

5 自由度制御形磁気軸受制御系の研究 (第2報)

——ジャイロ効果による相互干渉のある系の最適レギュレータの構成——

Control System Design for Totally Active DC-type Magnetic Bearings (2nd report)
——Structures of the Optimal Regulator for Systems with Gyroscopic Couplings——

水 野 毅*・相 川 登**・樋 口 俊 郎*

Takeshi MIZUNO, Noboru AIKAWA and Toshiro HIGUCHI

1. ま え が き

5 自由度制御形磁気軸受制御系の最適レギュレータ問題は、回転体の並進運動についての3個の独立した1自由度系の最適レギュレータ問題と、重心まわりの回転運動についての2自由度系の最適レギュレータ問題とに分けて扱うことができる。¹⁾ 後者は前者を含んだより一般的な問題であるので、本報では後者の問題を扱う。回転体が高速で回転しているときには、ジャイロ効果によって重心まわりの2自由度の回転運動に強い相互作用が生じる。本報では、このような動特性をもつ制御対象に対する最適レギュレータの構造を明らかにする。

2. 問 題 の 記 述

平衡状態における回転体の重心Gの位置を原点とし、回転軸とz軸とが一致するように座標系G-xyzを定めることにする。

ジャイロ効果による相互干渉のある2自由度系の最適レギュレータ問題は、次のようになる。¹⁾

(S-II) (回転運動の制御についての問題)

制御対象の動特性が

$$\dot{x}_o = \bar{A}_o x_o + \bar{B}_o u_o \tag{1}$$

で表されるとき、評価関数

$$J_o = \int_0^{\infty} (\bar{x}_o^T \bar{Q}_o \bar{x}_o + \bar{u}_o^T \bar{R}_o \bar{u}_o) dt \tag{2}$$

を最小にする制御入力 $\bar{u}_o(t)$ を求める。

ここで、各ベクトル・係数行列は次のように定義される。

$$\bar{x}_o = [\bar{\theta}_y, \dot{\bar{\theta}}_y, \bar{\theta}_x, \dot{\bar{\theta}}_x]^T$$

$\bar{\theta}_y$: 回転体の y 軸まわりの角変位(無次元化量)

$\bar{\theta}_x$: 回転体の x 軸まわりの角変位(無次元化量)

$$\bar{u}_o = [\bar{u}_{o1}, \bar{u}_{o2}]^T$$

\bar{u}_{o1} : y 軸まわりのモーメントを生じさせる各電

磁石の励磁電流の変動分の和または差(無次元化量)

\bar{u}_{o2} : x 軸まわりのモーメントを生じさせる各電磁石の励磁電流の変動分の和または差(無次元化量)

$$\bar{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

k : ジャイロ効果の影響の大きさを表す量

$$\bar{B}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q}_o = \text{diag}(\bar{q}_o, \bar{q}_\omega, \bar{q}_o, \bar{q}_\omega)$$

$$\bar{q}_o > 0, \bar{q}_\omega > 0$$

$$\bar{R}_o = \text{diag}(1, 1)$$

3. 最適レギュレータ問題の解

J_o を最小にする最適入力 $\bar{u}_o^*(t)$ は Riccati 行列方程式

$$P\bar{A}_o + \bar{A}_o^T P - P\bar{B}_o\bar{R}_o^{-1}\bar{B}_o^T P + \bar{Q}_o = 0 \tag{3}$$

の正定値解を P とすると

$$\bar{u}_o^*(t) = -\bar{R}_o^{-1}\bar{B}_o^T P \bar{x}_o(t) \tag{4}$$

と表される。 \bar{Q}_o を $\bar{Q}_o = C^T C$ と表したときに (\bar{A}_o, C) が可観測であることと、 (\bar{A}_o, \bar{B}_o) が可制御であることから、式(3)には唯一の正定値解が存在し、対応する閉ループ系は漸近安定になる。

$$\dot{\bar{x}}_o = (\bar{A}_o - \bar{B}_o\bar{R}_o^{-1}\bar{B}_o^T P) \bar{x}_o \tag{5}$$

方程式(3)の解は、一般には数値計算によって求められるが、ここでは、系の内部構造に注目することによって解析的に求められることを示す。

式(5)の行列の各成分を用いて具体的に書き下すと、次のような関係式が得られる。

* 東京大学生産技術研究所 第2部

** 新日本製鉄株式会社

研究速報

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_y - k\dot{\theta}_x - \ddot{\theta}_y \\ = -p_{12}\ddot{\theta}_y - p_{22}\dot{\theta}_y - p_{23}\ddot{\theta}_x - p_{24}\dot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_x + k\dot{\theta}_y - \ddot{\theta}_x \\ = -p_{34}\ddot{\theta}_x - p_{44}\dot{\theta}_x - p_{14}\ddot{\theta}_y - p_{24}\dot{\theta}_y \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ただし、一般にPは対称行列であるので、Pの各成分を上三角成分で表すことにする。式(6)の左辺から、制御対象は、同じ伝達関数 $1/(s^2-1)$ をもつ2つの系が互いに異なる符号をもつ伝達要素を介して結合しているという構造をもつことがわかる(図1参照)。このような制御対象の内部構造に対応して、最適な状態フィードバック補償機構も同様な構造をもつことが推測される。すなわち、式(6)の右辺に現れるPの各成分に次のような関係が成立することが推測される。

$$\begin{aligned} p_{12} &= p_{34} & (7) \\ p_{22} &= p_{44} & (8) \\ p_{14} &= -p_{23} & (9) \\ p_{24} &= 0 \quad (\because p_{24} = -p_{24}) & (10) \end{aligned}$$

関係式(7)~(10)は、最適レギュレータが $k, \bar{q}_0, \bar{q}_\omega$ の値に依らず図5に示すような構造をもつことを意味する。Riccati 方程式(3)の唯一の正定値解Pが式(7)~(10)の関係を満たすことを以下で証明する。

式(3)に式(7)~(10)の関係を代入して整理すると

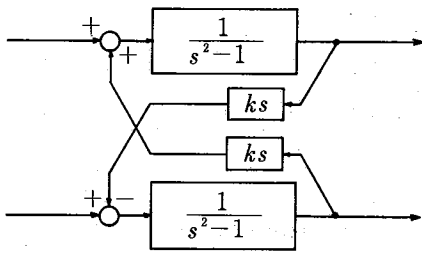


図1 制御対象の動特性

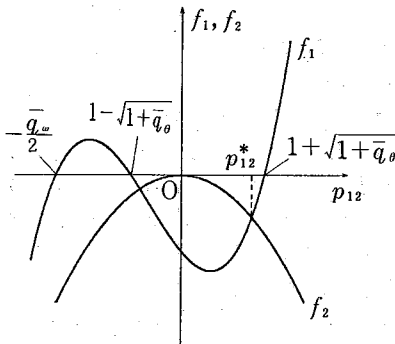


図2 フィードバック係数 p_{12}^* の決定

$$\begin{aligned} f_1 &= 2p_{12}^3 + (\bar{q}_\omega - 4)p_{12}^2 - 2(\bar{q}_0 + \bar{q}_\omega)p_{12} - \bar{q}_0\bar{q}_\omega \\ f_2 &= -k^2p_{12} \end{aligned}$$

($\sqrt{1+\bar{q}_0} - 1 < \bar{q}_\omega/2$ の場合を示す.)

$$p_{13} = 0 \quad (11)$$

$$p_{33} = p_{11} \quad (12)$$

$$p_{11} = -p_{22} + kp_{14} + p_{12}p_{22} \quad (13)$$

$$p_{14}^2 = 2p_{12} - p_{12}^2 + \bar{q}_0 \quad (14)$$

$$p_{22}^2 = 2p_{12} + \bar{q}_\omega \quad (15)$$

$$kp_{12} = p_{14}p_{22} \quad (16)$$

式(14)~(16)から p_{12} を定める方程式が得られる。

$$\begin{aligned} 2p_{12}^3 + (\bar{q}_\omega - 4)p_{12}^2 - 2(\bar{q}_0 + \bar{q}_\omega)p_{12} - \bar{q}_0\bar{q}_\omega \\ = -k^2p_{12}^2 \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)の関係を図2に示す。図2から式(17)は

$$0 < p_{12}^* \leq 1 + \sqrt{1 + \bar{q}_0} \quad (18)$$

を満たす唯一の根 p_{12}^* をもつことがわかる。 $p_{22} > 0$ という条件を付加すると、式(14)~(16)から p_{22}, p_{14} は一意に定まる。これらを p_{22}^*, p_{14}^* と表すことにする。

$$p_{22}^* = \sqrt{2p_{12}^* + \bar{q}_\omega} \quad (19)$$

$$p_{14}^* = \text{sgn}(k)\sqrt{2p_{12}^* - p_{12}^{*2} + \bar{q}_0} \quad (20)$$

式(19), (20)の関係をそれぞれ図3, 図4に示す。式(7)~(13)からPの他の成分は $p_{12}^*, p_{22}^*, p_{14}^*$ を用いて一意的に定められる。これらをまとめて $P^* = (p_{ij}^*)$ と表すことにする。

P^* は明らかに式(3)の一つの解であるので、次に P^* が正定値行列であることを証明する。 P^* が正定値行列であるため必要十分条件は、 P^* の4個の首座小行列式が正であることである。すなわち、

$$\det(P^*i) = p_{11}^* > 0 \quad (21)$$

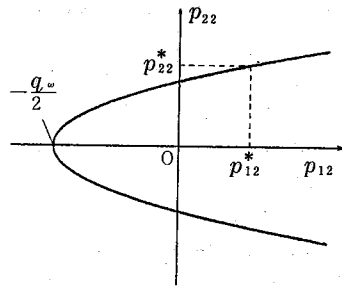


図3 フィードバック係数 p_{22}^* の決定

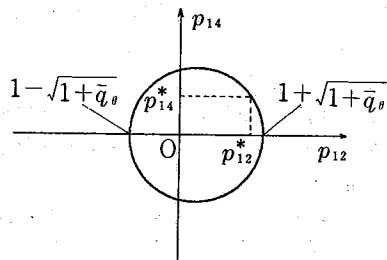


図4 フィードバック係数 p_{14}^* の決定

$$\det(P^*i_2^2) = p_{11}^* p_{22}^* - p_{12}^{*2} > 0 \quad (22)$$

$$\det(P^*i_3^3) = p_{11}^* (p_{11}^* p_{22}^* - p_{12}^{*2} - p_{14}^{*2}) > 0 \quad (23)$$

$$\det(P^*) = (p_{11}^* p_{22}^* - p_{12}^{*2} - p_{14}^{*2})^2 > 0 \quad (24)$$

式(13)から $p_{11}^* = -p_{22}^* + kp_{14}^* + p_{12}^* p_{22}^*$ が成立するが、両辺に $p_{22}^* p_{12}^*$ を掛けて、式(15)~(17)の關係を用いて整理すると

$$\begin{aligned} p_{11}^* p_{22}^* p_{12}^* &= (-p_{22}^{*2} + kp_{14}^* p_{22}^* + p_{12}^* p_{22}^{*2}) p_{12}^* \\ &= 2p_{12}^{*3} + (k^2 + \bar{q}_\omega - 2) p_{12}^{*2} - \bar{q}_\omega p_{12}^* \\ &= 2p_{12}^{*3} + (2\bar{q}_\omega + \bar{q}_\omega) p_{12}^* + \bar{q}_\omega \bar{q}_\omega \end{aligned}$$

$p_{12}^* > 0$, $p_{22}^* > 0$ であることから、 $p_{11}^* > 0$ が成立することがわかる。次に、 $(p_{11}^* p_{22}^* - p_{12}^{*2} - p_{14}^{*2}) p_{12}^*$ を式(13)~(17)の關係を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} (p_{11}^* p_{22}^* - p_{12}^{*2} - p_{14}^{*2}) p_{12}^* &= (-p_{22}^{*2} + kp_{14}^* p_{22}^* + p_{12}^* p_{22}^{*2} \\ &\quad - p_{12}^{*2} - p_{14}^{*2}) p_{12}^* \\ &= 2p_{12}^{*3} + (k^2 + \bar{q}_\omega - 4) p_{12}^{*2} \\ &\quad - (\bar{q}_\omega + \bar{q}_\omega) p_{12}^* \\ &= (\bar{q}_\omega + \bar{q}_\omega) p_{12}^* + \bar{q}_\omega \bar{q}_\omega \end{aligned}$$

$p_{12}^* > 0$ であることから、 $p_{11}^* p_{22}^* - p_{12}^{*2} - p_{14}^{*2} > 0$ が成立することがわかる。 $p_{11}^* > 0$ および $p_{11}^* p_{22}^* - p_{12}^{*2} - p_{14}^{*2} > 0$ が成立するとき、不等式(21)~(24)は成立するので、 P^* が正定値行列であることが証明された。

したがって、 P^* は Riccati 方程式(3)の唯一の正定値解であって、 $\bar{u}_\alpha(t) = -\bar{R}_\alpha^{-1} \bar{B}_\alpha^T P^* \bar{x}_\alpha(t)$ は J_0 を最小にする最適入力である。

最適レギュレータ系は、図5に示すような構成となる。 $\bar{\theta}_y, \bar{\theta}_x$ の運動の間にジャイロ効果による相互干渉が生じているのに対応して、最適状態フィードバック補償機

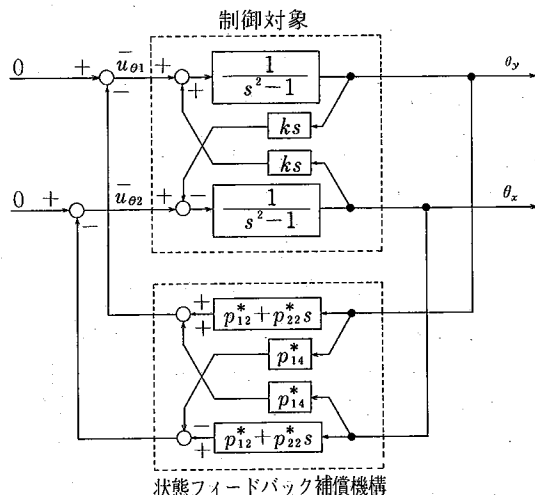


図5 最適レギュレータ系のブロック線図

構を構成するためには、 $p_{14}^* \bar{\theta}_x, -p_{14}^* \bar{\theta}_y$ という交差フィードバックが必要である。

4. 数 値 例

ここでは、ジャイロ効果の大きさを表すパラメータ k が、 $k=6.93$ という値をとる場合の例を示す。最適レギュレータを構成する際の重み行列 \bar{Q}_0 としては

- ① $\bar{Q}_0 = \text{diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$
- ② $\bar{Q}_0 = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$
- ③ $\bar{Q}_0 = \text{diag}(5, 5, 5, 5)$

というものを選定する。初期状態が $\bar{x}_\alpha(0) = [1, 0, 0, 0]^T$ のときの開ループ系および最適レギュレータ系の応答を図6(a)に示す。

ジャイロ効果を無視すれば、 $\bar{\theta}_y$ について制御と $\bar{\theta}_x$ についての制御とは独立に扱うことができる。この場合、次のような1自由度系の最適レギュレータ問題を解けば制御系を構成できる。

(S-I)

制御対象の動特性が

$$\ddot{\theta}_\alpha - \bar{\theta}_\alpha = \bar{u}_{\alpha i}$$

$$(\alpha = y \text{ のとき } i=1, \alpha = x \text{ のとき } i=2)$$

と表されるとき、評価関数

$$J_0 = \int_0^\infty (\bar{\theta}_\alpha \bar{q}'_0 \bar{\theta}_\alpha + \dot{\bar{\theta}}_\alpha \bar{q}''_0 \dot{\bar{\theta}}_\alpha + \bar{u}_{\alpha i}^2) dt$$

を最小にする $\bar{u}_{\alpha i}(t)$ を求める。

$\bar{u}_{\alpha i}$ は $\bar{\theta}_\alpha, \dot{\bar{\theta}}_\alpha$ の線形関数となるので、構成される制御系は交差フィードバック補償機構をもたず、 $k \neq 0$ の場合には最適レギュレータ系とは異なった特性をもつ制御系となる。

$k=6.93$ のとき、初期状態 $\bar{x}_\alpha(0) = [1, 0, 0, 0]^T$ から平衡状態に戻る時間が最適レギュレータ系の場合とほぼ等しくなるように、 \bar{q}'_0, \bar{q}''_0 を次のように定める(具体的には、遅いモードに対応する極が両者の場合で一致するように \bar{q}'_0, \bar{q}''_0 を選ぶ)。

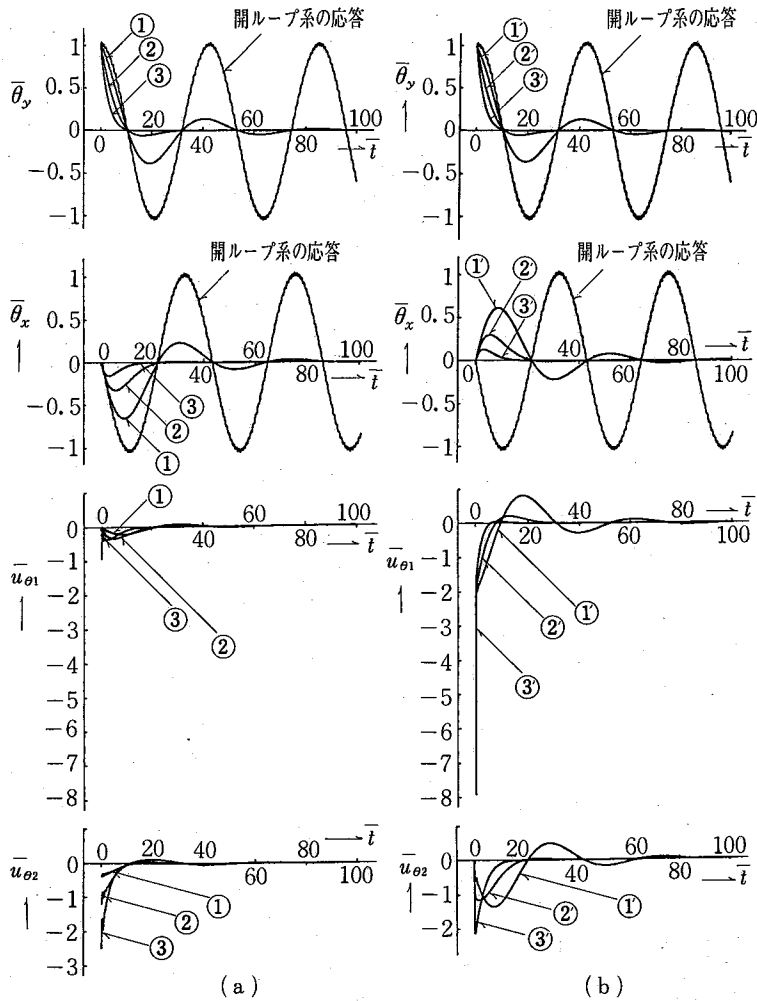
- ① $\bar{q}'_0 = 0.323, \bar{q}''_0 = 1.32$
- ② $\bar{q}'_0 = 3.53, \bar{q}''_0 = 53.0$
- ③ $\bar{q}'_0 = 46.4, \bar{q}''_0 = 356$

このときの応答を図6(b)に示す。

両者の応答を比較すると、ジャイロ効果を考慮して設計した最適レギュレータ系に比べて、ジャイロ効果を無視して設計した制御系はより大きな入力が必要とし、特に $t=0$ の付近では入力の変化の割合が大きい。

この例から、ジャイロ効果を考慮して構成した最適レギュレータ系は効率の良い合理的な制御系であることがわかる。

ただし、最適レギュレータ系は、回転体が設定値の速



(a) 最適レギュレータ系
 ① $\bar{Q}_o = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$, ② $\bar{Q}_o = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$, ③ $\bar{Q}_o = \text{diag}(5, 5, 5, 5)$
 (b) ジャイロ効果を見捨てて設計した制御系
 ① $\bar{q}'_o = 0.323, \bar{q}_o = 1.32$, ② $\bar{q}'_o = 3.53, \bar{q}_o = 53.0$, ③ $\bar{q}'_o = 46.4, \bar{q}_o = 356$
 図6 開ループ系および閉ループ系の応答 ($\bar{x}_o(0) = [1, 0, 0, 0]^T, k = 6.93$)

度で回転している場合には優れた特性をもつ系であるが、回転速度 (k の値) が設定値から変化した場合には閉ループ系の安定性は必ずしも保障されない。したがって、回転速度が変化する場合には、回転速度を検出し、それに応じてフィードバックゲインを調整するという、一種の適応制御系を構成することが考えられる。その場合においても、各フィードバックゲインが式(17)~(20)によって簡単に計算できることは、実際の制御系を構成するうえで有用であると思われる。

5. あとがき

ジャイロ効果による相互干渉のある2自由度系の最適レギュレータの基本的な構成を明らかにし、数値例によってその有効性を検証した。(1982年3月15日受理)

参 考 文 献

1) 樋口・水野・相川：5自由度制御形破気軸受制御系の研究(第1報), 生産研究, 34巻, 6号(1982).