

# シェル構造の離散化極限解析 (その3) —平板剛体要素モデルによる有限変形解析—

Discrete Limit Analysis of Shell Structures (Part 3)  
— Finite Deformation Analysis by Using Flat Rigid Element Models —

都井 裕\*・川井 忠彦\*  
Yutaka TOI and Tadahiko KAWAI

## 1. 序

前報<sup>4)</sup>において誘導した任意形状を有する薄肉シェル構造の離散化極限解析用平板剛体要素モデルを、安定問題を含む有限変形問題に適用する場合の定式化を行う。本定式化は Lagrange 流の増分理論<sup>5)</sup>に基づく。

## 2. 有限変形問題における剛体変位関数

有限変形問題におけるひずみ—変位関係式は、直角座標  $(x, y, z)$  を用いると、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \partial u / \partial x + (1/2) \{ (\partial u / \partial x)^2 + (\partial v / \partial x)^2 + (\partial w / \partial x)^2 \} \\ \epsilon_y &= \partial v / \partial y + (1/2) \{ (\partial u / \partial y)^2 + (\partial v / \partial y)^2 + (\partial w / \partial y)^2 \} \\ \epsilon_z &= \partial w / \partial z + (1/2) \{ (\partial u / \partial z)^2 + (\partial v / \partial z)^2 + (\partial w / \partial z)^2 \} \\ \gamma_{xy} &= \partial u / \partial y + \partial v / \partial x + (\partial u / \partial x)(\partial u / \partial y) \\ &\quad + (\partial v / \partial x)(\partial v / \partial y) + (\partial w / \partial x)(\partial w / \partial y) \\ \gamma_{yz} &= \partial v / \partial z + \partial w / \partial y + (\partial u / \partial y)(\partial u / \partial z) \\ &\quad + (\partial v / \partial y)(\partial v / \partial z) + (\partial w / \partial y)(\partial w / \partial z) \\ \gamma_{zx} &= \partial w / \partial x + \partial u / \partial z + (\partial u / \partial z)(\partial u / \partial x) \\ &\quad + (\partial v / \partial z)(\partial v / \partial x) + (\partial w / \partial z)(\partial w / \partial x) \end{aligned} \quad (1)$$

いま、 $z = 0$  により中央面が定義される薄い平板を考える。すなわち、 $u, v$  が面内変位、 $w$  が面外変位を意味することになる。(1)式の各成分を零と置いて積分すると(1)式に対応する剛体変位関数が得られるが、その際、「薄肉」という条件より、以下の仮定を設ける。

- 仮定 1 :  $\epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  における非線形項を無視する。
- 仮定 2 :  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  においては、 $\partial w / \partial x, \partial w / \partial y$  に依存する非線形項のみ考慮し、他の非線形項を無視する。

仮定 2 は、von Karman による平板の有限変形理論において用いられている仮定の 1 つである<sup>5)</sup>。これらの仮定を考慮して(1)式の各成分を零と置くと、次式を得る。

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \partial u / \partial x + (1/2)(\partial w / \partial x)^2 = 0 \\ \epsilon_y &= \partial v / \partial y + (1/2)(\partial w / \partial y)^2 = 0 \\ \epsilon_z &= \partial w / \partial z = 0 \\ \gamma_{xy} &= \partial u / \partial y + \partial v / \partial x + (\partial w / \partial x)(\partial w / \partial y) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \partial v / \partial z + \partial w / \partial y = 0 \\ \gamma_{zx} &= \partial w / \partial x + \partial u / \partial z = 0 \end{aligned}$$

(2)式を積分すると、次の剛体変位関数を得る。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= a_2 z - a_3 y + a_4 \\ &\quad - (1/2) a_2^2 x + (1/2) a_1 a_2 y \\ v(x, y, z) &= a_3 x - a_1 z + a_5 \\ &\quad - (1/2) a_1^2 y + (1/2) a_1 a_2 z \\ w(x, y, z) &= a_1 y - a_2 x + a_6 \end{aligned} \quad (3)$$

(3)式は(2)式のひずみ成分を零とする剛体変位場であり、厳密なものではないが、通常の薄肉構造の最終強度解析にはこれで十分と予想される。また、簡略化された変位場であるため、次節に示す有限変形問題の定式化も容易となる。

## 3. 平板剛体要素モデルによる有限変形解析

代表的な隣接平板剛体要素を Fig.1 に示す。これらは要素境界において相対運動に抵抗するばね系により連結されている。以下では、前報を適宜参照しながら、(3)式の剛体変位関数を用いて有限変形問題に対する定式化を行う。

### 3.1 諸座標系の定義

定式化に必要な座標系は、Fig.1 に示されている全体座標系  $(x, y, z)$ 、要素座標系  $(x_A, y_A, z_A)$ 、 $(x_B, y_B, z_B)$ 、節点座標  $z_1, z_2, z_3, z_4$ 、要素境界座標系  $(x', y', z')$ 、

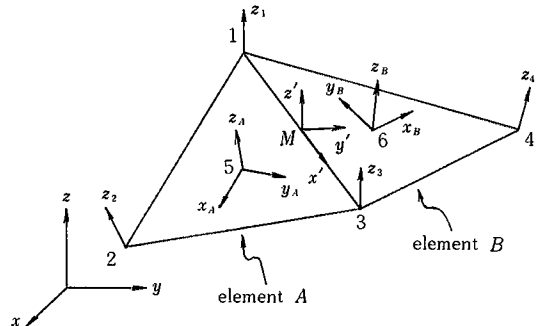


Fig.1 Two adjacent rigid elements

\* 東京大学生産技術研究所 第2部

$y', z'$  である。全体座標系以外の  $x, y$  軸は中央面に設定した面内座標,  $z$  軸は面外座標と考えればよいが, それぞれの座標系の明確な定義は前報の 2.1 節に説明されている。

3.2 要素境界の剛性特性

(i) 要素の剛体変位関数

各要素の剛体変位関数を要素座標表示すれば, おおの(3)式により表される。要素Aの剛体変位関数を

$$\begin{aligned} u_A &= a_2^A z_A - a_3^A y_A + a_4^A \\ &\quad - (1/2)(a_2^A)^2 x_A + (1/2)a_1^A a_2^A y_A \\ v_A &= a_4^A x_A - a_1^A z_A + a_5^A \\ &\quad - (1/2)(a_1^A)^2 y_A + (1/2)a_1^A a_2^A x_A \\ w_A &= a_1^A y_A - a_2^A x_A + a_6^A \end{aligned} \quad (4)$$

と記す。要素Bの剛体変位関数は, (4)式における添字AをBとして表す。

(ii) 要素自由度

面外せん断変形とねじり変形を無視することを前提として, 要素自由度としては, 節点(三角形頂点)に節点座標による横たわみの自由度( $w_i$ ), 要素座標原点(通常は要素重心点)に要素座標による面内変位の自由度( $u_i, v_i, \theta_i$ )を設定する。この場合の要素自由度と未知係数 $a_j^i, a_j^i (j=1, 2, \dots, 6)$ の関係式

$$\{a\} = [A]\{u\} \quad (5)$$

$$\{a\}^T = [a_1^A a_2^A \dots a_6^A a_1^B a_2^B \dots a_6^B]$$

$\{u\}^T = [w_1 w_2 w_3 w_4 (u_A)_5 (v_A)_5 (\theta_A)_5 (u_B)_6 (v_B)_6 (\theta_B)_6]$  として, 前報の(11)式および Table 2 がそのまま使えることは明らかであろう。

(iii) 相対変位

前報の微小変形問題の定式化においては, シェル中央面の並進および回転相対変位により相対運動を定義したが, 有限変形解析においては, 塑性安定問題などで肉厚方向の塑性域の進展過程を考慮する必要性を考慮して, 要素境界断面上の各点Pにおける並進変位成分のみを用いて要素間相対変位を定義する。すなわち,

$$\begin{aligned} \delta_x &= \{l_x^B (u_B)_P + m_x^B (v_B)_P\} - \{l_x^A (u_A)_P + m_x^A (v_A)_P\} \\ \delta_y &= \{l_y^B (u_B)_P + m_y^B (v_B)_P + n_y^B (w_B)_P\} \\ &\quad - \{l_y^A (u_A)_P + m_y^A (v_A)_P + n_y^A (w_A)_P\} \end{aligned} \quad (6)$$

ここに

$$\begin{aligned} l_x^A &= \vec{x} \cdot \vec{x}_A & m_x^A &= \vec{x} \cdot \vec{y}_A \\ l_x^B &= \vec{x} \cdot \vec{x}_B & m_x^B &= \vec{x} \cdot \vec{y}_B \\ l_y^A &= \vec{y} \cdot \vec{x}_A & m_y^A &= \vec{y} \cdot \vec{y}_A & n_y^A &= \vec{y} \cdot \vec{z}_A \\ l_y^B &= \vec{y} \cdot \vec{x}_B & m_y^B &= \vec{y} \cdot \vec{y}_B & n_y^B &= \vec{y} \cdot \vec{z}_B \end{aligned}$$

(6)式中の  $\delta_x, \delta_y$  はそれぞれ要素境界断面上の任意点Pにおける  $x'$  軸,  $y'$  軸方向の並進相対変位である。

(iv) 相対変位の増分

(6)式より, 非線形項まで含めた相対変位増分(記号\*により示す)は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \Delta \delta_x^* &= \{l_x^B (\Delta u_B)_P + m_x^B (\Delta v_B)_P\} - \{l_x^A (\Delta u_A)_P + m_x^A (\Delta v_A)_P\} \\ \Delta \delta_y^* &= \{l_y^B (\Delta u_B)_P + m_y^B (\Delta v_B)_P + n_y^B (\Delta w_B)_P\} \\ &\quad - \{l_y^A (\Delta u_A)_P + m_y^A (\Delta v_A)_P + n_y^A (\Delta w_A)_P\} \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式右辺の変位増分  $\Delta u_A, \Delta v_A, \Delta w_A$  は, (4)式より次のように計算される。

$$\begin{aligned} \Delta u_A &= u_A(a_1^A + \Delta a_1^A) - u_A(a_1^A) \\ &= z_A \Delta a_2^A - y_A \Delta a_3^A + \Delta a_4^A \\ &\quad - x_A a_2^A \Delta a_2^A + (1/2) y_A a_1^A \Delta a_2^A + (1/2) y_A a_2^A \Delta a_1^A \\ &\quad - (1/2) x_A (\Delta a_2^A)^2 + (1/2) y_A \Delta a_1^A \Delta a_2^A \\ \Delta v_A &= v_A(a_1^A + \Delta a_1^A) - v_A(a_1^A) \\ &= x_A \Delta a_3^A - z_A \Delta a_1^A + \Delta a_5^A \\ &\quad - y_A a_1^A \Delta a_1^A + (1/2) x_A a_1^A \Delta a_2^A + (1/2) x_A a_2^A \Delta a_1^A \\ &\quad - (1/2) y_A (\Delta a_1^A)^2 + (1/2) x_A \Delta a_1^A \Delta a_2^A \\ \Delta w_A &= w_A(a_1^A + \Delta a_1^A) - w_A(a_1^A) \\ &= y_A \Delta a_1^A - x_A \Delta a_2^A + \Delta a_6^A \end{aligned}$$

また, 変位増分  $\Delta u_B, \Delta v_B, \Delta w_B$  は, (8)式の添字AをBに置き換えたものである。これらを(7)式に代入して整理することにより, 次式を得る。

$$\begin{aligned} \{\Delta d^*\} &= \{\Delta d(\text{linear})\} + \{\overline{\Delta d}(\text{nonlinear})\} \\ &= [B]\{\Delta a\} + \{\overline{\Delta d}\} \end{aligned} \quad (9)$$

ここに

$$\begin{aligned} \{\Delta d^*\}^t &= [\Delta \delta_x^* \quad \Delta \delta_y^*] \\ \{\Delta d\}^t &= [\Delta \delta_x \quad \Delta \delta_y] \quad \{\overline{\Delta d}\}^t = [\overline{\Delta \delta}_x \quad \overline{\Delta \delta}_y] \end{aligned}$$

(9)式中の [B] マトリックスを Table 1 に示す。また, 非線形成分  $\overline{\Delta \delta}_x, \overline{\Delta \delta}_y$  はそれぞれ次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \overline{\Delta \delta}_x &= (1/2)\{l_x^B (x_B)_P (\Delta a_2^B)^2 - l_x^A (y_A)_P \Delta a_1^A \Delta a_2^A \\ &\quad + m_x^A (y_A)_P (\Delta a_1^A)^2 - m_x^A (x_A)_P \Delta a_1^A \Delta a_2^A\} \\ &\quad - (1/2)\{l_x^B (x_B)_P (\Delta a_2^B)^2 - l_x^B (y_B)_P \Delta a_1^B \Delta a_2^B \\ &\quad + m_x^B (y_B)_P (\Delta a_1^B)^2 - m_x^B (x_B)_P \Delta a_1^B \Delta a_2^B\} \\ \overline{\Delta \delta}_y &= (1/2)\{l_y^B (x_B)_P (\Delta a_2^B)^2 - l_y^A (y_A)_P \Delta a_1^A \Delta a_2^A \\ &\quad + m_y^A (y_A)_P (\Delta a_1^A)^2 - m_y^A (x_A)_P \Delta a_1^A \Delta a_2^A\} \\ &\quad - (1/2)\{l_y^B (x_B)_P (\Delta a_2^B)^2 - l_y^B (y_B)_P \Delta a_1^B \Delta a_2^B \\ &\quad + m_y^B (y_B)_P (\Delta a_1^B)^2 - m_y^B (x_B)_P \Delta a_1^B \Delta a_2^B\} \end{aligned} \quad (10)$$

(v) 応力

剛体要素A, Bは, 要素境界断面上の各点において, 相対変位成分  $\delta_x, \delta_y$  に抵抗するばね系により連結されているものとする。相対変位の増分にこれらのばね定数を乗ずることにより, 次のように要素境界断面上の各点における応力増分が計算される。

$$\{\Delta S\} = [D]\{\Delta d\} \quad (11)$$

ここに  $\{\Delta S\}^t = [\Delta \tau \quad \Delta \sigma]$

$$[D] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

Table 1 [B] matrix in Eq. (9) (where  $x_A=(x_A)_P$ , etc.)

	$a_1^A$	$a_2^A$	$a_3^A$	$a_4^A$	$a_5^A$	$a_6^A$
$\delta_x$	$m_x^A z_A + m_x^A a_1^A y_A$ $-\frac{1}{2} l_x^A a_2^A y_A - \frac{1}{2} m_x^A a_2^A x_A$	$-l_x^A z_A + l_x^A a_2^A x_A$ $-\frac{1}{2} l_x^A a_1^A y_A - \frac{1}{2} m_x^A a_1^A x_A$	$l_x^A y_A - m_x^A x_A$	$-l_x^A$	$-m_x^A$	0
$\delta_y$	$m_y^A z_A + m_y^A a_1^A y_A - n_y^A y_A$ $-\frac{1}{2} l_y^A a_2^A y_A - \frac{1}{2} m_y^A a_2^A x_A$	$-l_y^A z_A + l_y^A a_2^A x_A + n_y^A x_A$ $-\frac{1}{2} l_y^A a_1^A y_A - \frac{1}{2} m_y^A a_1^A x_A$	$l_y^A y_A - m_y^A x_A$	$-l_y^A$	$-m_y^A$	$-n_y^A$

	$a_1^B$	$a_2^B$	$a_3^B$	$a_4^B$	$a_5^B$	$a_6^B$
	$-m_x^B z_B - m_x^B a_1^B y_B$ $+\frac{1}{2} l_x^B a_2^B y_B + \frac{1}{2} m_x^B a_2^B x_B$	$l_x^B z_B - l_x^B a_2^B x_B$ $+\frac{1}{2} l_x^B a_1^B y_B + \frac{1}{2} m_x^B a_1^B x_B$	$-l_x^B y_B + m_x^B x_B$	$l_x^B$	$m_x^B$	0
	$-m_y^B z_B - m_y^B a_1^B y_B + n_y^B y_B$ $+\frac{1}{2} l_y^B a_2^B y_B + \frac{1}{2} m_y^B a_2^B x_B$	$l_y^B z_B - l_y^B a_2^B x_B - n_y^B x_B$ $+\frac{1}{2} l_y^B a_1^B y_B + \frac{1}{2} m_y^B a_1^B x_B$	$-l_y^B y_B + m_y^B x_B$	$l_y^B$	$m_y^B$	$n_y^B$

Table 2 [ $k_C$ ] matrix in Eq. (13) (where  $x_A=(x_A)_P$ , etc.)

(a) [ $k_C(\tau)$ ] matrix ( $\times \tau$ )

	$a_1^A$	$a_2^A$	$a_1^B$	$a_2^B$
$a_1^A$	$\frac{1}{2} m_x^A y_A$	$-\frac{1}{4} (l_x^A y_A + m_x^A x_A)$	0	0
$a_2^A$		$\frac{1}{2} l_x^A x_A$	0	0
$a_1^B$	<i>sym.</i>		$-\frac{1}{2} m_x^B y_B$	$\frac{1}{4} (l_x^B y_B + m_x^B x_B)$
$a_2^B$				$-\frac{1}{2} l_x^B x_B$

(b) [ $k_C(\sigma)$ ] matrix ( $\times \sigma$ )

	$a_1^A$	$a_2^A$	$a_1^B$	$a_2^B$
$a_1^A$	$\frac{1}{2} m_y^A y_A$	$-\frac{1}{4} (l_y^A y_A + m_y^A x_A)$	0	0
$a_2^A$		$\frac{1}{2} l_y^A x_A$	0	0
$a_1^B$	<i>sym.</i>		$-\frac{1}{2} m_y^B y_B$	$\frac{1}{4} (l_y^B y_B + m_y^B x_B)$
$a_2^B$				$-\frac{1}{2} l_y^B x_B$

(11)式中,  $\tau$  はせん断応力,  $\sigma$  は直応力を意味する.

(vi) 増分形剛性方程式

要素境界断面上の各点に対する増分形の仮想仕事式は次式のように表される.

$$\begin{aligned} & \Delta \tau \delta(\Delta \delta_x) + \Delta \sigma \delta(\Delta \delta_y) + \tau \delta(\Delta \delta_x) + \sigma \delta(\Delta \delta_y) \\ & = [\delta \Delta u] \{ \Delta f \} + ( [\delta \Delta u] \{ f \} - \tau \delta(\Delta \delta_x) - \sigma \delta(\Delta \delta_y) ) \end{aligned} \quad (12)$$

ここに, 左辺第1, 2項は応力増分, 第3, 4項は初期応力, 右辺第1項は外力増分, 第2項は前段階における不平衡力のなす仮想仕事を意味する. (9), (10), (11)式を(12)式に代入して整理すると, 次の増分形剛性方程式を得る.

$$([k] + [k_C]) \{ \Delta u \} = \{ \Delta f \} + \{ \Delta f_s \}$$

ここに

$$\begin{aligned} [k] &= [A]^t [B]^t [D] [B] [A] \\ [k_G] &= [A]^t ([k_G(\tau)] + [k_G(\sigma)]) [A] \\ \{f_r\} &= \{f\} - [A]^t [B] \{s\} \end{aligned} \quad (13)$$

初期応力マトリックス  $[k_G(\tau)]$  および  $[k_G(\sigma)]$  を Table 2 に示す.

(vii) 境界断面における剛性マトリックス

(13)式の剛性マトリックス  $[k]$  および  $[k_G]$  は要素境界断面上の任意点  $P$  における単位面積当たりの剛性マトリックスであり, これを積分することにより, 一境界断面全体の剛性マトリックスを得る. (13)式の  $[k]$  および  $[k_G]$  は要素座標  $((x_A)_P, (y_A)_P, (z_A)_P), ((x_B)_P, (y_B)_P, (z_B)_P)$  の関数として表されているが, 積分の便宜上これらを次のようにパラメータ表示する.

$$\begin{aligned} (x_A)_P &= h_1(s) \cdot (x_A)_1 + h_2(s) \cdot (x_A)_3 \\ (y_A)_P &= h_1(s) \cdot (y_A)_1 + h_2(s) \cdot (y_A)_3 \\ (x_B)_P &= h_1(s) \cdot (x_B)_1 + h_2(s) \cdot (x_B)_3 \\ (y_B)_P &= h_1(s) \cdot (y_B)_1 + h_2(s) \cdot (y_B)_3 \\ (z_A)_P &= (z_B)_P = (H/2) \cdot t \end{aligned} \quad (14)$$

ここに

$$h_1(s) = (l_{13} - s) / l_{13}, \quad h_2(s) = s / l_{13}$$

式中,  $l_{13}$  は要素境界辺 13 の長さ,  $H$  は肉厚である. このように表示すると,  $[k]$  および  $[k_G]$  は  $s, t$  の関数となり, 境界断面における積分領域は

$$-1 \leq s \leq 1, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (15)$$

と表示される. このとき, 境界線方向, 肉厚方向の積分点の数をそれぞれ  $M, N$  とすれば, 境界断面全体の接線剛性マトリックス  $[k_T]$  は次のように計算される.

$$[k_T] = l_{13} \cdot H \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w_{ij} ([k(s_i, t_j)] + [k_G(s_i, t_j)]) \quad (16)$$

ここに,  $w_{ij}$  は適当な重み係数である. なお, 不平衡力  $\{f_r\}$  の計算にも同様の数値積分が必要になる.

### 3.2 ばね定数

弾性変形時のばね定数  $k_{11}$  および  $k_{22}$  は前報の  $k_{px}$  および  $k_{py}$  を用いればよい. また, このとき  $k_{12} = k_{21} = 0$  である.

塑性変形時のばね定数は, 降伏条件式

$$\bar{\sigma} = f(\sigma, \tau) = \sigma_y \quad (17)$$

(ここに,  $\bar{\sigma}$  は相当応力,  $\sigma_y$  は単軸降伏応力) を用いた場合は,  $f(\sigma, \tau)$  を塑性ポテンシャルとして塑性流れ則より

$$\begin{aligned} k_{11} &= k_{px} - (k_{px})^2 (\partial f / \partial \sigma)^2 / S \\ k_{12} &= k_{21} = -k_{px} k_{py} (\partial f / \partial \tau) (\partial f / \partial \sigma) / S \\ k_{22} &= k_{py} - (k_{py})^2 (\partial f / \partial \tau)^2 / S \end{aligned} \quad (18)$$

ここに

$$S = H' + k_{px} (\partial f / \partial \tau)^2 + k_{py} (\partial f / \partial \sigma)^2$$

のように定まる ( $H'$  はひずみ硬化係数). 除荷の判定条件は次式により表される.

$$k_{px} (\partial f / \partial \tau) + k_{py} (\partial f / \partial \sigma) \leq 0 \quad (19)$$

### 4. 平板解析への応用

前節の定式化を平板の有限変形問題に適用する場合は, (5)式が非常に簡単化される. すなわち, 諸座標系の間に

$$z_A = z_B = z_i = z' \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (20)$$

なる関係が成立するので, 前報の Table 2 (a) は

$$\begin{aligned} a_1^A &= (x_{32} w_1 + x_{13} w_2 + x_{21} w_3) / 2A_A \\ a_2^A &= (y_{32} w_1 + y_{13} w_2 + y_{21} w_3) / 2A_A \\ a_3^A &= (\theta_A)_5, \quad a_4^A = (u_A)_5, \quad a_5^A = (v_A)_5 \\ a_6^A &= \{ (x_2 y_3 - x_3 y_2) w_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) w_2 \\ &\quad + (x_1 y_2 - x_2 y_1) w_3 \} \end{aligned} \quad (21)$$

ここに

$$\begin{aligned} x_i &= (x_A)_i, \quad y_i = (y_A)_i \\ x_{ij} &= x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j \end{aligned}$$

また Table 2 (b) は, (20)式における添字  $A$  を  $B$  に, 右辺の添字 1, 2, 3, 5 を 3, 4, 1, 6 に置き換えたものとなる. さらに, (6)式において

$$n_y^A = n_y^B = 0 \quad (22)$$

となる.

### 5. 結 語

平板剛体要素モデルによる任意形状シェルの有限変形解析法を述べた.

本定式化では, (16)式のように数値積分形で断面剛性を定義し, 断面力の概念を用いていないため, 肉厚方向の塑性域の進展過程および除荷過程を考慮した塑性安定問題の解析, 亀裂の進展過程を考慮した非線形解析, 任意の構成式による熱弾塑性クリープ解析などが可能である. また, 複合材料の極限解析にも適している. ただし, 短い計算時間で極限強度をより適確に評価することが離散化極限解析の主目的であり, 数値積分点の数は必要最少限に押さえることが望ましい.

本定式化を圧縮平板の塑性安定解析に適用した数値例は文献(7)に述べられており, 参照されたい.

(1981年8月27日受理)

### 参 考 文 献

- 4) 都井: シェル構造の離散化極限解析 (その2) - 平板剛体要素モデルの誘導 -, 生産研究, 第33巻, 第7号 (1981) 1~4
- 5) K. Washizu: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd Ed., Pergamon Press (1975)
- 6) Y. C. Fung: Foundations of Solid Mechanics, Prentice Hall (1965)
- 7) 都井: 平板の塑性座屈モデル, 東京大学工学部紀要(A), 第19号 (1981)