研究速報
UDC 624.131.5:539.215
539.214

変形を拘束された粒状体の破壊の塑性論的一考察

A Consideration on Failure Mechanism of Granular Material with Restrained Deformation by Theory of Plasticity

龍岡文夫*
Fumio TATSUOKA

1. まえがき

砂のような粒状体が破壊するとき，その境界で砂よりも変形しにくい物質に接していると，粒状体はその変形を拘束され，その拘束がないときよりも見掛け上，剛になったり，強くなったりする．実際上の問題としては，図1のような供試体を用いるとき，上下端に摩擦力があるために，供試体の強度を過大評価する問題や，これとは逆に，図2のように砂地盤に伸びにくい補強材を配置し，砂の変位を拘束し，支持力を増加する工法（補強土工法と呼ばれている）が考えられる．

自重と内部摩擦角のある粒状体の極限塑性応力状態については，山口[1]，Sokolovskii[2]がすでに解を与えている．すなわち，応力のつり合方程式および，極限応力状態を規定する破壊条件式から得られる特性微分方程式を積分し，すべり線網を作図すれば，極限状態における応力分布が求まることになる．しかし，この積分は任意の境界条件に対して簡単に行えるというわけではなく，場合によってはかなり煩雑となるようである．ここでは，図1の場合を対象として，特性微分方程式を近似的に簡易に積分して，ある拘束圧に対する崩壊荷重（最大軸荷重）についての解を得たので報告する．

2. 基礎方程式[1,2]

ここでは，自重の影響は小さいとして無視し，まず二次元応力状態を想定する．圧縮を正とすると，つり合い方程式は，図3を参照して，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}=0 \end{cases} \quad (1)$$

対象とする粒状体は，粘着係数がなく一定の内部摩擦角 ρ で，その破壊応力状態が表現できるとすれば（すなわち，Mohr-Coulomb の破壊基準が成り立つとすれば），全体が破壊状態にあるときは，図4を参照して，次式を得る．

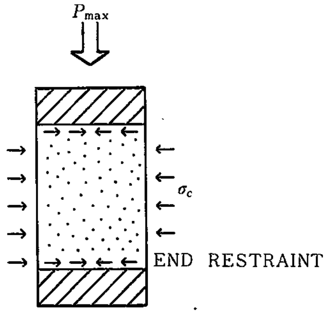


図1　砂の供試体での端面拘束効果

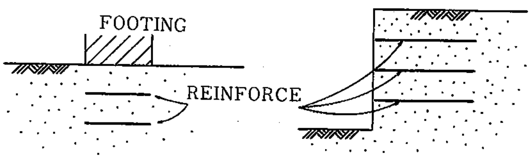
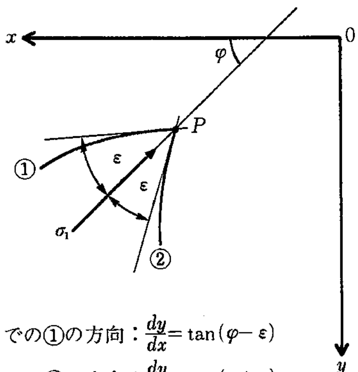


図2　実際の場合で砂の変形を拘束する工法（補強土工法）



$$\begin{cases} \text{点 } P \text{ での①の方向：} \dfrac{dy}{dx}=\tan(\varphi-\varepsilon) \\ \text{点 } P \text{ での②の方向：} \dfrac{dy}{dx}=\tan(\varphi+\varepsilon) \end{cases}$$

図3　φ と ε の定義

*東京大学生産技術研究所　第5部

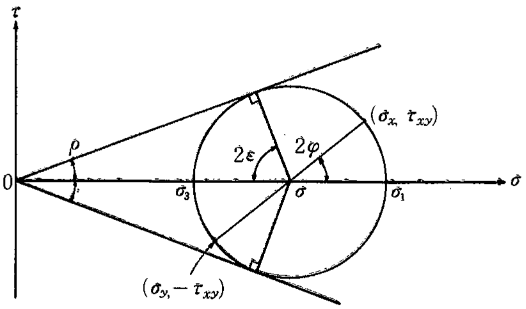


図4　Mohr－Coulomb の破壊基準

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\}=\sigma(1\pm\sin\rho\,\cos 2\varphi) \qquad (2)$$
$$\tau_{xy}=\sigma\sin\rho\sin 2\varphi$$

ここで，φ は図3を参照して，σ_1方向がx軸方向となす角度であり，σ は平均主応力$\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)$ である.（2）を（1）に代入すると，多少の計算の後，次式が得られる.

$$(1+\sin\rho\cos 2\varphi)\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\sin\rho\ \sin 2\varphi\frac{\partial\sigma}{\partial y}$$
$$-2\sigma\sin\rho\left(\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0 \quad (3\text{-}1)$$

$$\sin\rho\sin 2\varphi\frac{\partial\sigma}{\partial x}+(1-\sin\rho\ \cos 2\varphi)\frac{\partial\sigma}{\partial y}$$
$$+2\sigma\sin\rho\left(\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0 \quad (3\text{-}2)$$

ここで，すべり線の方向と σ_1 の方向のなす角

$$\varepsilon=\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}$$

を用いて，$\{(3-1)\times\sin(\varphi\pm\varepsilon)-(3-2)\times\cos(\varphi\pm\varepsilon)\}$ 計算をすると，

$$\left[\frac{\partial\sigma}{\partial x}\mp 2\sigma\tan\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\cos(\varphi\mp\varepsilon)$$
$$+\left[\frac{\partial\sigma}{\partial y}\mp 2\sigma\ \tan\rho\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\sin(\varphi\mp\varepsilon)=0 \quad (5)$$

が得られる．ここで，

$$\chi=\frac{\cot\rho}{2}\,ln\frac{\sigma}{k}\quad (k=\text{a constant}) \quad (6)$$

を置くと，（5）式は簡略化されて，

$$\frac{\partial}{\partial x}(\chi\mp\varphi)\cos(\varphi\mp\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial y}(\chi\mp\varphi)\sin(\varphi\mp\varepsilon)=0 \quad (7)$$

となる.（7）式は，

$$\frac{dy}{dx}=\tan(\varphi\mp\varepsilon) \qquad (8)$$

のとき，

$$d(\chi\mp\varphi)=0 \qquad (9)$$

であることを意味している．すなわち，（8）式は図3を参照して，すべり線の方向をあらわしていることから，すべり線に沿って

$$\chi\mp\varphi=一定 \qquad (10)$$

ということになる．以上を，まとめると，

「第1族のすべり線（その方向は，$dy/dx=\tan(\varphi-\varepsilon)$）に沿って，$(\chi-\varphi)$ は一定であり，第2族のすべり線（その方向は $dy/dx=\tan(\varphi+\varepsilon)$）に沿って，$(\chi+\varphi)$ は一定である.」

3. 特性微分方程式の積分例

いま，図5のように端面での摩擦角が一定で δ $(0\leq\delta\leq\rho)$ であるような剛な境界を介して圧縮されている粒状体の供試体の崩壊荷重（軸方向最大荷重）P_{max}を求める問題を考える．側面ACでは，一様な拘束圧 σ_c が面に直交して作用しているとすると，三角形ABC内の応力状態を求める問題はコーシーの問題となり，OB上の最大主応力 σ_1 は一義的に決まり，

$$\sigma_{1B}=\frac{1+\sin\rho}{1-\sin\rho}\sigma_c\ \text{（OB上で一定）} \qquad (11)$$

さらに，BD上の σ_1 が求まれば，力のつり合いから，w を幅として，

$$P_{max}=2w\int_0^{b/2}\sigma_1 dy \qquad (12)$$

からP_{max} の値は求まる．BD上の σ_1 は次のような方法で近似的に求まる．BD上の一点 a を通過する第1族のすべり線を図6に示すように ab，b を通過する第2族のすべり線を bc とする.

点 a で，$\chi=\chi_a$，$\varphi=\varphi_a=0$
点 b で，$\chi=\chi_b$，$\varphi=\varphi_b=\delta$
点 c で，$\chi=\chi_c$，$\varphi=\varphi_c=0$

という条件を，

$$\chi_a-\varphi_a=\chi_b-\varphi_b,\ \chi_b+\varphi_b=\chi_c+\varphi_c \qquad (13)$$

に代入すると，

$$\chi_c-\chi_a=2\delta \qquad (14)$$

一方，a，b，c の (x, y) 座標；$(x_a=0, y_a)$，$(x_b=-h/2, y_b)$，$(x_c=0, y_c)$を，（8）式を差分化した次式

$$\left.\begin{aligned} y_a-y_b&=(x_a-x_b)\tan\left(\frac{\varphi_a+\varphi_b}{2}-\varepsilon\right)\\ y_c-y_b&=(x_c-x_b)\tan\left(\frac{\varphi_b+\varphi_c}{2}+\varepsilon\right)\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

の各々の式に代入して，両式の差をとると，次式を得る.

$$y_c-y_a=\frac{h}{2}\left\{\tan\left(\frac{\delta}{2}+\varepsilon\right)-\tan\left(\frac{\delta}{2}-\varepsilon\right)\right\} \qquad (16)$$

ここで，近似式

$$\frac{d\chi}{dy}=\frac{\chi_c-\chi_a}{y_c-y_a} \qquad (17)$$

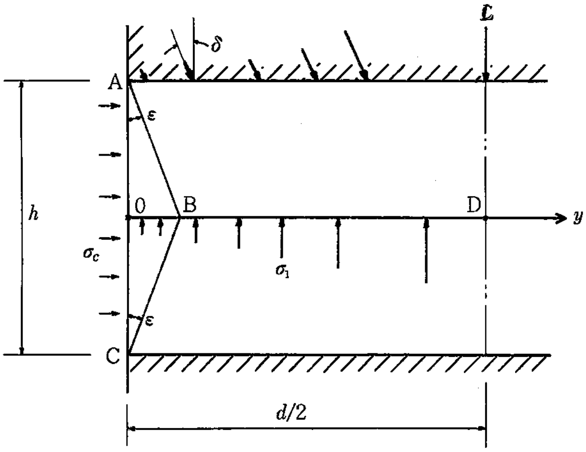


図5　2次元応力問題例
（注　AB，CD もすべり線の一部である）

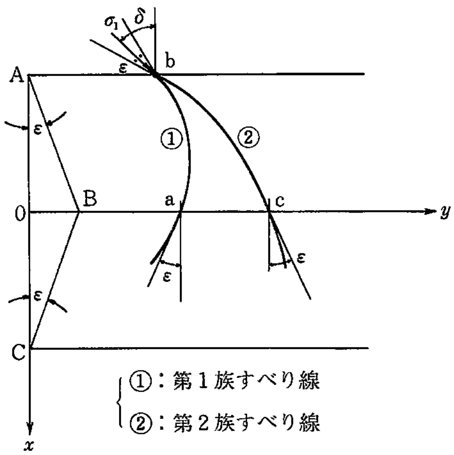


図6　すべり線の作図

が成り立つとすれば，多少の計算の後，

$$\frac{d\chi}{dy}=\frac{2\delta}{h}\ \frac{\cos\delta+\sin\rho}{\cos\rho}=A \tag{18}$$

が得られる．(18) 式から，y によらないパラメーター A を用いて，

$$\chi=\chi_B+A(y-y_B) \tag{19}$$

が得られる．y_B はB点の y 座標，χ_B はB点での χ の値であり，

$$y_B=\frac{h}{2}\tan\varepsilon,\ \chi_B=\frac{10\ t\rho}{2}\ \ln\left\{(\sigma_1)_B/k\right\} \tag{20}$$

である．点BD上の点（座標 $(0,\ y)$）での σ_1 の値は，(6)，(19)，(20) 式から

$$\begin{aligned}\sigma_1&=\sigma\,(1+\sin\rho)\\&=k\exp(\chi\cdot 2\tan\rho)\,(1+\sin\rho)\\&=k\,(1+\sin\rho)\exp(\chi_B\cdot 2\tan\rho)\cdot\\&\qquad\exp\{A\,(y-y_B)\cdot 2\tan\rho\}\\&=\sigma_{1B}\exp\{A\,(y-y_B)\cdot 2\tan\rho\}\end{aligned} \tag{21}$$

したがって，(12) 式は，

$$P_{\max}=2w\left[(\sigma_{1B}\cdot y_B)+\int_{y_B}^{d/2}\sigma_1 dy\right] \tag{22}$$

となる．ここで，

$$B=2\delta\left(\frac{\cos\delta+\sin\rho}{\cos\rho}\right)\tan\rho\left(\frac{d}{h}-\tan\varepsilon\right) \tag{23}$$

$$\left(\text{ただし，}\ \varepsilon=\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)$$

と置いて，(22) 式の積分をすると多少の計算の後，次式を得る．

$$P_1=\frac{\exp(B)-1}{B}-1 \tag{24}$$

ただし，P_1 は変形の拘束による崩壊荷重の増加分を正規化したともいうべきパラメーターで，

$$P_1=\frac{P_{\max}/\{P_{\max}\}_{\delta=0}-1}{1-\dfrac{h}{d}\ \tan\varepsilon} \tag{25}$$

である．$\{P_{\max}\}_{\delta=0}$ は，$\delta=0$ のときの崩壊荷重で

$$\{P_{\max}\}_{\delta=0}=wd\,\frac{1+\sin\rho}{1-\sin\rho}\,\sigma_c \tag{26}$$

である．(25) 式の分母は，図5，図6においてBDの長さの $d/2$ に対しての比である．注意すべきことは，(24)式は，

$$d>h\ \tan\varepsilon \tag{27}$$

に対して成り立つということである．これは，(24) 式を導いた過程から明らかであり，$d\leqq h\ \tan\varepsilon$ のときは，

$$P_1=0 \tag{28}$$

である．同様に，(23) 式から $\delta=0$ のときは，$B=0$ になり，このときも (28) 式が成り立つ．図7に P_1 と B の関係を示す．

d/h，ρ，δ が与えられたとき，(24) 式または図7から P_1 が求まり，(25)，(26) 式から，$P_{\max}$ を求めることができる．また，(23) 式から，同一の δ，ρ，d に対して h が小さいほど B が大きく，したがって，P_1 あるいは $P_{\max}$ が大きくなることがわかる．これらのことは，図1，2に示すような問題を解析するときに参考になるものと思われる．

次に，図8に示すような端面の拘束がある軸対称円筒供試体の場合を考えよう．この場合も端面で一定の摩擦角 $\delta\ (0\leqq\delta\leqq\rho)$ が発揮されていて，粒状体全体が塑性状態にあるとする．このとき内部摩擦 ρ は，平面ひずみあるいは三軸圧縮の場合とは一般に異なるので注意を要する．このとき，円周方向の応力は σ_2 であり，軸を含む断面に対して，図5，6の状況が成り立っているとすれば，崩壊荷重（最大軸方向荷重）$P_{\max}$ は，1/2 高さ上の鉛直応

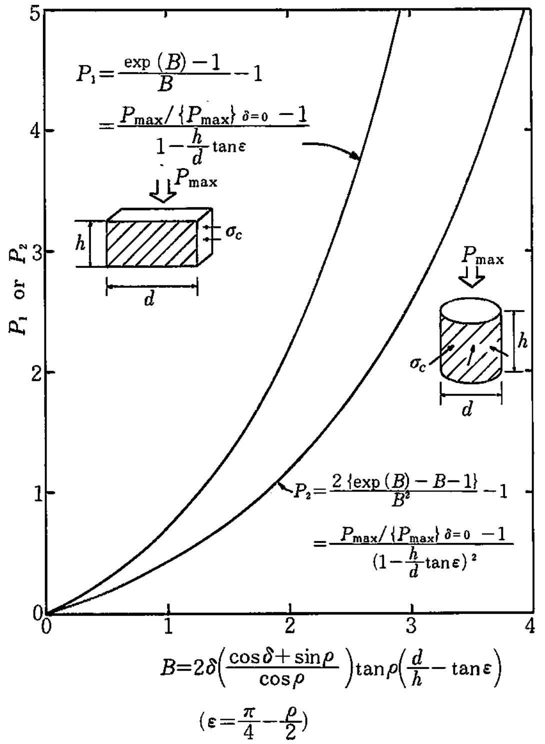


図7　端面の拘束効果を表す関係

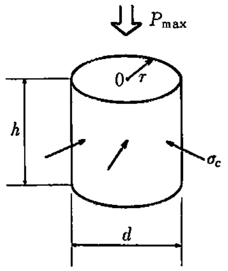


図8　円筒の場合の問題例

力，すなわち最大主応力 σ_1 を

$$P_{max}=\int_0^{d/2}\sigma_1\,2\pi r dr$$

$$=\int_0^{\frac{d}{2}-\frac{h}{2}\tan\varepsilon}\sigma_1\,2\pi r dr+\sigma_{1B}\int_{\frac{d}{2}-\frac{h}{2}\tan\varepsilon}^{\frac{d}{2}}2\pi r dr \qquad (29)$$

のようにして積分することによって求まる．(29) 式での σ_1 は(21) 式から，σ_{1B} は，(11) 式から求まる．この積分を実際に行うと，

$$P_2=\frac{2\{\exp(B)-B-1\}}{B^2}-1 \qquad (30)$$

となる．ただし，B は (23) 式で与えられ，また，

$$P_2=\frac{P_{max}/\{P_{max}\}_{\delta=0}-1}{\left(1-\frac{h}{d}\tan\varepsilon\right)^2} \qquad (31)$$

である．P_2 と B の関係も図7に示してある．この場合も，$d\leqq h\tan\varepsilon$，$\delta=0$ のときは，$P_2=0$ であり，$P_{max}=\{P_{max}\}_{\delta=0}$ ((26) 式) である．また，図7から分かることは，同一の B の値に対して，平面ひずみ，あるいは長方形供試体の場合の方が，円型供試体の場合よりも端面拘束の効果が大きいことである．これは (21)式を見てもわかるように，σ_1 は端面から供試体中心に向かうにつれて大きくなり，円型供試体では，σ_1 の大きい部分が，相対的に狭くなってゆくからである．

例題として，$d=7$ cm，$h=3$ cm，$\rho=45°$ $(\pi/4)$ の円筒供試体の場合で計算する．$\sigma_3=\sigma_c$ として，見かけ上の平均最大主応力 $\sigma_{1\,max}=P_{max}/(\frac{\pi}{4}d^2)$ を σ_3 で除した値を求めると，

$$(\sigma_1/\sigma_3)_{max}=\begin{cases}5.83 & (\delta=0)\\ 15.0 & (\delta=\rho)\end{cases}$$

となり，端面拘束の効果は非常に大きいことを示している．

4. ま　と　め

塑性論を用いて，変形を拘束された粒状体の強度についての一近似解法について考察した結果を示した．今後は，この解析結果を実験的に検証するとともに，より一般的な境界条件について考察を広めてみる予定である．

謝　辞

大学院学生高野公寿，金藤浩司両氏との討論が，大変参考になった．末筆ながら感謝の意を表します．

(1981年7月29日受理)

参 考 文 献

1) 山口柏樹，" 土の塑性力学 " 最上武雄編土質力学第7章，技報堂土木工学叢書，1969
2) Skolovskii, V. V. : Statics of Granular Media, Pergamon Press, 1965 (Translated from Russian).