特 集 2　　UDC 620.168.3.001.57:517.13

新離散化モデルによる複合材料の一極限解析（続）
—マクロとミクロを繋ぐ試み—

Limit Analysis of Composite Materials by Means of the New Discrete Models
— An Attempt to Bridge the Macroscopic and Microscopic Worlds —

川 井 忠 彦*
Tadahiko KAWAI

一般に固体は非常に沢山の粒子からなる複合材料であり，有限要素法的に考えるとマルテイレベルのサブストラクテアで表される．したがってその最終強度を評価するにはマクロの立場（連続体仮設）に立つ全体解析とミクロの立場（粒子性考慮）に立つ解析を巧みにリンクして行う外には手がない．そのミクロの解析においては辷り（slip）が卓越するので剛体―バネモデルの恰好の応用問題となっている

1. 剛体－バネモデルによる極限解析解の精度保障

昨年度の研究成果報告の中で，剛体－バネモデルによる極限解析解の精度を保障することが，この手法の実用化に対する今後の課題であることを述べたが，この一年間の研究によって，ほぼその精度保障の道が開けてきたと思われるので，まずその概要を記す．

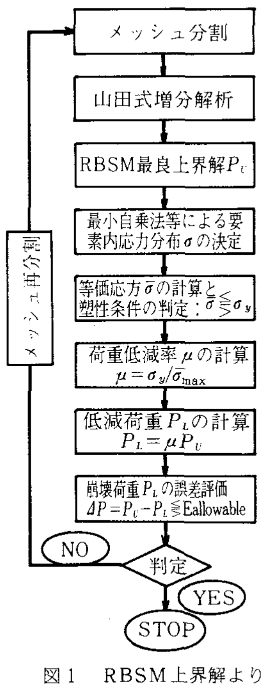
剛体－バネモデルを用い，有限要素法において標準化されている山田教授の提案した増分解析を行ってゆくと与えられたメッシュ分割に対する最良上界解（the best upper bound solution）が求められる．その理論的証明は最近近藤や竹内によって与えられている．しかしながら，これだけでは極限解析解の上界が求められるということが判っただけで，真の解とどのくらい離れているかを知るためにはどうしても同じ問題に対する下界解(the lower bound solution)を求めて真の解を上，下から挟み打ちにする必要がある．この目的のため著者と竹内は剛体－バネモデルによる上界解から下界の近似解を求める実用的計算法を考え出した．すなわちまず手軽に求められる上記の剛体－バネモデルによる最良上界解から，各要素内の応力分布を最小自乗法などを用いて近似的に求め，その応力分布から塑性学でいう換算応力（equivalent stress）$\bar{\sigma}$ を計算し，その絶対値の最大のものを見出し $\bar{\sigma}_{\max}$ として次の荷重低減率 μ を計算する．

$$\mu=\frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}_{\max}} \tag{1}$$

そして初めに求めておいた最良上界解 P_U にこれを掛けて次の荷重を計算する．

$$P_L=\mu P_U \tag{2}$$

そうすると図1に示すように P_L は平衡条件，塑性条件は満たすが運動機構条件は一般に満足し得ない解となる



極限荷重	P_U	P_L
運動機構条件	OK	?
平衡条件	OK	OK
塑性条件	?	OK

∴ $\boxed{P_L \leqq P_C \leqq P_U}$
（P_Cは真の崩壊荷重）

図1　RBSM上界解より下界解の導出と極限解析解の精度保障

から P_L は下界解の近似解を与えると結論される．したがって厳密な数学的な証明はできないが，真の解 P_C は P_L と P_U の間にあると大体言えそうである．

$$P_L \leqq P_C \leqq P_U \quad (P_C \text{は真の崩壊荷重}) \tag{3}$$

このようにして上下界の開き $\Delta P=P_U-P_L$ が許容誤差の範囲内になければ，メッシュ分割を修正し，再び同じ計算を繰り返して P_C の許容近似解を求めてゆくのである．この方法は計算機による自動化が不可能でないと思われるが，計算時間を食うと思われるので前に述べた μ の値の分布から解析者がメッシュを試行錯誤的に手直し

* 東京大学生産技術研究所　第2部

てゆく方法がおそらく実用的なものとなろう．なおこの下界近似解を求めて P_C を上，下から挟み打ちにする方法については本誌第33巻 第2号の研究速報欄に詳しく報告してあるので興味のある方々は参照していただきたい．

ここではその後この手法を用いて解析した両側切欠平板の引張りおよび集中荷重や一様分布荷重を受ける矩形平板の曲げ崩壊解析の結果を簡単に紹介する．

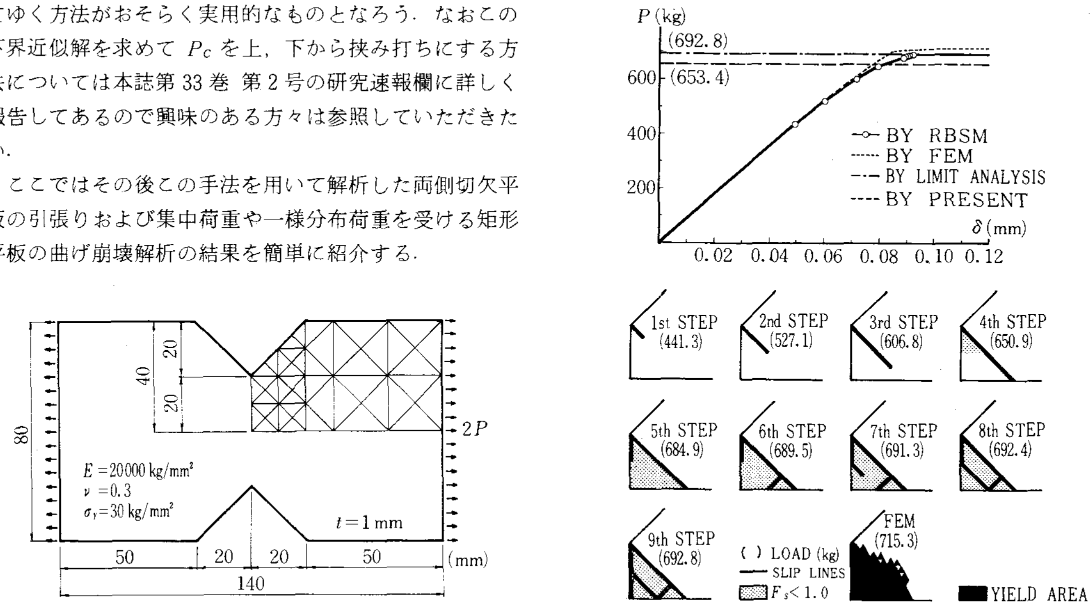
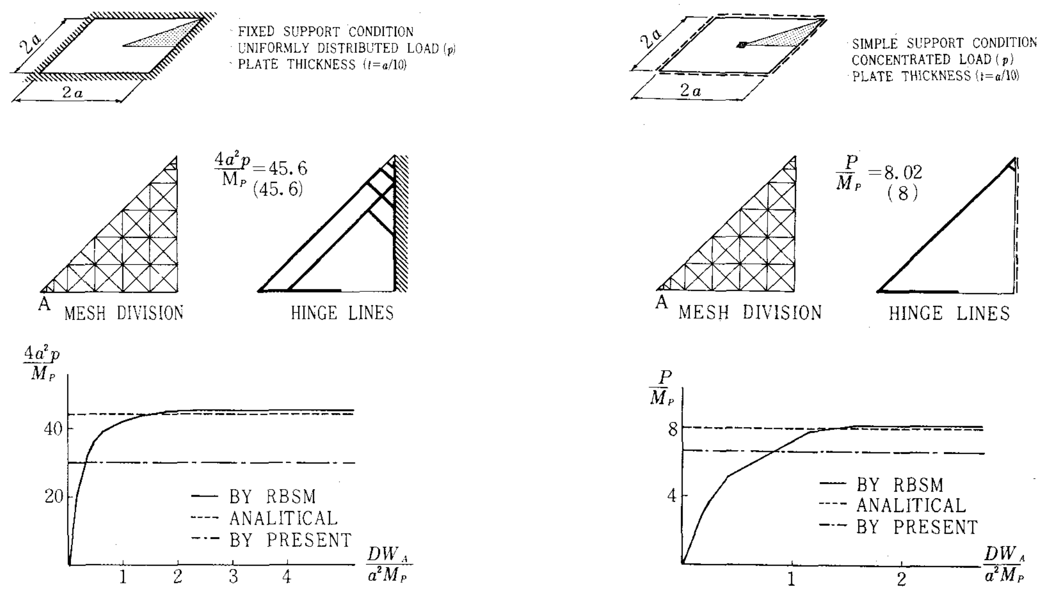


図2　両側切欠を有する矩形板の引張り極限解析



(a)　一様分布荷重を受ける周辺固定正方形板　　(b)　中央集中荷重を受ける周辺単純支持正方形板

図3　横荷重を受ける正方形の曲げ崩壊解析例

図2には両側切欠平板の引張り荷重に対する極限解析の結果を要約したもので，1/4領域のメッシュ分割，RBSMによる上界解の各荷重ステップにおけるこり線の発生，生長状況と要素内降伏領域（下界近似解析による）と各種解析法による荷重－挠み曲線等が示されている．この結果から有限要素法による解は一般に理論極限荷重より高目の値を与えるが，RBSM解は理論解と一致し，また，その近似下界解は予想どおり理論値より低目の値を与えていることがわかるであろう．図3(a)は周辺支持正方形板の中心点に集中荷重を受ける場合または図3(b)は周辺固定正方形板が一様分布荷重を受ける場合の曲げ崩壊解析の結果を表す．いずれの場合もその崩壊荷重の上界と近似下界値の間に理論解が挟まれており期待どおりの結果となっているが，下界近似解の精度が集中荷重を受ける単純支持正方形板の場合は，それほど悪くはないが，一様分布荷重周辺固定正方形板の場合は精度

が悪く，このままでは十分と言えない．これは，おそらく応力集中の起こっている板の中央点と四隅の頂点近傍におけるメッシュ分割が粗（また方向もよくないため）であると思われる．いずれにしてもRBSMによる増分解から近似下界解を求め，真の解を上，下から挟み打ちにする計算方法はほぼ妥当であることが立証されたと思われるので，今後はもっぱらたくさんの実証例を集積してゆきたいと考える．

2. 複合材料構造物の極限解析[4),5),6)]

一般に固体は非常にたくさんの粒子の集合体であることは議論の余地のないところである．このような意味においてあらゆる物質は複合材料であり，したがって，その強度はその材料を構成する要素そのものの強度と要素間の強度に支配されることになる．ところが弾性学や塑性学で代表される固体力学の立場は要素群の平均的挙動を追跡する力学であるため，要素間で変位や応力の連続性を要求することになって要素間強度という考え方は一般に消滅してしまうのである．このように複合材料はマクロの力学的挙動とミクロの力学的挙動の二面性を有することを考えてその変形や応力解析を合理的に行うには図4に示すようにマクロの立場（連続体仮説）に基づく構造の全体解析を増分法により行い，その結果得られる要素境界力を入力としてミクロの立場（物質の粒子性を考慮）に基づく局部解析を行う．そして，その結果をマクロの全体解析にフィードバックし，局部剛性したがって全体剛性を増分的に修正しながら解析してゆく必要があろう．要するに複合材料からできている構造物の解析においては，材料の構成要素間の強度，つまりこり（slip）や摩擦接触あるいは亀裂発生等による要素間強度の影響が載荷の進行に伴って顕著に現れてくるから，その局部解析を行ってマクロの剛性分布を修正しながら変形や応力解析を行ってゆかねばならないのである．そして問題解析の要求精度に応じて何段階のサブストラクチャー解析が必要であるかが決まり，高精度の解析には莫大な計算時間が必要となってくる．著者は工学的観点からすると，たかだか一段階のサブストラクチャー解析で設計資料を得るように努力してゆくのが実用的であると思っている．さて剛体-バネモデルによる複合材料構造の応力解析について議論するに当たって，まずその応用の目的を明確にしておく必要がある．もし問題が弾性解析ないしは塑性変形量が微小な非弾性解析の範囲内ならば，もうすでに手法としてその実用化が完成されている有限要素法を用いればよい.[2)] いま，ここで問題にしているのは複合材料構造の極限強度である．この問題の解析は前にも述べたように連続体仮説に基づく有限要素法の適用範囲を越えた問題で，ここに剛体-バネモデルによる極限解析の意義があると考えるのである．

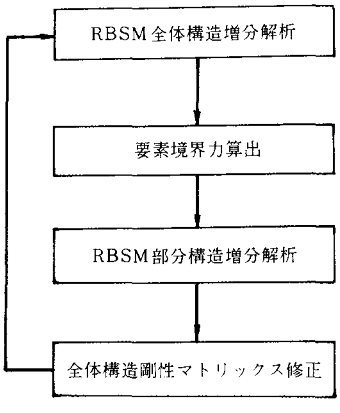


図4　複合材料構造物のRBSM極限解析の流れ図

さて剛体-バネモデルによる複合材料構造全体の極限解析を行うには同じ材料でできている梁・平板・曲面板あるいは四面体等のRBSM要素を開発する必要がある．

この目的のためには3次元RBSM要素に対する剛性マトリックスの一般計算公式

$$\boldsymbol{K}=\iint_S \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}dS \qquad (4)$$

ここに $\boldsymbol{B}$ は剛体要素の重心変位ベクトル $\boldsymbol{u}=\lfloor u_i, v_i, w_i, \theta_i, \phi_i, \chi_i \rfloor^T (i=1,2)$ と要素境界面上の同一点の変形後の相対変位ベクトル $\boldsymbol{\delta}=\lfloor \delta_x, \delta_y, \delta_z \rfloor^T$ を結びつける（3×12）の矩形マトリックス，$\boldsymbol{D}$ は要素境界上に分布していると仮定する法線バネ k_n と剪断バネ k_s と境界面上の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}=\lfloor l,m,n \rfloor^T$ より作られる（3×3）のいわゆる応力-歪みマトリックスである．（4）式を用いて複合材料でできている各種要素の剛性マトリックスの具体的計算公式を導く際一番問題になるのは，この応力-歪みマトリックス $\boldsymbol{D}$ である.[3)]

目下均質ではあるが一般的な異方性材料であると仮定した場合，境界バネの常数をどのように定義してゆくのが合理的か，もっと具体的には従来の k_n，k_s の計算式をどのように修正し，一般化してゆくのが適当であるか研究中である．現在のところ，いまだ結論が得られていないので複合材料でできた梁の曲げ要素について簡単な考察をした結果を紹介するのにとどめたい．さて梁の曲げ変形に対するRBSM要素は次式のごとく与えられる．（図5参照）

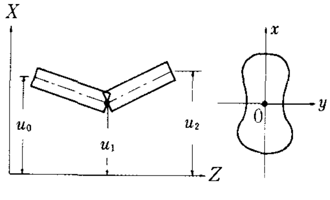


図5　梁の曲げ変形に対する剛体バネ要素

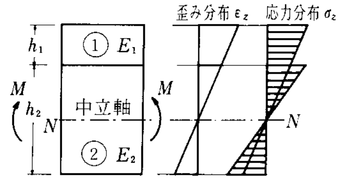
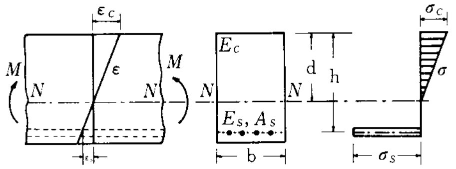


図6　2種類の材料からなる組み合わせ梁の曲げ



E_c, E_s：コンクリートおよび鉄筋の弾性定数
A_s：鉄筋の総断面積

図7　鉄筋コンクリート矩形断面梁の曲げ

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1^2} & -\frac{1}{l_1}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) & \frac{1}{l_1 l_2} \\ & \left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)^2 & -\frac{1}{l_2}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) \\ \mathrm{SYM} & & \frac{1}{l_2^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

ここに　$K=\frac{2}{l_1+l_2}\iint E(x,y)x^2dxdy$　　(6)

いま材料が等方性弾性体であるとすれば

$$K=\frac{2EI}{l_1+l_2}\left(I=\iint x^2dxdy\right)$$

となり，これが従来よく用いられてきた結果である．そこで（6）式を用いて2種類の異なる材料を組み合わせて作られた組み合わせ梁（composite beam）や鉄筋コンクリート梁の場合を以下に検討してみることにする．

（i）　組み合わせ梁

図6に示すように2種類の材料（1），（2）を組み合わせて作られた幅 b，深さ h の矩形断面積の場合には（6）式より

$$K=\frac{2}{l_1+l_2}(E_1I_1+E_2I_2) \qquad (7)$$

となる．

ここに I_i $(i=1,2)$ は中立軸まわりの材料（1）および（2）の部分の断面慣性モーメントである．これはよく知られた組み合わせ梁の初等的理論の結果である．

（ii）　鉄筋コンクリート梁

図7は矩形断面の鉄筋コンクリート梁を示したものである．簡単のために鉄筋は梁の上面（圧縮側）から h の距離に一列に配置されているものとし，梁の断面の幅を b とすると鉄筋コンクリート梁の初等的理論から梁の中立軸の位置を梁上面から d の深さであるとすれば，次式のごとく与えられる．

$$d=h\left(-\lambda\mu+\sqrt{\lambda\mu(\lambda\mu+2)}\right) \qquad (8)$$

ここに $\lambda=\frac{A_s}{bh}$（A_s は鉄筋の総断面積）で鉄筋コンクリート梁の断面中鉄筋の断面積が占める割合を示す量であり，また $\mu=\frac{E_s}{E_c}$ は鉄筋とコンクリートの弾性係数の比であって，ともに無次元量である．したがって梁の節点をこの中立面上にとれば（5）式の公式がそのまま適用できることになる．すなわちこの場合

$$K=\frac{2}{l_1+l_2}\left[b\int_0^d E_cx^2dx+E_sA_s(h-d)^2\right]$$

$$=\frac{2}{l_1+l_2}\left[\frac{E_cbd^3}{3}+E_sA_s(h-d)^2\right] \qquad (9)$$

となる．一般に以上の理論を拡張して多層組み合わせ梁やサンドウィッチ板の剛性マトリックスを導くことは可能であるが，それらは，あくまで梁や平板が一体として弾性変形する場合の話であって，すでに有限要素法その他の方法でも詳細な研究がなされている．したがって今後の課題はこれらの要素を用いて複合材料構造の極限解析を行う道を切り開くことであろう．

（1981年3月11日受理）

参　考　文　献

1）竹内則雄，川井忠彦：新離散化極限解析法の誤差評価に関する一方法について，生産研究，33巻2号（1981）
2）川井忠彦編　物理モデルによる連続体力学諸問題の解析（第3回）生研セミナーテキスト　コース57（1980年10月）
3）山田嘉昭，山本昌孝：有限要素法による詳細解析と汎用プログラム，第19回 生研講習会テキスト　複合材料――東京大学生産技術研究所における研究を中心として――（1979年12月）
4）林毅編：複合材料工学，日科技連（1971）
5）藤井太一，座古勝共著：複合材料の破壊と力学，実教出版（株）（1978）
6）F. W. Wendt, H. Liebowitz and N. Perrone : Mechanics of Composite Materials, Pergamon Press（1970）