

# 振動特性同定法の簡単化に関する一方法

A New Simplified Algorithm for Identification of Structural Vibration Characteristics

王 信義\*・佐藤 壽芳\*・大堀 真敬\*

Shinyi WANG, Hisayoshi SATO and Masanori O-HORI

## 1. ま え が き

著者らは、工作機械構造を例に、衝撃応答のフーリエ変換によって得られる振動特性の同定について研究をすすめ<sup>1),2)</sup>従来の方法<sup>3),4)</sup>に対比し、計算精度の向上と計算時間の節減をはかってきた。この過程で、著者らが裾影響評価法とよぶ、簡単かつ有効な方法を提案することが可能となった<sup>5)</sup>既報では、大型計算機を使用する場合に、他の方法と比し大幅な計算時間の短縮がはかれることを示した。本報告では、この方法によって、特性同定がマイクロコンピュータでも処理しうることを明らかにした。

## 2. 裾影響評価法の考え方

$N$ 自由度系構造物の衝撃周波数応答関数は各固有振動数に対応する一自由度系の周波数応答関数を重ね合わせて得られる。この方法は測定でえられた衝撃周波数応答関数にたいし、複数の1自由度系の特性で同定する際の新たなアルゴリズムを提案するものである。衝撃をうける1自由度系の運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = I\delta(t) \quad (1)$$

で表される。ただし、 $x$ ：質点の変位、 $m$ ：質量、 $c$ ：減衰係数、 $k$ ：ばね定数、 $I$ ：質点に与える衝撃の強さ、 $\delta$ ：デルタ関数をそれぞれ表す。初期条件  $x(0)=0$ 、 $\dot{x}(0)=I/m$  として(1)を解き加速度応答として次式が求められる。

$$x(t) = \omega_0^3 (I/k) e^{-\zeta\omega_0 t} \left( \frac{2\zeta^2 - 1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t - 2\zeta \cos \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t \right) \quad (2)$$

ただし、 $\omega_0^2 = k/m$ 、 $2\zeta\omega_0 = c/m$ 、 $\zeta$ ：減衰定数、 $\omega_0$ ：無減衰時固有円振動数である。(2)をフーリエ変換してそ

の虚部を求めると、

$$IA(j\omega) = \frac{2\zeta\omega_0^3 \omega^3 D}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_0^2 \omega^2} \quad (3)$$

がえられる。ここで  $D=I/k$ 、 $\omega$ ：円振動数、 $j$ ：虚数単位である。 $N$ 自由度系の場合は(3)をもとにして

$$IA(j\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{2\zeta_i \omega_{0i}^3 \omega^3 D_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_i^2 \omega_{0i}^2 \omega^2} \quad (4)$$

と表すことができる。本報告では、この特性を例に  $D_i$ 、 $\zeta_i$ 、 $\omega_{0i}$  を求め曲線適合する過程についてのべる。

虚部の特性は一般的に図1のように表される。山2の形状には左右から山1と山3の裾影響が入りこんでいるから、これを正確に評価して、その影響を除くことができれば、山2を1自由度系としてみた  $D_i$ 、 $\zeta_i$ 、 $\omega_{0i}$  を求めることができるはずである。一般的には、各山に対し左右にある全ての山の裾の影響が評価できればよい。

実測値をもとにして求められる第  $K$  番目の山の周波数応答関数は、 $i \neq l$ 、 $l=1, 2, \dots, N$  として

$$IA_{d_i}(j\omega) = IA_d(j\omega) - \sum_{i=1}^N \frac{2D_l \zeta_l (\omega/\omega_{0l}) \omega^2}{(1 - \omega^2/\omega_{0l}^2)^2 + 4\zeta_l^2 \omega^2/\omega_{0l}^2} \quad (5)$$

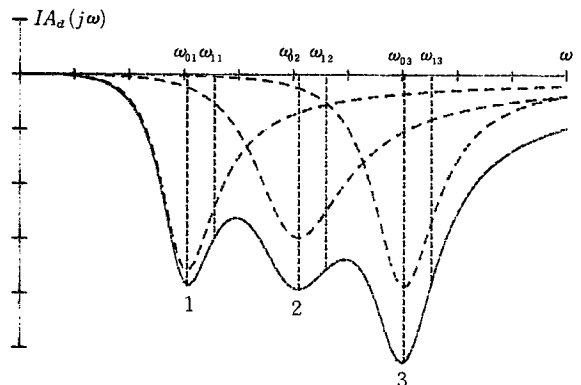


図1 裾影響評価法の考え方

\* 東京大学生産技術研究所 第2部

研究速報  
 とかける。ただし、 $IA_d(j\omega)$ ：実測された周波数応答関数である。

各山に対して山が最大となる円振動数として  $\omega_0$  を、それ以外の任意の円振動数として  $\omega_1$  をそれぞれ与えると、近似的な関係として(3)より

$$IA_{di}(j\omega_{0i}) = \frac{D_i \omega_{0i}^2}{2\zeta_i} \quad (6)$$

$$IA_{di}(j\omega_{1i}) = \frac{2\zeta_i \omega_{0i}^3 \omega_{1i}^3 D_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega_{1i}^2)^2 + 4\zeta_i^2 \omega_{0i}^2 \omega_{1i}^2} \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

が求められるから、これを解いて

$$\zeta_i = \sqrt{\frac{IA_{di}(j\omega_{1i}) \cdot (1 - \omega_{1i}^2/\omega_{0i}^2)^2}{4 IA_{di}(j\omega_{0i}) \cdot \omega_{1i}^3/\omega_{0i}^3 - 4 IA_{di}(j\omega_{1i}) \cdot \omega_{1i}^2/\omega_{0i}^2}}$$

$$D_i = \frac{2\zeta_i \cdot IA_{di}(j\omega_{0i})}{\omega_{0i}^2} \quad (8) \quad (9)$$

を導くことができる。これらは以下の計算をすすめるにあたり、初期値ならびに繰り返し計算の更改値を求めるために用いる。次に裾影響評価法の手順を示す。いま、注目している固有振動数より低い固有振動数の周波数応答関数  $IA_L(j\omega)$  と、注目している固有振動数より高い固有振動数の周波数応答関数  $IA_R(j\omega)$  をそれぞれ

$$IA_L(j\omega) = \sum_{i=1}^{l-1} \frac{2D_i \zeta_i (\omega/\omega_{0i}) \omega^2}{(1 - \omega^2/\omega_{0i}^2)^2 + 4\zeta_i^2 \omega^2/\omega_{0i}^2} \quad (10)$$

$$l = 2, 3, \dots, N$$

$$IA_R(j\omega) = \sum_{i=l+1}^N \frac{2D_i \zeta_i (\omega/\omega_{0i}) \omega^2}{(1 - \omega^2/\omega_{0i}^2)^2 + 4\zeta_i^2 \omega^2/\omega_{0i}^2} \quad (11)$$

$$l = 1, 2, \dots, N-1$$

と表すと、計算の手順は次のようになる。

a) 左端の山にたいして、(8)、(9)の関係によって  $D_1, \zeta_1, \omega_{01}$  の初期値を求める。

b) 左端から2番目の山に対して、(10)で  $l=2$  とおき

$$IA_{d1}(j\omega) = IA_d(j\omega) - IA_L(j\omega)|_{l=2} \quad (12)$$

を与えて  $\omega = \omega_{02}, \omega = \omega_{12}$  を入れ、(8)、(9)と同様にして  $D_2, \zeta_2$  を求める。

c) 3番目の山では(10)で  $l=3$  とし、a)、b)によって求められた  $D_i, \zeta_i, \omega_{0i} (i=1, 2)$  を用い b)の手順をくり返し、 $l=1, 2$  を考慮した  $D_3, \zeta_3, \omega_{03}$  を求める。  $l=4$  以降  $N$  までこの手順をくり返す。

d)  $l=N-1$  の山に注目し、すでにc)までで求めた結果に加えて右側の山  $N$  の影響を(11)で  $l=N-1$  と

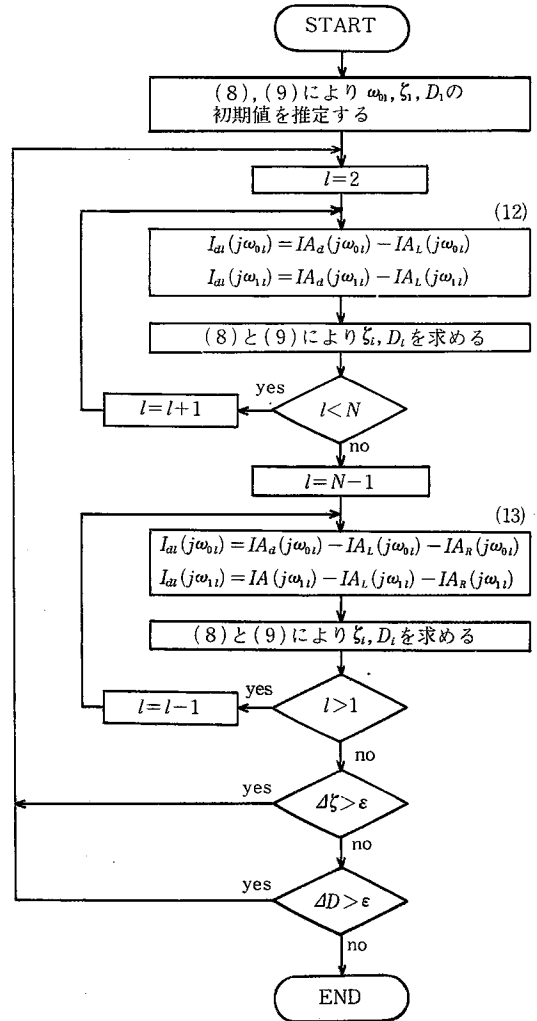


図2 計算流れ図

おき

$$IA_{dl}(j\omega) = IA_L(j\omega) - IA_L(j\omega)|_{l=N-1} - IA_R(j\omega)|_{l=N-1} \quad (13)$$

とした後、b)と同様の手順によって  $\zeta_{N-1}, D_{N-1}, \omega_{0N-1}$  を求める。

e) d)の手順を  $N-2 \rightarrow 1$  の方向に順次たどる。その後は  $D_i, \zeta_i, \omega_{0i}$  が収束するまで a)~e)をくり返す。図2はその計算の流れ図である。

### 3. 計算例

図3の実線は旋盤の刃物台において測定された周波数応答関数の虚部である。まず×印をつけた顕著な14の山に固有振動数を仮定し、上述の計算方法で曲線適合を行

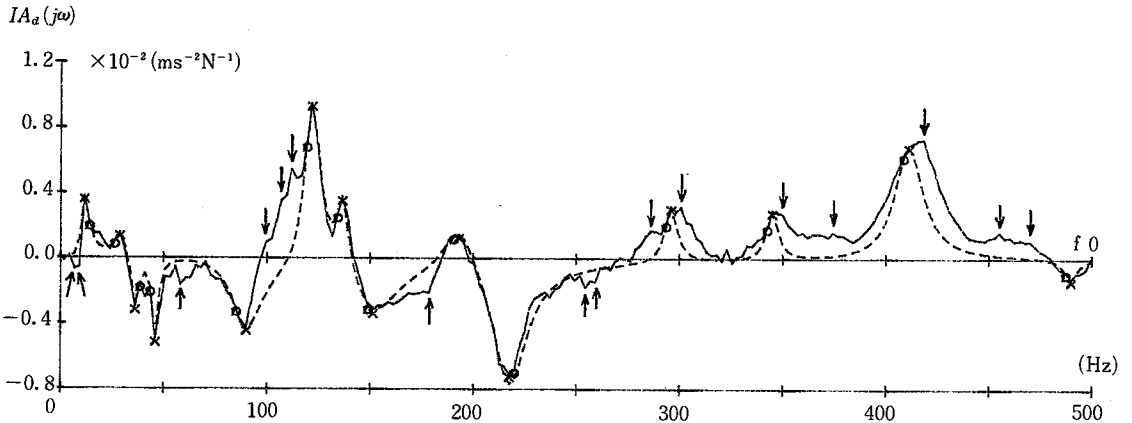


図3 刃物台上の衝撃応答曲線にたいする適合の結果

(14山を仮定)

実線：測定結果

破線：適合結果

x：考慮した固有振動数  $f_0$  の位置

o：  $f_0$  に対応する  $f_i$

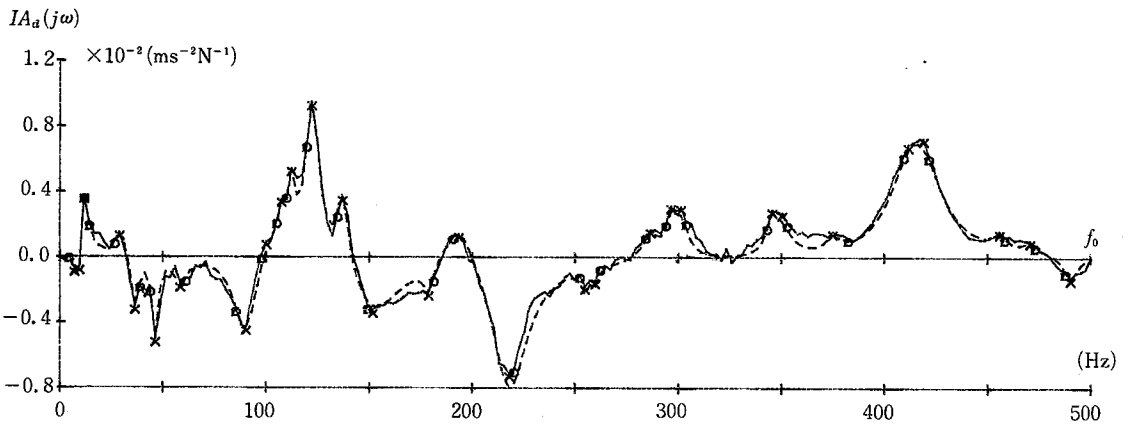


図4 刃物台上の衝撃応答曲線にたいする適合の結果(30山)

実線：測定結果

破線：適合結果

x：考慮した固有振動数  $f_0$  の位置

o：  $f_0$  に対応する  $f_i$

う。その結果は図3の破線に示すようになり、山の高さで合致していても、その形状については測定された曲線との間で必ずしもよく一致してはいない。そこで山の形状を考慮し、さらに矢印の所にも固有振動数を仮定し30山として同様な計算をおこなった結果が図4である。適合の形状が、一段と改善されていることがわかる。

表1は図4によって求められた  $D_i$ 、 $\zeta_i$ 、 $f_{0i}$  である。これらは計算機として FACOM M-160 AD を使用し、誤差二乗和最小法で曲線適合した結果と誤差の範囲内で同じ結果となっている。<sup>4)</sup>以上の計算には HP 9825 A デス

クトップ・コンピューター、HP 7225 A プロッターを用いたが、表2は図3、図4を求めするために要した時間をまとめたものである。図4の場合に FACOM M-160 AD では往復1回の演算時間は0.6秒であった。同じ計算機を用い最小二乗法でこの結果を求めるには、約60倍の計算時間を要しており、アルゴリズムの上でも、計算時間の上でも、また30という多数の山を曲線適合する上でも、本方法によってマイクロコンピュータを用いることがはじめて可能となったものと思われる。

研究速報

表1 図5の曲線適合によって求められたパラメータ

	$D_i$ ( $\text{ms}^{-2} \text{N}^{-1}$ )	$\zeta_i$	$f_0$ (Hz)
1	$-1.33 \times 10^{-7}$	0.1632	7.32
2	$-5.75 \times 10^{-8}$	0.0723	9.76
3	$2.38 \times 10^{-7}$	0.0172	12.2
4	$9.66 \times 10^{-9}$	0.1083	29.3
5	$-8.14 \times 10^{-9}$	0.0640	36.6
6	$-4.43 \times 10^{-9}$	0.0395	46.4
7	$-1.44 \times 10^{-9}$	0.0683	58.6
8	$-3.28 \times 10^{-9}$	0.0908	90.3
9	$1.80 \times 10^{-9}$	0.1172	100.1
10	$1.41 \times 10^{-10}$	0.0178	107.4
11	$2.61 \times 10^{-10}$	0.0181	112.3
12	$1.01 \times 10^{-9}$	0.0320	122.1
13	$3.02 \times 10^{-10}$	0.0249	136.7
14	$-7.89 \times 10^{-10}$	0.0998	151.4
15	$-4.29 \times 10^{-11}$	0.0174	178.2
16	$2.10 \times 10^{-10}$	0.0506	192.9
17	$-4.26 \times 10^{-10}$	0.0486	217.3
18	$-8.97 \times 10^{-12}$	0.0086	253.9
19	$-5.08 \times 10^{-12}$	0.0067	258.8
20	$1.84 \times 10^{-11}$	0.0202	285.6
21	$9.60 \times 10^{-12}$	0.0090	295.4
22	$1.71 \times 10^{-11}$	0.0140	300.3
23	$7.34 \times 10^{-12}$	0.0094	344.2
24	$1.05 \times 10^{-11}$	0.0166	349.1
25	$3.24 \times 10^{-12}$	0.0110	373.5
26	$4.08 \times 10^{-11}$	0.0318	410.2
27	$2.83 \times 10^{-11}$	0.0284	417.5
28	$1.72 \times 10^{-12}$	0.0079	454.1
29	$1.01 \times 10^{-12}$	0.0070	468.8
30	$-2.69 \times 10^{-12}$	0.0083	488.3

4. ま と め

衝撃応答波形をフーリエ変換してえられる周波数応答関数を重ね合わせて曲線適合する方法について、裾影響評価法とよぶ簡単な方法を提示し、工作機械構造の周波数応答関数を解析例として、その特徴を明らかにした。この結果は以下のように要約される。

表2 計算等の時間

単位：秒

	往復1回の演算時間	出力印刷時間	曲線のプロット時間	合計
HP 9825 Aおよび HP 7225 A システム				
14山(図3)	30	40	120	190
30山(図4)	60	90	240	380
FACOM M-160 AD				
30山(図4)	0.6			10(CPU)

1) 500 Hz までに含まれる30の固有振動数にたいして、マイクロコンピュータによっても良く曲線適合ができることを示した。

2) プログラムが簡単かつ固有振動数を多数設定しても確実に収束し、計算時間は30山に対し、50秒程度であることが示された。

3) 解析例では固有振動数が互いに近接する場合もみられたが、そのような場合にもこの方法が有効であることを示した。

(1981年8月25日受理)

参 考 文 献

- 1) 三井, 佐藤: インパルス応答のパワースペクトルによる減衰定数推定の方法, 生産研究 26-11, 昭49-11, 426
- 2) A. L. Klosterman and J. R. Lemon: Building Block Approach to Structural Dynamics, ASME 69-Vibr-304, 1969
- 3) 岡村, 松原: 周波数応答実験から伝達関数を決定する方法, 精密機械, 37-4, (昭46), 282
- 4) 王ほか2名: 衝撃応答による振動特性推定法と工作機械構造への応用, 昭56, 11 機械学会東北支部, 仙台地方講演会