

シェル構造の離散化極限解析 (その1)

—曲面剛体要素モデルの誘導—

Discrete Limit Analysis of Shell Structures (Part 1)
— Derivation of Curved Rigid Element Models —

都井 裕*
Yutaka TOI

1. 序

直交曲線座標系における座標曲面として定義される薄肉シェル構造の離散化極限解析用曲面剛体要素モデルを一般的に誘導する。この離散化モデルの物理的概念は、すでに川井により提案されている平板曲げ問題および平面問題の極限解析用剛体・ばねモデル^{1),2)}に基づく。

2. 直交曲線座標系における剛体変位関数

直角座標系 (x, y, z) における微小ひずみを零と置くことにより、次式を得る (Fig.1を参照)。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \partial u / \partial x = 0 \\ \epsilon_y &= \partial v / \partial y = 0 \\ \epsilon_z &= \partial w / \partial z = 0 \\ \gamma_{xy} &= \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = 0 \\ \gamma_{yz} &= \partial v / \partial z + \partial w / \partial y = 0 \\ \gamma_{zx} &= \partial w / \partial x + \partial u / \partial z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(1)式を積分することにより、直角座標系 (x, y, z) における剛体変位関数

$$\left. \begin{aligned} u &= a_2 z - a_3 y + a_4 \\ v &= a_3 x - a_1 z + a_5 \\ w &= a_1 y - a_2 x + a_6 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

を得る。ここに、 a_1, a_2, a_3 は x, y, z 軸まわりの回転変位、 a_4, a_5, a_6 は x, y, z 軸方向の並進変位である。

直角座標系 (x, y, z) と

$$x = x(x', y', z'), \quad y = y(x', y', z'), \quad z = z(x', y', z') \quad (3)$$

なる関係にある任意の直交曲線座標系 (x', y', z') を考える。(2)式にベクトル成分の変換公式を適用することにより、直交曲線座標系 (x', y', z') における剛体変位関数

$$\left. \begin{aligned} u' &= (1/g_1) \{ (\partial x / \partial x') u + (\partial y / \partial x') v + (\partial z / \partial x') w \} \\ v' &= (1/g_2) \{ (\partial x / \partial y') u + (\partial y / \partial y') v + (\partial z / \partial y') w \} \\ w' &= (1/g_3) \{ (\partial x / \partial z') u + (\partial y / \partial z') v + (\partial z / \partial z') w \} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

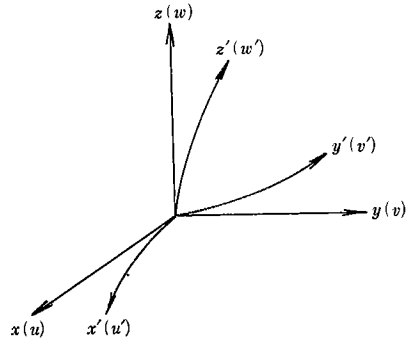


Fig. 1 Coordinates and displacements

を得る。ここに、 g_1, g_2, g_3 は直交曲線座標系 (x', y', z') の第1基本量であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \{ (\partial x / \partial x')^2 + (\partial y / \partial x')^2 + (\partial z / \partial x')^2 \}^{1/2} \\ g_2 &= \{ (\partial x / \partial y')^2 + (\partial y / \partial y')^2 + (\partial z / \partial y')^2 \}^{1/2} \\ g_3 &= \{ (\partial x / \partial z')^2 + (\partial y / \partial z')^2 + (\partial z / \partial z')^2 \}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(2), (3)式を(4)式に代入することにより、

$$\left. \begin{aligned} u'(x', y', z') &= h_{1j}(x', y', z') a_j \\ v'(x', y', z') &= h_{2j}(x', y', z') a_j \\ w'(x', y', z') &= h_{3j}(x', y', z') a_j \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

を得る (右辺は総和規約に従い、 $j=1, 2, \dots, 6$ である。以下同様)。

ここに、

$$\left. \begin{aligned} h_{11} &= (1/g_1) \{ (\partial z / \partial x') y - (\partial y / \partial x') z \} \\ h_{12} &= (1/g_1) \{ (\partial x / \partial x') z - (\partial z / \partial x') x \} \\ h_{13} &= (1/g_1) \{ (\partial y / \partial x') x - (\partial x / \partial x') y \} \\ h_{14} &= (1/g_1) (\partial x / \partial x') \\ h_{15} &= (1/g_1) (\partial y / \partial x') \\ h_{16} &= (1/g_1) (\partial z / \partial x') \\ h_{21} &= (1/g_2) \{ (\partial z / \partial y') y - (\partial y / \partial y') z \} \\ h_{22} &= (1/g_2) \{ (\partial x / \partial y') z - (\partial z / \partial y') x \} \\ h_{23} &= (1/g_2) \{ (\partial y / \partial y') x - (\partial x / \partial y') y \} \\ h_{24} &= (1/g_2) (\partial x / \partial y') \\ h_{25} &= (1/g_2) (\partial y / \partial y') \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

* 東京大学生産技術研究所 第2部

$$\begin{aligned} h_{26} &= (1/g_2)(\partial z/\partial y') \\ h_{31} &= (1/g_3)\{(\partial z/\partial z')y - (\partial y/\partial z')z\} \\ h_{32} &= (1/g_3)\{(\partial x/\partial z')z - (\partial z/\partial z')x\} \\ h_{33} &= (1/g_3)\{(\partial y/\partial z')x - (\partial x/\partial z')y\} \\ h_{34} &= (1/g_3)(\partial x/\partial z') \\ h_{35} &= (1/g_3)(\partial y/\partial z') \\ h_{36} &= (1/g_3)(\partial z/\partial z') \end{aligned}$$

である。(6),(7)式により、未知係数 a_1, a_2, \dots, a_6 により表現された、直交曲線座標系 (x', y', z') における剛体変位関数の一般形が与えられた。

次節では、直交曲線座標系 (x', y', z') における1座標曲面

$$z' = \text{const} \quad (8)$$

により中央面が定義される薄肉シェル構造を考えるが、この構造に対する剛体変位関数は、(6)式より

$$\left. \begin{aligned} u'(x', y') &= h_{1j}(x', y', c) a_j \\ v'(x', y') &= h_{2j}(x', y', c) a_j \\ w'(x', y') &= h_{3j}(x', y', c) a_j \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

と表される。この場合、 u', v' が面内変位、 w' が面外変位を意味することになる。

3. 曲面剛体要素モデル

(8)式により定義されるシェル曲面を、形状近似を含めずに任意の剛体曲面三角形要素メッシュに分割し、隣接する2つの剛体三角形要素はその要素境界において、互いの相対的運動に抵抗するばね系により連結されているものとする。代表的な2要素を Fig.2 に示す。

3.1 要素境界の剛性特性

(i) 要素の剛体変位関数

Fig.2 の2要素A, Bの剛体変位関数はいずれも(9)式により表現される。各変位成分に下添字A, Bを付し、未知係数をそれぞれ a_j^A, a_j^B として両者を区別する。

(ii) 相対変位

2要素A, B間の相対変位は、一般には次式の6成分により定義される。

$$\begin{aligned} \phi_s &= l_s(a_1^B - a_1^A) + m_s(a_2^B - a_2^A) + n_s(a_3^B - a_3^A) \\ \phi_t &= l_t(a_1^B - a_1^A) + m_t(a_2^B - a_2^A) + n_t(a_3^B - a_3^A) \\ \phi_n &= l_n(a_1^B - a_1^A) + m_n(a_2^B - a_2^A) + n_n(a_3^B - a_3^A) \\ \delta_s &= \{l(u'_B)_M + m(v'_B)_M\} - \{l(u'_A)_M + m(v'_A)_M\} \\ &= \{lh_{1j}(x'_M, y'_M, c) + mh_{2j}(x'_M, y'_M, c)\} \\ &\quad (a_j^B - a_j^A) \\ \delta_t &= \{-m(u'_B)_M + l(v'_B)_M\} - \{-m(u'_A)_M + l(v'_A)_M\} \\ &= \{-mh_{1j}(x'_M, y'_M, c) + lh_{2j}(x'_M, y'_M, c)\} (a_j^B - a_j^A) \\ \delta_n &= (w'_B)_M - (w'_A)_M = h_{3j}(x'_M, y'_M, c)(a_j^B - a_j^A) \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、

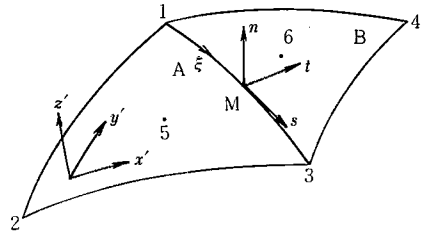


Fig. 2 Two adjacent rigid elements

$$\begin{aligned} l_s &= \cos(s, x), m_s = \cos(s, y), n_s = \cos(s, z) \\ l_t &= \cos(t, x), m_t = \cos(t, y), n_t = \cos(t, z) \\ l_n &= \cos(n, x), m_n = \cos(n, y), n_n = \cos(n, z) \\ l &= \cos(s, x'), m = \cos(s, y') \end{aligned} \quad (11)$$

(10)式における (ϕ_s, ϕ_t, ϕ_n) は (s, t, n) 軸まわりの回転相対変位であり、 $(\delta_s, \delta_t, \delta_n)$ は要素境界辺13の中点Mにおける (s, t, n) 軸方向の並進相対変位である。なお、直角座標系 (s, t, n) の成分 s, t は点Mにおけるシェル曲面の接線座標、 n は法線座標であり、 s は境界辺13方向とする。 $(\phi_s, \phi_t, \delta_n)$ は曲げ挙動に関連しており、それぞれ曲げ変形、ねじり変形、面外せん断変形を表現している。また、 $(\phi_n, \delta_s, \delta_t)$ は面内変形に関連しており、それぞれ面内回転変形、面内せん断変形、面内直接変形を表す。

相対変位と剛体変位関数の未知係数との関係は、(10)式より

$$\{d\} = [B] \{a\}$$

ここに

$$\begin{aligned} \{d\}' &= [\phi_s, \phi_t, \phi_n, \delta_s, \delta_t, \delta_n] \\ \{a\}' &= [a_1^A, a_2^A, \dots, a_6^A, a_1^B, a_2^B, \dots, a_6^B] \end{aligned} \quad (12)$$

とマトリックス表示できる。

(iii) 要素自由度

要素自由度の選択は一意でない。最も一般的には、(9)式の剛体変位関数における未知係数 $a_j (j=1, 2, \dots, 6)$ をそのまま要素自由度とすればよい。この場合、各剛体要素は独立に6自由度を有し、(10)式の要素間相対変位の全6成分が許されることになる。

ここでは総自由度数を極力減らすために、節点(三角形頂点)に横たわみの自由度 (w_i) 、要素重心点に面内変位の自由度 (u'_i, v'_i, θ_i) を設定し、これらの要素自由度と未知係数 a_j の関係を定めよう。

Fig.2の要素Aにおける要素自由度と未知係数 a_j^A の関係は次式により表される。

$$\begin{aligned} w_1' &= h_{3j}(x'_1, y'_1, c) a_j^A \\ w_2' &= h_{3j}(x'_2, y'_2, c) a_j^A \\ w_3' &= h_{3j}(x'_3, y'_3, c) a_j^A \\ u_5' &= h_{1j}(x'_5, y'_5, c) a_j^A \end{aligned} \quad (13)$$

研究速報

$$\begin{aligned}
 v'_s &= h_{2j}(x'_s, y'_s, c) a^{\#} \\
 \theta'_s &= (1/2 g_1 g_2) \{ \partial(g_2 v') / \partial x' - \partial(g_1 u') / \partial y' \} |_{(x'_s, y'_s, c)} \\
 &= (1/2 g_1 g_2) \{ \partial(g_2 h_{2j}) / \partial x' \\
 &\quad - \partial(g_1 h_{1j}) / \partial y' \} |_{(x'_s, y'_s, c)} \cdot a^{\#}
 \end{aligned}$$

同様に要素 B における要素自由度と未知係数 $a^{\#}$ の関係が

$$\begin{aligned}
 w'_s &= h_{3j}(x'_s, y'_s, c) a^{\#} \\
 w'_i &= h_{3j}(x'_i, y'_i, c) a^{\#} \\
 w'_l &= h_{3j}(x'_l, y'_l, c) a^{\#} \\
 u'_s &= h_{1j}(x'_s, y'_s, c) a^{\#} \\
 v'_s &= h_{2j}(x'_s, y'_s, c) a^{\#} \\
 \theta'_s &= (1/2 g_1 g_2) \{ \partial(g_2 h_{2j}) / \partial x' - \partial(g_1 h_{1j}) / \partial y' \} \\
 &\quad |_{(x'_s, y'_s, c)} \cdot a^{\#}
 \end{aligned} \tag{14}$$

と定まる。(13), (14)式を $a^{\#}$, $a^{\#}$ について解くことにより, 剛体変位関数の未知係数と要素自由度の関係として, マトリックス表示による次式が得られる。

$$\{a\} = [A] \{u'\}$$

ここに

$$\{u'\} = [w'_1 \ w'_2 \ w'_3 \ w'_i \ u'_s \ v'_s \ \theta'_s \ u'_6 \ v'_6 \ \theta'_6]$$

要素自由度を上述のように設定した場合, 要素間相対変位成分として必要なのは, (10)式における $\phi_s, \phi_n, \delta_s, \delta_i$ のみであることは明らかであろう。すなわち, 節点に横たわみの自由度を設けているため, 横たわみは節点において連続となり, ねじり変形と面外せん断変形は無視される。

(iv) 合応力

剛体要素 A, B は, (10)式の相対変位成分 ($\phi_s, \phi_i, \phi_n, \delta_s, \delta_i, \delta_n$) に抵抗するばね系 ($k_{rs}, k_{rt}, k_{rn}, k_{ps}, k_{pt}, k_{pn}$) により結合されているものとする。変形後にそれぞれのばねに生ずる力は, マトリックス形で

$$\left. \begin{aligned}
 \{s\} &= [D] \{d\} \\
 \{s\}' &= [M_s \ M_t \ M_n \ N_s \ N_t \ N_n] \\
 [D] &= [k_{rs} \ k_{rt} \ k_{rn} \ k_{ps} \ k_{pt} \ k_{pn}]
 \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

と表現される。(ii)で述べた相対変位成分の物理的意味との対応より, (M_s, M_t, M_n) は曲げモーメント, ねじりモーメント, 面外せん断力であり, (N_s, N_t, N_i) は面内モーメント, 面内直接力, 面内せん断力である。通常用いられる単位長さ当たりの合応力は, (16)式の各成分を要素境界辺13の長さで除したものである。これを

$$\{\bar{s}\} = [\bar{M}_s \ \bar{M}_t \ \bar{M}_n \ \bar{N}_s \ \bar{N}_t \ \bar{N}_n]$$

と記す。なお, 要素自由度を(15)式のように設定した場合, M_s, M_n, N_s, N_t のみが必要となる。

(v) 剛性マトリックス

剛体要素間を結合するばね系に貯えられるひずみエネルギーは, (12), (15), (16)式を用いると

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \{d\}' \{s\} \\
 &= \frac{1}{2} \{d\}' [D] \{d\} \\
 &= \frac{1}{2} \{a\}' [B] [D] [B] \{a\} \tag{18a} \\
 &= \frac{1}{2} \{u'\}' [A] [B] [D] [B] [A] \{u'\} \tag{18b}
 \end{aligned}$$

と表される。(18)式に Castigliano の定理を適用することにより, 次の剛性関係が定まる。まず, 1 剛体要素に独立に6自由度を設定する場合は, (18a)式より

$$\begin{aligned}
 \{R\} &= \{\partial V / \partial a\} = [k] \{a\} \\
 \text{ここに,} \\
 \{R\}' &= [L_s \ M_s \ N_s \ X_s \ Y_s \ Z_s \ L_6 \ M_6 \ N_6 \\
 &\quad X_6 \ Y_6 \ Z_6] \\
 [k] &= [B] [D] [B]
 \end{aligned} \tag{19}$$

であり, 剛性マトリックス $[k]$ の大きさは (12×12) である。また, (15)式のように要素自由度を設定した場合は (18b) 式より

$$\begin{aligned}
 \{R'\} &= \{\partial V / \partial u'\} = [k'] \{u'\} \\
 \text{ここに} \\
 \{R'\}' &= [F'_1 \ F'_2 \ F'_3 \ F'_i \ X'_s \ Y'_s \ M'_s \ X'_6 \\
 &\quad Y'_6 \ M'_6] \\
 [k'] &= [A] [B] [D] [B] [A]
 \end{aligned} \tag{20}$$

となり, この場合の $[k]$ は (10×10) である。

3.2 境界要素

任意の境界条件を容易に導入するためには, 構造の境界上に剛体線要素を設けると都合がよい。この境界剛体線要素と内部剛体三角要素間の剛性特性は, 1 剛体要素に独立に6自由度を設ける場合は, Fig.2 における節点2あるいは4が点 M に一致しているものと考えれば, 前項の定式化を何ら修正することなく得られる。しかし, (15)式のように要素自由度を設定したい場合は, 若干の修正が必要となる。すなわち, Fig.2 の要素 A を線要素とする場合は, 要素自由度として w'_2 の代わりに点 M における s 軸まわりの回転変位 θ'_2 を採用し, (13)式の第2式を

$$\theta'_2 = l_s a_1^{\#} + m_s a_2^{\#} + n_s a_3^{\#} \tag{21}$$

としなければならない。ここに, (l_s, m_s, n_s) は(11)式に与えられている。また, 要素 B を線要素とする場合は, 要素自由度 w'_i の代わりに点 M における s 軸まわりの回転変位 θ'_i を採用し, (14)式の第2式を

$$\theta'_i = l_s a_1^{\#} + m_s a_2^{\#} + n_s a_3^{\#} \tag{22}$$

とすればよい。

3.3 要素分割線

要素分割線(要素境界線)は、シェル曲面を定義する直交曲線座標系の種類によらず同一の数学的意味を有する測地線により定義するのが合理的であるが、簡単には直角座標平面に写像された (x', y') 平面における直線、すなわち、Fig. 2 における境界線 13 を例にとれば

$$\begin{aligned} x'(\xi) &= (1-\xi)x'_1 + x'_2 \\ y'(\xi) &= (1-\xi)y'_1 + y'_2 \\ 0 &\leq \xi \leq 1 \end{aligned} \tag{23}$$

を採用してもよいであろう。円筒シェル曲面のような可展面においては両者は一致する。いずれにせよ要素境界線が数式表示されて初めて、点 M の座標値、接線座標 (s, t) 、法線座標 n などが決定される。

3.4 ばね定数

弾性変形時のばね定数は、すでに平板曲げ要素¹⁾、平面要素²⁾において用いられていると同様の方法で、すなわち、要素境界線における曲率とひずみを(10)式の相対変位成分を用いて差分表示し通常の応力-ひずみ関係式に代入することにより、次式のように決定される。

$$\begin{aligned} k_{rs} &= 2 D l_{13} / (l_1 + l_2) \\ k_{rt} &= 2 D (1-\nu) l_{13} / (l_1 + l_2) \\ k_{rz} &= k_{pt} l_{13}^2 / 12 \\ k_{ps} &= E l_{13} t / (1+\nu) (d_1 + d_2) \\ k_{pt} &= E l_{13} t / (1-\nu^2) (d_1 + d_2) \\ k_{pn} &= \alpha E l_{13} t / (1+\nu) (l_1 + l_2) \end{aligned} \tag{24}$$

ここに、 l_{13} は Fig. 2 における境界線 13 の長さ、 l_1, l_2, d_1, d_2 はそれぞれ点 2, 4, 5, 6 から境界線 13 に降ろした垂線の長さ、 D は板の曲げ剛性、 t は肉厚、 α は有

効せん断係数である。

塑性変形時の $[D]$ マトリックスは、適当に仮定された降伏関数

$$f(\bar{M}_s/\bar{M}_{s0}, \bar{M}_t/\bar{M}_{t0}, \bar{M}_n/\bar{M}_{n0}, \bar{N}_s/\bar{N}_{s0}, \bar{N}_t/\bar{N}_{t0}, \bar{N}_n/\bar{N}_{n0}) = 0 \tag{25}$$

を塑性ポテンシャルとして塑性流れ則により定められる。ここに、下添字 0 は各合応力成分の全断面塑性値を意味する。塑性状態における $[D]$ マトリックスは一般に非対角項を含むことに注意されたい。

4. 結 語

本報告では、任意の直交曲線座標系により定義されるシェル構造の離散化極限解析に用いる曲面剛体要素モデルの一般的な定式化を示した。3節で誘導した要素境界の剛性特性を通常の直接剛性法の手順に従い全要素境界について加え合わせることににより、全体構造系の剛性方程式が構成され、有限要素法における荷重増分法の手順により最終強度解析が可能となる。本定式化の代表的な適用対象は、円筒殻、球殻、トロイダルシェルなどである。

(1981年2月19日受理)

参 考 文 献

- 1) T. Kawai and K. Kondou: New Beam and Plate Bending Elements in Finite Element Analysis, Seisan Kenkyu, Vol. 28 (1976) 409~412
- 2) T. Kawai and Y. Toi: A New Element in Discrete Analysis in Plane Strain Problems, Seisan Kenkyu, Vol. 29 (1977) 204~207

