, a_2, a_3$  は  $x, y, z$  軸まわりの回転変位,  $a_4, a_5, a_6$  は  $x, y, z$  軸方向の並進変位を意味する. 回転角  $a_1, a_2, a_3$  は, Euler の角と異なり回転順序に依存せず, また「等方的」であることは, (9)式の形からも明らかであろう. (11)式の剛体変位関数を変位に関する2次項までを考慮した3次元のひずみ-変位関係式に代入し, 3次以上の高次項を無視すると, す

べての有限ひずみ成分が零となることは容易に確認できる. 本報における厚肉シェルの有限変形問題の定式化は, (11)式を基礎として行う.

2.3 各種の近似剛体変位関数

解析対象とする構造物の幾何学的形状を考慮し, (11)式にさらに近似を加えることにより, 各種の剛体変位関数を得ることができる. 代表的な剛体変位関数を以下に示す.

(i) 2次元問題

(11)式において

$$z = 0, a_1 = a_2 = 0 \tag{12}$$

とすれば

$$u(x, y) = a_4 - a_3 y - (a_3)^2 x/2 \tag{13}$$

$$v(x, y) = a_5 - a_3 x - (a_3)^2 y/2$$

を得る.

(ii) 骨組構造

$z$  軸を梁柱部材の軸方向に設けると

$$|x|, |y| \ll |z| \tag{14}$$

と仮定できる. (11)式から  $x, y$  を含む非線形項を無視すると, 次式を得る.

$$\begin{aligned} u(y, z) &= a_4 - a_3 y + a_2 z + a_1 a_3 z/2 \\ v(x, z) &= a_5 - a_1 z + a_3 x + a_2 a_3 z/2 \end{aligned} \tag{15}$$

$$w(x, y, z) = a_6 - a_2 x + a_1 y - \{(a_1)^2 + (a_2)^2\}z/2$$

(iii) 板殻構造

$z$  軸を肉厚中央面の法線方向に設けると

$$|z| \ll |x|, |y| \tag{16}$$

と仮定できる. (11)式から  $z$  を含む非線形項を省略すると次式を得る.

$$u(x, y, z) = a_4 - a_3 y + a_2 z - \{(a_2)^2 + (a_3)^2\}x/2 + a_1 a_2 y/2$$

$$v(x, y, z) = a_5 - a_1 z + a_3 x - \{(a_3)^2 + (a_1)^2\}y/2 - a_2 a_1 x/2 \tag{17}$$

$$w(x, y, z) = a_6 - a_2 x + a_1 y - a_3 a_1 x/2 + a_3 a_2 y/2$$

(17)式にさらに「薄肉」という条件を課し, 面内回転変形は面外回転変形に比べ小さい, すなわち

$$|a_3| \ll |a_1|, |a_2| \tag{18}$$

と仮定して, (17)式から  $a_3$  を含む非線形項を除くと, 前報<sup>8)</sup>において Kármán の仮定を満足する有限ひずみ成分を零と置いた式を積分して得た剛体変位関数と完全に一致する.

3. 厚肉シェルの有限変形解析

(11)式の3次元近似剛体変位関数に基づき, Lagrange 流の増分理論による厚肉シェルの有限変形解析法の概要を述べる. 剛体変位関数としては(17)式を用いれば十分であるが, 数値計算の手間は同程度であり, ここではよ

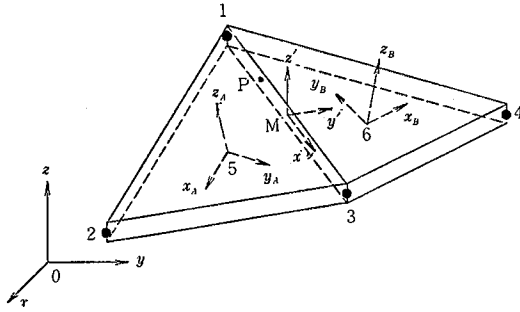


Fig. 2 Flat rigid elements for thick-walled shells

り一般的な定式化を示しておく。

厚肉シェルを三角形平板剛体要素の集合体にモデル化し、前報の定義に従い、各要素座標系  $(x_A, y_A, z_A)$ ,  $(x_B, y_B, z_B)$  および要素境界座標系  $(x', y', z')$  を定める (Fig.2 を参照)。

各要素の剛体変位関数を (11) 式に添字 A, B を付して区別すると、剛体要素間境界断面上の任意点 P における並進相対変位成分は次式により表される。

Table 1 Matrix [B] in eq. (20)

(where  $x_A = (x_A)_P$ ,  $y_A = (y_A)_P$ , etc.)

$$B(1, 1) = m_{z_A}^A - n_{z_A}^A + (m_{z_A}^A + n_{z_A}^A) a_1^A - (l_{z_A}^A y_A + m_{z_A}^A x_A) a_2^A / 2 - (l_{z_A}^A z_A + n_{z_A}^A x_A) a_3^A / 2$$

$$B(1, 2) = n_{z_A}^A - l_{z_A}^A + (n_{z_A}^A + l_{z_A}^A) a_1^A - (m_{z_A}^A + n_{z_A}^A) a_2^A / 2 - (m_{z_A}^A + l_{z_A}^A x_A) a_3^A / 2$$

$$B(1, 3) = l_{z_A}^A - m_{z_A}^A + (l_{z_A}^A + m_{z_A}^A) a_1^A - (n_{z_A}^A + l_{z_A}^A z_A) a_2^A / 2 - (n_{z_A}^A + m_{z_A}^A y_A) a_3^A / 2$$

$$B(1, 4) = -l_{z_A}^A, B(1, 5) = -m_{z_A}^A, B(1, 6) = -n_{z_A}^A$$

$$B(1, 7) = n_{z_B}^B - m_{z_B}^B - (m_{z_B}^B + n_{z_B}^B) a_1^B + (l_{z_B}^B y_B + m_{z_B}^B x_B) a_2^B / 2 + (l_{z_B}^B z_B + n_{z_B}^B x_B) a_3^B / 2$$

$$B(1, 8) = l_{z_B}^B - n_{z_B}^B - (n_{z_B}^B + l_{z_B}^B) a_1^B + (m_{z_B}^B + n_{z_B}^B) a_2^B / 2 + (m_{z_B}^B + l_{z_B}^B x_B) a_3^B / 2$$

$$B(1, 9) = m_{z_B}^B - l_{z_B}^B - (l_{z_B}^B + m_{z_B}^B) a_1^B + (n_{z_B}^B + l_{z_B}^B z_B) a_2^B / 2 + (n_{z_B}^B + m_{z_B}^B y_B) a_3^B / 2$$

$$B(1, 10) = l_{z_B}^B, B(1, 11) = m_{z_B}^B, B(1, 12) = n_{z_B}^B$$

$$B(2, j) : (l_x, m_x, n_x) \rightarrow (l_y, m_y, n_y) \text{ in } B(1, j)$$

$$B(3, j) : (l_x, m_x, n_x) \rightarrow (l_z, m_z, n_z) \text{ in } B(1, j)$$

Table 2 Matrix [ $k_C$ ] in eq. (23)

(a) matrix [ $k_C(\tau_x)$ ]

	$a_1^A$	$a_2^A$	$a_3^A$	$a_1^B$	$a_2^B$	$a_3^B$
$a_1^A$	$\frac{1}{2} (m_{z_A}^A y_A + n_{z_A}^A z_A)$	$-\frac{1}{2} (l_{z_A}^A y_A + m_{z_A}^A x_A)$	$-\frac{1}{2} (n_{z_A}^A x_A + l_{z_A}^A z_A)$	0	0	0
$a_2^A$		$\frac{1}{2} (n_{z_A}^A z_A + l_{z_A}^A x_A)$	$-\frac{1}{2} (m_{z_A}^A z_A + n_{z_A}^A y_A)$	0	0	0
$a_3^A$			$\frac{1}{2} (l_{z_A}^A x_A + m_{z_A}^A y_A)$	0	0	0
$a_1^B$				$-\frac{1}{2} (m_{z_B}^B y_B + n_{z_B}^B z_B)$	$\frac{1}{2} (l_{z_B}^B y_B + m_{z_B}^B x_B)$	$\frac{1}{2} (n_{z_B}^B x_B + l_{z_B}^B z_B)$
$a_2^B$		sym.			$-\frac{1}{2} (n_{z_B}^B z_B + l_{z_B}^B x_B)$	$\frac{1}{2} (m_{z_B}^B z_B + n_{z_B}^B y_B)$
$a_3^B$						$-\frac{1}{2} (l_{z_B}^B x_B + m_{z_B}^B y_B)$

(b) matrix [ $k_G(\tau_y)$ ] :  $(l_x, m_x, n_x, \tau_x) \rightarrow (l_y, m_y, n_y, \tau_y)$  in [ $k_G(\tau_x)$ ]

(c) matrix [ $k_G(\sigma)$ ] :  $(l_x, m_x, n_x, \tau_x) \rightarrow (l_z, m_z, n_z, \sigma)$  in [ $k_G(\tau_x)$ ]

$$\delta_x = \{ l_x^B (u_B)_P + m_x^B (v_B)_P + n_x^B (w_B)_P - \{ l_x^A (u_A)_P + m_x^A (v_A)_P + n_x^A (w_A)_P \}$$

$$\delta_y = \{ l_y^B (u_B)_P + m_y^B (v_B)_P + n_y^B (w_B)_P - \{ l_y^A (u_A)_P + m_y^A (v_A)_P + n_y^A (w_A)_P \}$$

$$\delta_z = \{ l_z^B (u_B)_P + m_z^B (v_B)_P + n_z^B (w_B)_P - \{ l_z^A (u_A)_P + m_z^A (v_A)_P + n_z^A (w_A)_P \}$$

(19)

$-\{ l_z^A (u_A)_P + m_z^A (v_A)_P + n_z^A (w_A)_P \}$   
 ここに、 $l_x^A, m_x^A, n_x^A$  は  $x'$  軸の要素座標軸  $x_A, y_A, z_A$  に対する方向余弦であり、他の成分も同様に定義されている。(19)式に(11)式を代入して増分形の相対変位を計算し、 $a_i$  に関する線形成分と非線形成分を分離すると次

研 究 速 報 .....  
 式を得る。

$$\{\Delta d^*\}' = \{\Delta d(\text{linear})\} + \{\Delta \bar{d}(\text{nonlinear})\} \\ = [B]\{\Delta a\} + \{\Delta \bar{d}\}$$

ここに

$$\{\Delta d^*\}' = {}_1\Delta\delta_x^* \Delta\delta_y^* \Delta\delta_z^* \quad (20) \\ \{\Delta d\}' = {}_1\Delta\delta_x \Delta\delta_y \Delta\delta_z \\ \{\Delta \bar{d}\}' = {}_1\Delta\bar{\delta}_x \Delta\bar{\delta}_y \Delta\bar{\delta}_z \\ \{\Delta a\}' = {}_1\Delta a_1^A \dots \Delta a_6^A \Delta a_1^B \dots \Delta a_6^B$$

[B]マトリックスの具体形を Table 1 に示す。

剛体要素間を結合するばねに生ずる応力増分は次式により計算される。

$$\{\Delta s\} = [D]\{\Delta d\}$$

ここに

$$\{\Delta s\}' = {}_1\Delta\tau_x \Delta\tau_y \Delta\sigma \quad (21)$$

$\tau_x, \tau_y$  は  $x', y'$  軸方向のせん断応力であり、 $\sigma$  は  $z'$  軸方向の直応力である。

以上の諸関係式を点 P に対する増分形仮想仕事式

$${}_1\Delta s_j \{\delta \Delta d\} + {}_1s_j \{\delta \Delta \bar{d}\} \\ = {}_1\delta \Delta a_j \{\Delta f\} + ({}_1\delta \Delta a_j \{f\} - {}_1s_j \{\Delta d\}) \quad (22)$$

に代入することにより、次の増分形剛性方程式を得る。

$$([k] + [k_c])\{\Delta a\} = \{\Delta f\} + \{f_r\}$$

ここに

$$[k] = [B]'[D][B] \quad (23) \\ [k_c] = [k_c(\tau_x)] + [k_c(\tau_y)] + [k_c(\sigma)]$$

$$\{f_r\} = \{f\} - [B]'\{s\}$$

$[k_c]$ マトリックスの具体形を Table 2 に示す。要素境界断面全体の接線剛性マトリックスおよび不平衡力は、(23)式の諸量を境界断面 A 上で積分することにより、以下のように定められる。

$$[k_\tau] = \int_A ([k] + [k_c]) dA \quad (24)$$

$$\{f_r\} = \int_A \{f_r\} dA$$

(24)式の計算は、必要最少限の積分点による数値積分により行うものとする。

#### 4. 結 語

本報告では、厳密な 3 次元剛体変位関数からオーダ評価により 3 次元問題および各種構造物に対する近似的な剛体変位関数を誘導し、これに基づいて厚肉シェルの剛体要素モデルによる有限変形解析法の概略を示した。

(1982 年 4 月 8 日受理)

#### 参 考 文 献

- 8) 都井, 川井: シェル構造の離散化極限解析 (その 3) — 平板剛体要素モデルによる有限変形解析 —, 生産研究, 第 33 巻 第 11 号 (1981) 16~19
- 9) 原島: 力学 (改訂版), 裳華房 (1965) 186

