

# 5 自由度制御形磁気軸受制御系の研究 (第 1 報) —設計問題の定式化とサブシステムへの分解—

Control System Design for Totally Active DC-type Magnetic Bearings (1st report)  
—Description and Decomposition of Control System Design—

樋 口 俊 郎\*・水 野 毅\*・相 川 登\*\*  
Toshiro HIGUHI, Takeshi MIZUNO and Noboru AIKAWA

## 1. ま え が き

磁気軸受は、回転体を無接触で支持することができ、潤滑剤を必要としないなどの利点を持っている。本報では、回転体の回転軸まわりの回転を除く 5 自由度の運動のすべてを能動的に制御する形式の磁気軸受の基本方程式を導出し、制御系の設計問題を最適レギュレータ問題として定式化する。さらに、それが複数個の低次元のサブシステムのレギュレータ問題に分解できることを示す。

## 2. 基本モデル

### 2.1 回転体の運動方程式

以下で論じる磁気軸受の基本的な構造を図 1 に示す。これは、回転体の半径方向の変位と回転軸の傾きとを制御する 8 個の電磁石①～⑧と、回転体の軸方向の変位を制御する 2 個の電磁石⑨、⑩とからなる。

磁気軸受によって支持される回転体は、重心に関して対称な軸対称剛体であるとし、モータなどによって回転軸まわりのトルク  $T_m$  が与えられているとする。

回転体の重心  $G$  を原点とし、各軸が回転体の慣性主軸の方向と一致するように、回転体に固定した運動座標系  $G-\xi\eta\zeta$  を定める。ここで、 $\zeta$  軸は回転軸と一致するようにする。回転体の重心の位置は、空間に固定した静止座標系  $O-xyz$  で指定する。ただし、平衡状態では両座標系は一致するようにする。 $\xi, \eta, \zeta$  軸の方向は、以下で定義する Euler 角  $\theta, \varphi, \psi$  で指定する(軸の方向を定めるときは、重心の運動は考える必要がないので、 $G$  と  $O$  とは一致しているものとする)。 $\zeta$  軸が  $z$  軸となす角を  $\theta$ 、 $z\xi$  平面と  $xy$  平面との交線  $GP$  が  $x$  軸となす角を  $\varphi$ 、 $z\xi$  平面と  $\xi\eta$  平面との交線  $Gx'$  から  $\xi$  軸までの回転角を  $\psi$  とする。また、角運動量を計算するのに便利なように運動座標系  $G-x'y'z'$  を定める。ここで、 $z'$  軸は  $\zeta$  軸

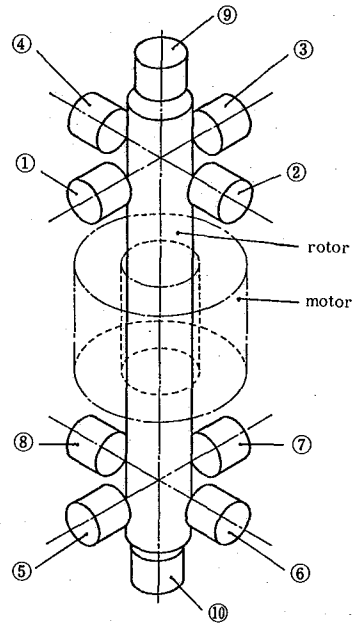


図 1 5 自由度制御形磁気軸受の基本モデル  
(①～⑩：電磁石)

と一致するようにとり、 $y'$  軸は座標系が右手系になるようにとる ( $G-\xi\eta\zeta, O-xyz$  も右手系であるようにする)。各座標系と Euler 角  $\theta, \varphi, \psi$  との関係を図 2 に示す。

回転体に働く外力としては、各電磁石の吸引力  $F_1 \sim F_{10}$  がある。図 3 に示すように、 $F_1, \dots, F_8$  は重心から回転軸方向に距離  $l$  だけ離れた点に、 $x$  軸または  $y$  軸に平行な方向に働く。また、 $F_9, F_{10}$  は  $z$  軸に平行な方向に働く。以下の解析では、重力の影響、回転軸の偏心によって生じるモータの半径方向の吸引力の影響などは無視することにする。

回転の重心の位置を  $(x, y, z)$  で表すと、並進運動についての運動方程式は次のようになる。

\* 東京大学生産技術研究所 第 2 部  
\*\* 新日本製鉄株式会社

研 究 速 報

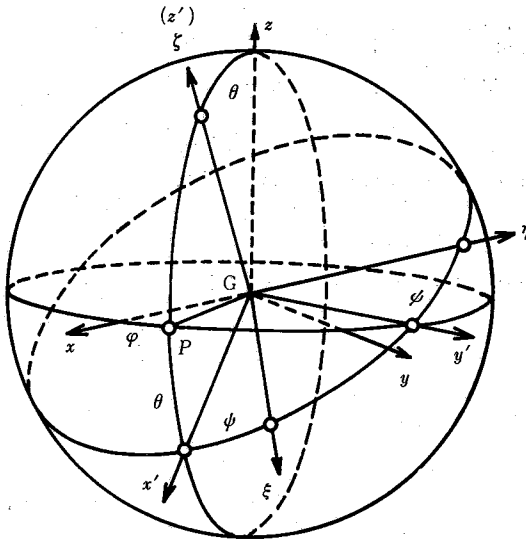


図 2 座標系と Euler 角

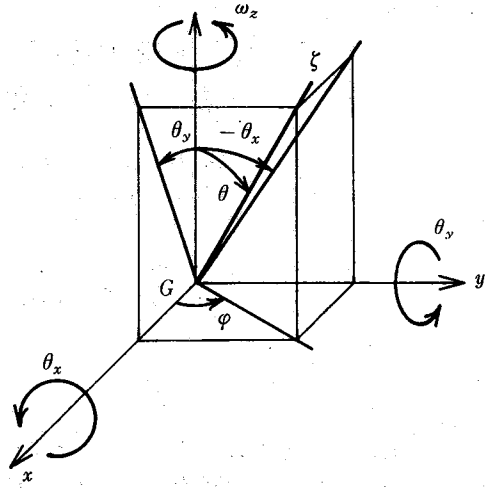


図 4  $\theta_x, \theta_y$ , および  $\omega_z$  の定義

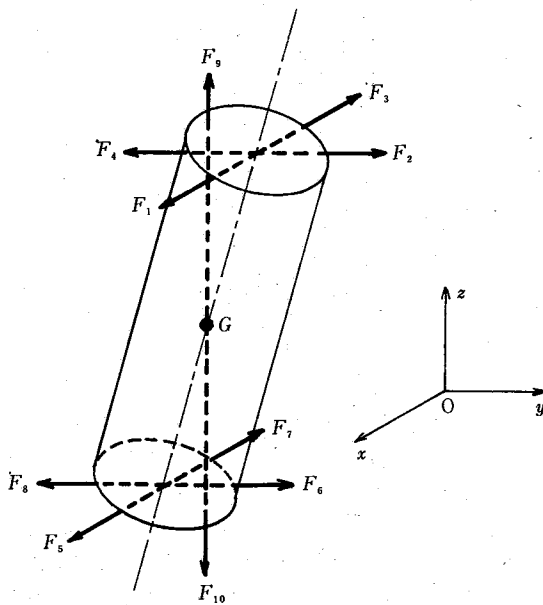


図 3 回転体に働く電磁石の吸引力

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_1 - F_3 + F_5 - F_7 \\ m\ddot{y} &= F_2 - F_4 + F_6 - F_8 \\ m\ddot{z} &= F_9 - F_{10} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$m$ : 回転体の質量

重心まわりの回転運動についての方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_{x'} &= -J_r(\dot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta) \\ &\quad + J_a \dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \\ M_{y'} &= J_r(\dot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + J_a \dot{\varphi} \sin \theta(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \\ M_{z'} &= J_a \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$J_a$ : 回転体の  $\xi$  軸まわりの慣性モーメント

$J_r$ : 回転体の  $\xi$  軸,  $\eta$  軸まわりの慣性モーメント

ここで,  $M_\alpha$  は回転体に働く外力の合モーメントの  $\alpha$  成分で, 具体的には次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_{x'} &= (F_1 - F_3 - F_5 + F_7)l \sin \varphi \\ &\quad - (F_2 - F_4 - F_6 + F_8)l \cos \varphi \\ M_{y'} &= (F_1 - F_3 - F_5 + F_7)l \cos \varphi \\ &\quad + (F_2 - F_4 - F_6 + F_8)l \sin \varphi \\ M_{z'} &= T_m \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

以下の解析では, 平衡状態からの変動は微小であるとして,  $x, y, \theta$  の 2 次以上の項は考えないことにする。このとき, 式 (2) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_{x'} &= -J_r(\dot{\varphi}\theta + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}) \\ &\quad + J_a \dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}) \\ M_{y'} &= J_r(\dot{\theta} - \dot{\varphi}^2\theta) \\ &\quad + J_a \dot{\varphi}\theta(\dot{\psi} + \dot{\varphi}) \\ M_{z'} &= J_a \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

回転体の回転軸の傾きを  $\theta_x, \theta_y$  で表すことにする。ここで  $\theta_x, \theta_y$  はそれぞれ  $x$  軸まわり,  $y$  軸まわりの角変位の大きさを表し, 右ねじの方向を正とする。また, 回転体の  $z$  軸まわりの角速度を  $\omega_z$  とする。図 4 から  $\theta$  が微小なとき,  $\theta_x, \theta_y, \omega_z$  と Euler 角との間には次のような関係が成立することがわかる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= -\theta \sin \varphi \\ \theta_y &= \theta \cos \varphi \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式 (3), (5) を式 (4) に代入して整理すると, 次のような式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} J_r \ddot{\theta}_y - J_a \omega_z \dot{\theta}_x \\ &= (F_1 - F_3 - F_5 + F_7) l \\ J_r \ddot{\theta}_x + J_a \omega_z \dot{\theta}_y \\ &= (-F_2 + F_4 + F_6 - F_8) l \\ J_a \dot{\omega}_z &= T_m \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

以下の解析では, 回転体は定角速度 ( $\omega_z = \text{const}$ ) で回転しているとする.

### 2.2 電磁石の特性と基本方程式の導出

回転体に働く電磁石の吸引力  $F$  は, 電磁石と回転体との間の空隙の大きさ  $d$  と, 電磁石の励磁電流  $i$  によって一般に次のように表される.

$$F = Ki^\rho / d^\sigma \quad (K > 0; \sigma, \rho \geq 1) \quad (7)$$

ここで,  $K, \rho, \sigma$  は電磁石の特性から決まる定数である.  $i, d$  の変動量  $\Delta i, \Delta d$  は, 平衡状態における定常値  $\bar{i}, \bar{d}$  に比べて微小であるとし,  $\Delta i / \bar{i}, \Delta d / \bar{d}$  の 2 次以上の項を無視すると, 式 (7) は

$$F = \bar{F} + K_i \Delta i - K_d \Delta d \quad (8)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \bar{F} &= K \bar{i}^\rho / \bar{d}^\sigma \\ K_i &= \rho K \bar{i}^{\rho-1} / \bar{d}^\sigma \\ K_d &= \sigma K \bar{i}^\rho / \bar{d}^{\sigma+1} \end{aligned}$$

各電磁石の特性や動作条件は, 半径方向の 8 個の電磁石 ①~⑧ (特性値を  $\bar{F}, K_i, K_d$  で表す), および軸方向の 2 個の電磁石 ⑨, ⑩ (特性値を  $\bar{F}', K'_i, K'_d$  で表す) において, それぞれ同じであるとする. 各電磁石と回転体との間の空隙の大きさの変動分  $d_k$  ( $k=1, \dots, 10$ ) は次のように表すことができる.

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= -x - l\theta_y, & d_2 &= -y + l\theta_x \\ d_3 &= x + l\theta_y, & d_4 &= y - l\theta_x \\ d_5 &= -x + l\theta_y, & d_6 &= -y - l\theta_x \\ d_7 &= x - l\theta_y, & d_8 &= y + l\theta_x \\ d_9 &= -z, & d_{10} &= z \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式 (8), (9) を運動方程式 (1), (6) に代入すると, 5 自由度制御形磁気軸受制御系の基本方程式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= 4K_d x + K_i(i_1 - i_3 + i_5 - i_7) \\ m\ddot{y} &= 4K_d y + K_i(i_2 - i_4 + i_6 - i_8) \\ m\ddot{z} &= 2K'_d z + K'_i(i_9 - i_{10}) \\ J_r \ddot{\theta}_y - J_a \omega_z \dot{\theta}_x \\ &= 4K_d l^2 \theta_y + K_i l (i_1 - i_3 - i_5 + i_7) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} J_r \ddot{\theta}_x + J_a \omega_z \dot{\theta}_y \\ &= 4K_d l^2 \theta_x + K_i l (-i_2 + i_4 + i_6 - i_8) \end{aligned} \right\}$$

$i_k$ : 各電磁石の励磁電流の変動分

### 3. 最適レギュレータ問題の定式化とサブシステムへの分解

#### 3.1 最適レギュレータ問題の定式化

軸受としての機能を考えると, 回転体の位置が平衡状態から変動した場合, 敏速に平衡状態に戻るように各電磁石の励磁電流を制御する必要がある. また, そのときエネルギーの消費量ができるだけ少ないことが望ましい. このような点から, 本報では制御系の設計問題を最適レギュレータ問題として扱う.

式 (10) で記述されるシステムに対して, 次に定義する 2 次形式評価関数  $J$

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (11)$$

ここで,

$$\begin{aligned} x &= [x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta_y, \dot{\theta}_y, \theta_x, \dot{\theta}_x, z, \dot{z}]^T \\ u &= [i_1 - i_3, i_2 - i_4, i_5 - i_7, i_6 - i_8, i_9 - i_{10}]^T \end{aligned}$$

$Q$ : 適当な  $10 \times 10$  非負定値行列

$R$ : 適当な  $5 \times 5$  正定値行列

を最小にする  $u(t)$  を求める問題を考える. 系の対称性を考慮すると,  $Q, R$  としては次のような形のものを選定するのが最も自然である.

$$\begin{aligned} Q &= \text{diag}(q_a, q_v, q_a, q_v, q_a, q_v, \\ &\quad q_v, q_a, q'_a, q'_v) \\ R &= \text{diag}(r, r, r, r, r') \\ &\quad (q_a, q_v, q'_a, r, r' > 0; q_v, q_a, q'_v \geq 0) \end{aligned}$$

ここで, 入力変数を次のように定義する.

$$\begin{aligned} u_x &= i_1 - i_3 + i_5 - i_7 \\ u_y &= i_2 - i_4 + i_6 - i_8 \\ u_{\theta_1} &= i_1 - i_3 - i_5 + i_7 \\ u_{\theta_2} &= -i_2 + i_4 + i_6 - i_8 \\ u_z &= i_9 - i_{10} \end{aligned}$$

これらの変数を用いると, 上述の問題は, 並進運動に関する 1 自由度系の最適レギュレータ問題 [S-I] と, 重心まわりの回転運動に関する 2 自由度系の最適レギュレータ問題 [S-II] とに分解できる.

[S-I] (並進運動の制御についての問題)

制御対象の動特性が

$$\dot{w} = A_w w + b_w u_w \quad (12)$$

で表されるとき, 評価関数

研 究 速 報

$$J_w = \int_0^\infty (w^T Q_w w + r_w \dot{u}_w) dt \quad (13)$$

を最小にする  $u_w(t)$  を求める。

ここで、 $w = [w, \dot{w}]^T$  であって、 $w$  は  $x, y$  または  $z$  のいずれかである。また各係数行列は次のようになる。

$$A_x = A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4K_d/m & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2K_d'/m & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_x = b_y = [0, K_i/m]^T,$$

$$b_z = [0, K_i'/m]^T,$$

$$Q_x = Q_y = \text{diag}(q_a, q_v),$$

$$Q_z = \text{diag}(q'_a, q'_v),$$

$$r_x = r_y = r/2, \quad r_z = r'$$

[S-II] (回転運動の制御についての問題)

制御対象の動特性が

$$\dot{x}_o = A_o x_o + B_o u_o \quad (14)$$

と表されるとき、評価関数

$$J_o = \int_0^\infty (x_o^T Q_o x_o + u_o^T R_o u_o) dt \quad (15)$$

を最小にする  $u_o(t)$  を求める。

ここで、各ベクトル、係数行列は次のようになる。

$$x_o = [\theta_y, \dot{\theta}_y, \theta_x, \dot{\theta}_x]^T,$$

$$u_o = [u_{o1}, u_{o2}]^T,$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4K_d l^2/I_r & 0 & 0 & \omega_z l a/I_r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_z l a/I_r & 4K_d l^2/I_r & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_i l/I_r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & K_i l/I_r \end{bmatrix}$$

$$Q_o = \text{diag}(q_\theta, q_\omega, q_\theta, q_\omega)$$

$$R_o = \text{diag}(r/2, r/2)$$

[S-II] において、回転角速度  $\omega_z$  が零の場合、回転体の  $y$  軸まわりの回転運動  $\theta_y$  の制御と  $x$  軸まわりの回転運動  $\theta_x$  の制御は独立に扱うことができ、各係数の値の違いを除けば [S-I] と同じ形の問題を解くことになる。したがって、[S-II] は [S-I] を含んだより一般的な問題である。

3.2 問題の基準化

本節では、適当な無次元化変数を用いて [S-II] を書きなおすことにより、[S-II] を見やすい形にする。

基準量  $t_0, \theta_0, i_0$  によって無次元化変数  $\bar{t} (= t/t_0)$ 、 $\bar{\theta}_y$

( $= \theta_y/\theta_0$ )、 $\bar{\theta}_x (= \theta_x/\theta_0)$ 、 $\bar{u}_o (= u_o/i_0)$  を定義する。ただし、 $t_0, \theta_0, i_0$  は次の諸量を表す。

$$t_0 = \sqrt{\frac{I_r}{4K_d l^2}}$$

$$\theta_0 = \frac{\bar{d}}{l}$$

$$i_0 = \frac{4K_d \bar{d}}{K_i} \left( = \frac{4\sigma}{\rho} \bar{i} \right)$$

これらを用いると、[S-II] は次のようになる。ただし、簡単のために  $\bar{t}$  による微分を  $\dot{\bar{t}}$  で表す。

[S-II'] (回転運動の制御についての問題)

制御対象の動特性が

$$\dot{\bar{x}}_o = \bar{A}_o \bar{x}_o + \bar{B}_o \bar{u}_o \quad (16)$$

で記述されるとき、評価関数

$$J_o = \int_0^\infty (\bar{x}_o^T \bar{Q}_o \bar{x}_o + \bar{u}_o^T \bar{R}_o \bar{u}_o) d\bar{t} \quad (17)$$

を最小にする制御入力  $\bar{u}_o(\bar{t})$  を求める。

ここで、

$$\bar{x}_o = [\bar{\theta}_y, \dot{\bar{\theta}}_y, \bar{\theta}_x, \dot{\bar{\theta}}_x]^T$$

$$\bar{u}_o = [\bar{u}_{o1}, \bar{u}_{o2}]^T$$

$$\bar{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ただし、 $k = t_0 \omega_z l a / I_r$

$$\bar{B}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q}_o = \text{diag}(\bar{q}_\theta, \bar{q}_\omega, \bar{q}_\theta, \bar{q}_\omega)$$

ただし、 $\bar{q}_\theta = t_0 \theta_0^2 q_\theta$ 、 $\bar{q}_\omega = \theta_0^2 q_\omega$

$$\bar{R}_o = \text{diag}(\bar{r}_\theta, \bar{r}_\theta)$$

ただし、 $\bar{r}_\theta = i_0^2 r/2$

$\bar{r}_\theta > 0$  であるから、一般性を失うことなく  $\bar{r}_\theta = 1$  とすることができ。

4. あとがき

5 自由度制御形磁気軸受制御系の最適レギュレータ問題は、並進運動についての 3 個の 1 自由度系の最適レギュレータ問題と、重心まわりの回転運動についての 2 自由度系の最適レギュレータ問題とに分解できることを示した。また、前者は後者の特別な場合(回転角速度  $\omega_z$  が零)の問題に帰着できることがわかった。

(1982 年 3 月 15 日受理)