

不連続体力学のすすめ (その3)

— 固体力学非線形問題への挑戦 —

Development of Discontinuum Mechanics

— A Challenge to Nonlinear Problems of Solid Mechanics —

川井 忠彦*

Tadahiko KAWAI

これまでの2回に亘る論説において著者が考えた“剛体-バネモデル”の概要とその数学的基礎について述べ、本来このモデルは極限解析専用モデルとして使用すべきであることを論じた。ところで、このモデルによる固体の極限解析法を実用化するためにはその精度や収束性の保証が是非とも必要となる。そこで本論説ではこの問題を中心に採り上げ、実用化の方法について見通しを述べたい

1. 剛体-バネモデルによる固体の極限解析解の精度保証の道⁵⁾

前2回の論説で詳述したごとく剛体-バネモデルは剛体要素を2種類のバネで連続したモデルであるから、弾性変形を正確に表現することは極めて困難である。何故かと言うと弾性変形は本来要素間に亘りは起こらず、各要素の変形によってのみその全体の変形が形作られるからである。ところが変形が塑性域に入り、亘りが卓越してくると、弾性変形の影響は次第に薄れ、その極限状態ではほとんどそれが無視できる状態になる。これが本モデルが極限解析専用モデルとして通用する最大の論拠であることを述べた。

しかしながら、その実用化を進めるには、是非ともこの精度保証の方法を確立する必要がある。そこでこれまでの研究から明らかにされた点を述べると以下のとおりである。

剛体-バネモデルを用い、有限要素法で標準化されている山田教授の提案した増分解を行うと与えられたメッシュ分割に対する最良上界解 (the best upper bound solution) が求められる。(その理論的証明は最近近藤によって与えられているから、興味のある方は文末の参考文献を参照されたい)

したがって、もし仮定したメッシュ分割の中に真の崩壊機構が含まれていれば、その解析結果はもちろん正解を与えることになる。奇蹟的にもこの崩壊メカニズムを計算に取り掛ける前に予想し得るならば、いかに大規模な構造物であっても、その極限荷重は一瞬のうちに計算できるはずである。(これが極限解析法の真骨頂である)。

これに反し真の崩壊機構から大分ずれたメッシュ分割を行ったとすれば、当然のことながら真の解よりかなり高目の解しか得られないことを覚悟しなければならない。(もちろん仮定したメッシュ分割に対しては最良の解が得られるのであるが)

換言するとRBSMモデルによる増分解の精度はメッシュ分割に左右され、これまでは真の解よりどのくらい高目の解が得られているのか推定するには実験値と比較する以外に方法はなかったのである。

そこでこの問題を解決するための著者は与えられたメッシュ分割に対するRBSMモデルの増分解から同じメッシュ分割に対する下界解 (lower bound solution) を求める実用的方法を考案、竹内がそのプログラムを開発し、二、三の基礎的問題を解析して良好な結果を得た。その結果は本誌33巻2号の研究速報欄に報告したので興味のある方々のコメントが頂ければ幸いである⁵⁾。

以下にその方法の骨子について述べることにする。まず与えられたメッシュ分割に対する最良上界解が求められたとすれば、それから各要素に働く境界力が求められる。そこで、これらの境界力と釣り合う要素内の応力分布 σ を最小自乗法などの適当な方法により求める。次にその応力分布 σ から塑性学という換算応力 (equivalent stress) $\bar{\sigma}$ を計算し、その絶対値の最大なものを見出し σ_{\max} とする。そして次の荷重低減率 μ を計算する。

$$\mu = \frac{\sigma_y}{\sigma_{\max}} \quad (\sigma_y: \text{材料の降伏応力}) \quad (1)$$

最後に最良上界解の崩壊荷重を P_U として次の荷重を計算する。

$$P_L = \mu P_U \quad (2)$$

* 東京大学生産技術研究所 第2部

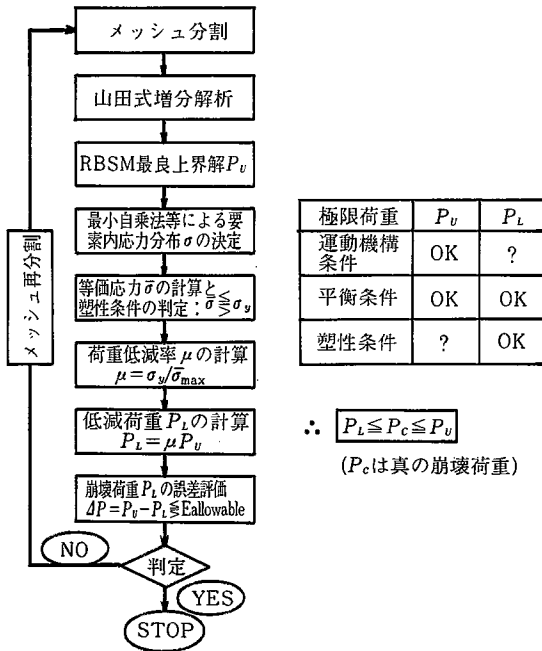


図1 RBSM 上界解より下界解の導出と極限解析解の精度保証

そうすると図1に示すように P_L は平衡条件、塑性条件は満たすが運動機構条件は一般には満足し得ない解を与えることになると思われる。したがって P_L は下界解を与えると結論されるので真の解 P_C を P_U の間に挟むことができる。

$$\therefore P_L \leq P_C \leq P_U \quad (P_C: \text{真の崩壊荷重}) \quad (3)$$

このようにして、上下界の開き $\Delta P = P_U - P_L$ が許容誤差に比して大きいか、小さいか、あるいは等しいかを見て、大きければ最初に仮定したメッシュ分割が不相当であるという判定が下ったことになるので、メッシュ分割を変更して同じ計算を $\Delta P \leq E$ となるまで繰り返すのである。メッシュ分割の修正は $\bar{\sigma}$ が σ_y を越えている領域全体に亘って行うべきもので $\bar{\sigma}$ の絶対値の大きいところからメッシュの修正を試行錯誤的に行う必要があり、その修正過程を計算機に自動的に行わせることは、おそらく不可能ではなからうが計算時間に弾ね返ってくるであろう。したがってメッシュ分割修正の仕事は解析者が計算機と対話しながら行う方式をとらざるを得まいと考えている。

図2には二次元正方形領域を一方方向に圧縮した場合の極限解析をメッシュ分割を種々変更して上下界の開きを調べてみたもので、メッシュ分割が正解に近づくに従って上下界が次第に正解に接近してくるのがわかるであろう。

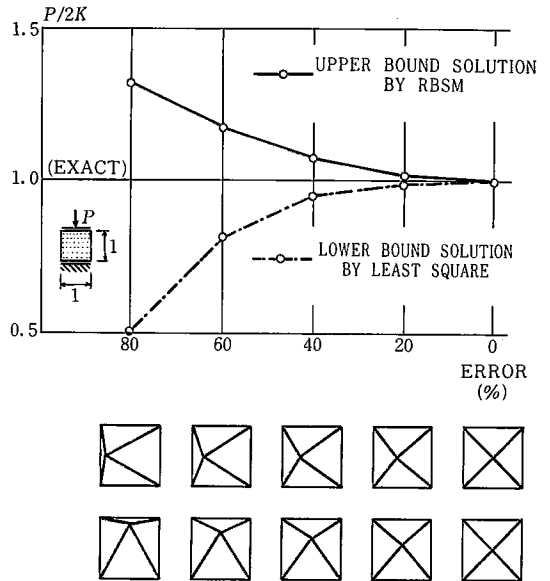


図2 一方方向圧縮を受ける正方形領域の極限解析解の誤差とメッシュ分割との関係 (K は剪断降伏応力)

2. 変動荷重を受ける固体の極限解析

これまでのところ変動荷重を受ける構造物の最終強度問題について考えたことがなかったが、実際の構造物では互いに無関係に変動する荷重を受けることが多い。たとえば風荷重を受ける門形骨組は風の方向によって変動する荷重を受けることになるし、またクレーンを載せた骨組ではクレーンの荷重が絶えず変動している。このような変動荷重は構造物によって支えられている静荷重と全く無関係である。かかる荷重の最悪の組合せ状態を決定し、その状態下において構造物が丁度崩壊するように設計するのは比較的容易である。もしも、この最悪の状態が正しく求められておれば、定義によって他のいかなる組合せ変動荷重を受けても崩壊することはないであろう。しかしながら独立な変動荷重を受ける構造物は特別な状態であって、これまで考えてきた方法では予知できない危険な状態に置かれることがある。その代表的なのが次に掲げる二つの場合である。

- i) 交番塑性 (alternating plasticity)
 - ii) 漸増塑性変形による崩壊 (incremental collapse)
- もし荷重が本質的に交番的性格を有し、いくつかの部材が正負の曲げモーメントの繰返しを受け、部材の繊維には交互に引張りと圧縮の応力が作用して降伏を起し、局部的に塑性変形が進行して破壊を起すような状態を交番塑性と呼んでいる。この型の破壊と疲労破壊との違いは種類ではなくその程度であろう。今日低サイクル疲労と呼ばれている現象が、おそらくそれに当たるものと

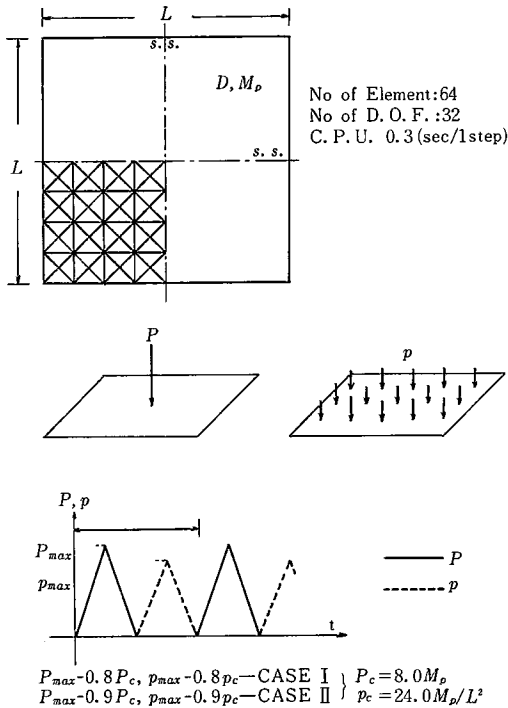


図3 規則的な繰返し横荷重を受ける周辺支持正方形板

思われる。

低サイクル疲労の破壊力学的研究は、これまで夥しい研究報告が発表され、今日でも活発な研究がなされつつあるが、100%材料試験の研究であって、構造物の低サイクル疲労を取り扱った論文は殆どないようである。これはおそらく疲労現象そのものの本質が依然として未知のベールにとざされているために研究がごとごとく、その方向に向いてしまうのであろう。いずれにしても構造物交番塑性問題の極限解析を取り上げた研究が今後展開されてもよさそうである。もう一つの漸増塑性変形による崩壊はあまり容易に予知できるものではないが、変動繰返し荷重がいくつかの危険な組合せの状態で連続的にかなり定まったサイクルを描きながら構造物にかかる場合に起こり得るものである。1例としてある骨組構造を考える。もし各独立荷重の最大値がすべて荷重 P の一つの倍数になっている場合、 P がある一定の値 P_s' より大きければ塑性関節における回転角の増加が毎回同一方向に構造物中のいろいろな断面で起こり得る。また P は P_s' より大きいがある限界値 P_s より小さければ、各荷重サイクルにおいて塑性関節における回転角の増加は繰返し数と共に次第に減少してゆき、ついに塑性関節における回転角はそれ以上は変化せず、荷重を引き続いてかけても構造物中の曲げモーメントの変化は弾性的にしか起

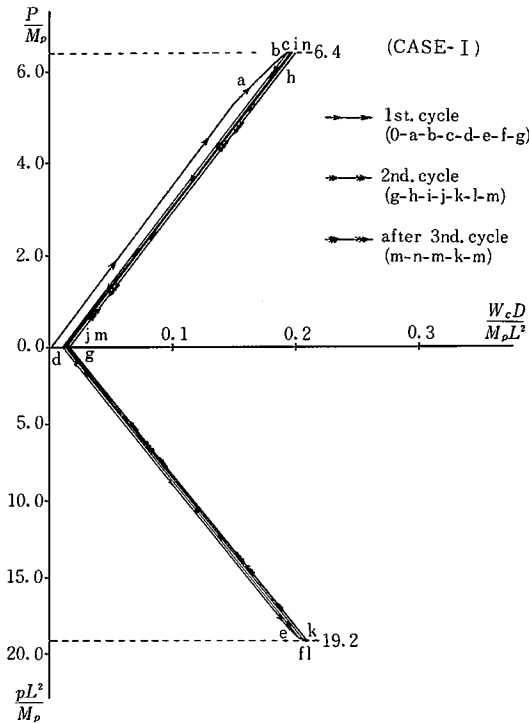


図4 最大荷重が $0.8 P_c$ (または p_c) の場合の平板の荷重-撓み曲線(ケース I)

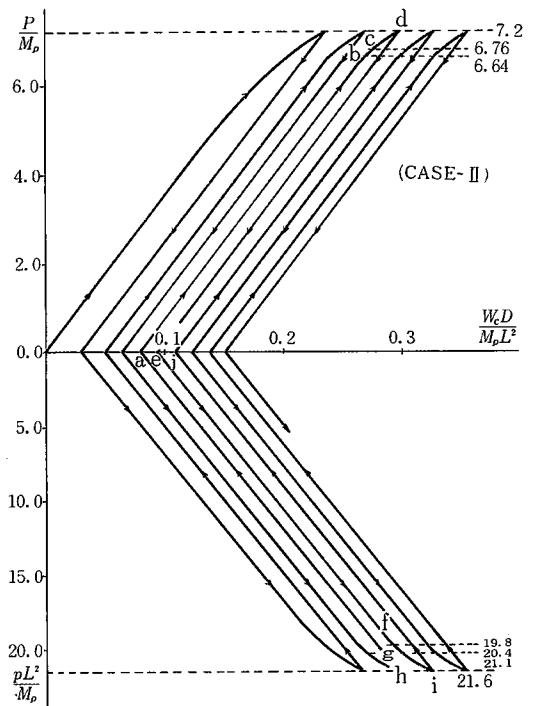


図5 最大荷重が $0.9 P_c$ (または p_c) の場合の平板の荷重-撓み曲線(ケース II)

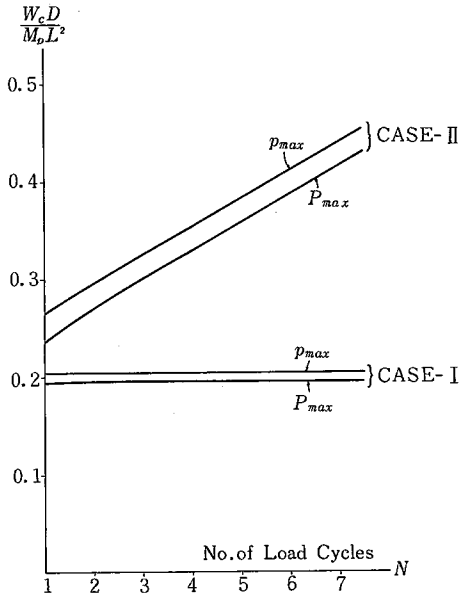


図6 ケース I および II の場合における平板の撓みと荷重繰返し数との関係

こらなくなる。この状態がいわゆる Shakedown あるいは Stabilize した状態でそのときの限界荷重が Shakedown 荷重である。これに反して P が限界値 P_s よりも大きければ構造物は Shakedown せず、各サイクルごとに塑性関節において回転が起こる。実際最大荷重が各サイクルごとに変化しなければ、ある関節における回転角は毎回同じ量だけ増加し、構造物のたわみは毎回ある量だけ増加する。このようにしてもし荷重回数が十分大きくなると、許容できないほど大きなたわみが生じて構造物は役に立たなくなる。

これが漸増塑性変形による崩壊である。このような変動荷重に対する構造物の極限強度の問題は僅かに平面のトラスや骨組についてある程度研究がされただけで、今後の研究にまつ面が大きい。そこでこの小論では周辺支持正方形板の変動横荷重による Shakedown 問題について、近藤によって行われた研究の一端を紹介したい。¹⁾

図3に示す周辺支持正方形板が1回の荷重サイクルで

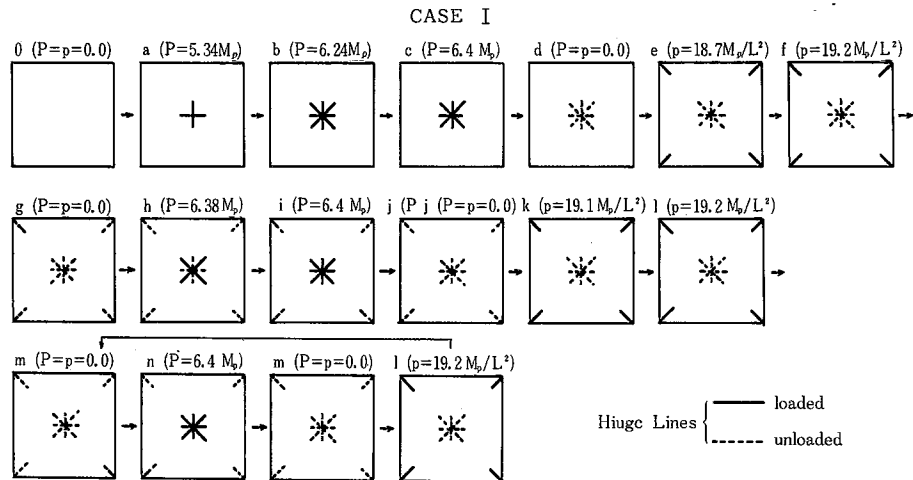


図7 ケース I における塑性関節線の生成状況

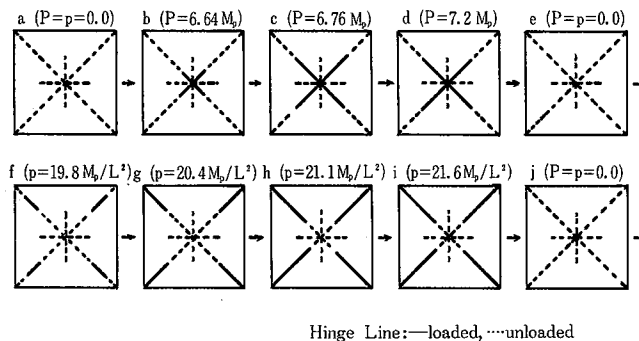


図8 ケース II における塑性関節線の生成状況

a) 前半のサイクル (中央集中荷重 P)

$$0 \leq P \leq 0.8 P_c \text{ or } 0.9 P_c \quad P_c = 8.0 M_p$$

b) 後半のサイクル (一様分布荷重 p)

$$0 \leq p \leq 0.8 p_c \text{ or } 0.9 p_c \quad p_c = 24.0 \frac{M_p}{L^2}$$

の負荷を繰り返して受けるものとする。 P_c, p_c は正方形板のそれぞれの荷重に対する静的崩壊荷重を示す。 $(M_p$ は平板の全塑性曲げモーメント)

この平板を図中のメッシュ分割を用い最大荷重が崩壊荷重の80%の場合(ケースI)と90%の場合(ケースII)につきそれぞれ初めの数荷重サイクルの間の変位応答解析を山田式の増分解析を用いて行った。図4はケースIの場合の平板中央点の横撓みと荷重(P, p)の関係を無次元表示したもので上の半分に荷重の前半サイクル、下半分は後半のサイクルにおける関係を示す。図5はケースIIの場合についての無次元化された荷重-撓み曲線を示している。また図6は荷重サイクル数と横撓みの関

係をケースIとIIについて画いたもので、これらの図からケースIの場合には3回目の荷重サイクル後は平板はShakedownしたが、ケースIIの場合には2回目の荷重サイクル以後一定の撓みが規則正しく殖えてゆくことがわかるであろう。また図7および図8にはケース(I),(II)の場合における塑性関節線の発生生長の模様を示した。以上の結果 P_c の80%から90%の間に入ることがわかった。これで大略のShakedown荷重は求まったことになるが、もう少し正確に P_s を求めるには、次の図9に示すような流れに従ってShakedown荷重 P_s が自動的に求められるようなプログラムを開発する必要がある。ちなみに計算時間は1ステップ当たり0.3秒(東大計算センター HITAC 8700/8800)であり、本手法を用いれば従来の有限要素法では手軽に計算できないこの種の問題でも容易に処理できることが立証されたものと思われる。この手法を可能な限り一般化して任意の変動荷重を受ける構造物の極限解析法の確立を推進してゆきたいと思っている。

変動荷重を受ける構造物の
実用的シェイクダウン解析

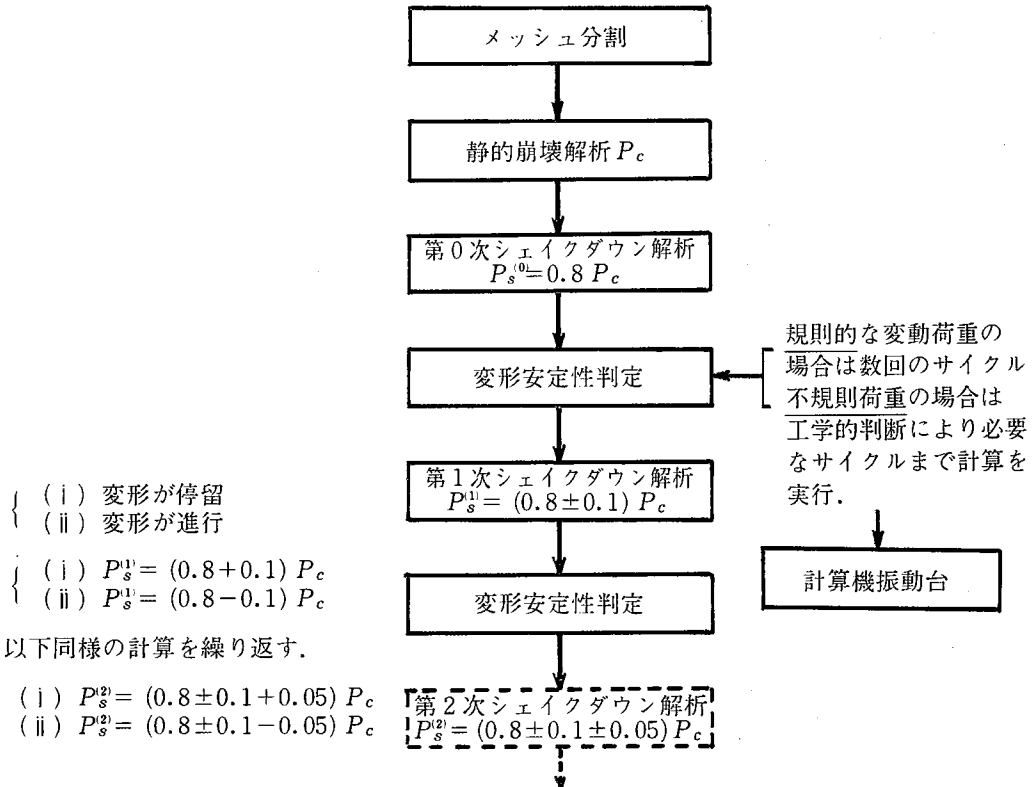


図9 規則的変動荷重を受ける構造物の実用的シェイクダウン荷重解析

3. 離散系の力学的挙動に関する二つのシミュレーション例

1976年剛体-バネモデルを提案して以来、その数学的基礎固めの研究と並行して一連の応用問題の解析を行い本モデルの妥当性の実証に努力してきた。そして、これまで行われた実験や理論的研究と良好な一致を確認し得た例題について順を追って本誌速報欄に投稿してきたが、ここでは金属の結晶組織や高温ガス炉炉心構造のような多くの要素の集合体に現れる力学的挙動のシミュレーションを最近行ったので、その結果を簡単に報告したい。

i) 多結晶金属の微視的挙動に関するシミュレーション

RBSMモデルにおける剛体要素を結晶粒、剛体要素を結合するバネ-ダッシュポットを結晶粒境界強度を表現する力学モデルと考えれば、本離散化モデルは多結晶体の微視的挙動の解析に適用可能であることは直ぐに理解されるであろう。ここに紹介する例題は金属工学の分野で注目を集めていると聞いている「超塑性現象」に関連する問題である。写真1(a)および(b)はマグネシウム合金(Mg-6%, Zr-0.5% Zn Alloy)の引張り試験片

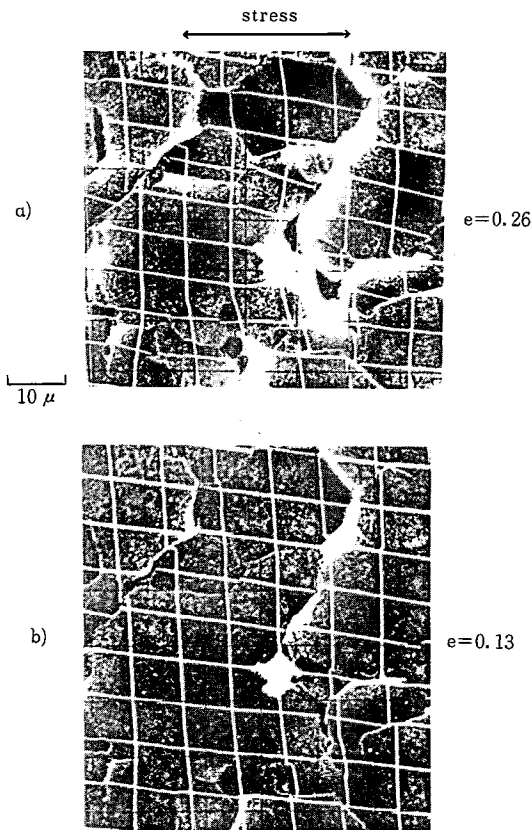


写真1 マグネシウム合金引張り試験片の電顕写真 (Atwood and Hazzledine, (1975)⁶⁾)

の負荷前後における電子顕微鏡写真である。⁶⁾ 図10は写真1(a)の微細構造を剛体-バネモデルに分割した図であり、図11はそれを引張り応力下に置いたときの各結晶粒の回転変位の分布につき解析結果と電顕写真による実測結果と比較したものである。この解析で都井は結晶粒界を4要素流体モデルに理想化した²⁾ 図11から判るようにあらっぽいモデルで行った解析であるにもかかわらず計算結果と実測結果との間かなりの相関性が見られ、今後この方面の解析にRBSMモデルを有効に活用し得るものと思われる。

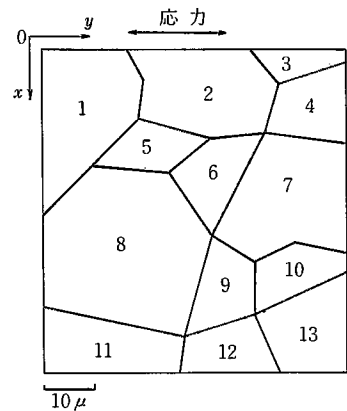


図10 マグネシウム合金微視的構造のモデル化

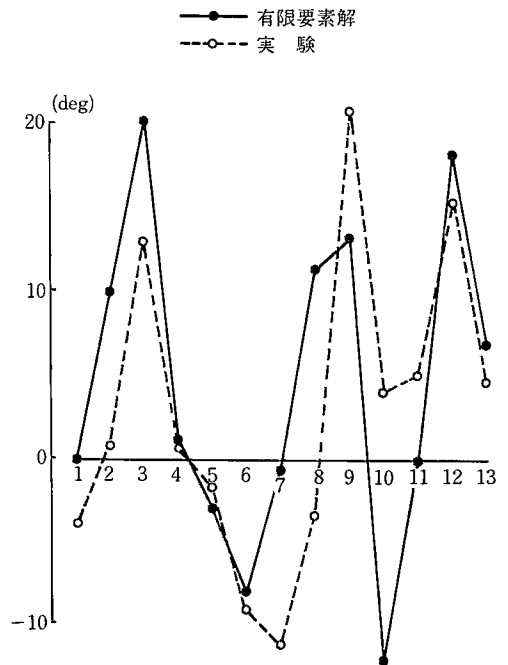


図11 粗大結晶の回転角分布 (前図において1を完全固定、11はy方向の変位と回転は拘束)

ii) HTGR 炉心構造における力の伝達機構のシミュレーション³⁾

高温ガス炉 (High Temperature Gas Reactor) の炉心は燃料ペレットの入ったスリーブを中心に埋め込んだ正六角形断面の黒鉛ブロックを隙間なく並べた構造になっている。原子炉の安全性に関して、これら燃料ブロックの耐震強度の問題は其中でも重要研究課題であり、主として光弾性実験や振動試験が活発に行われている。

このような炉心構造に荷重が加わると各ブロックは互いに独立であるため、外力は連続体の内部におけるような伝わり方をせず、ある特定の線上に並んでいるブロックにのみ伝達されることが光弾性実験等からわかっている。そこで炉心構造をブロック同士は互いに接触してもすべりに対してはほとんど抵抗がないと考えられるので

竹内はこの構造を剪断バネのない RBSM モデルの集合体に理想化して解析を行った。

図12は弾性解析結果で、アーチ・アクションは現れずいたるところに引張力が生じている。現実のモデルはレンガ積みのように置かれているので引張力は特になく、そこで、引張力が生じたら垂直バネを切るという方法を取り、計算を行った。図13はバネを切断していった順番とその箇所が示されている。このとき図14のように応力が拡散し、その他の部分ではほぼ零に近い状態になった。応力値は図15に示してある。

このようにアルゴリズム次第で不連続体の集合に対する解析も可能となることが示された。本解析に用いた Tension-Crack Analysis については文献4)を参照されたい。

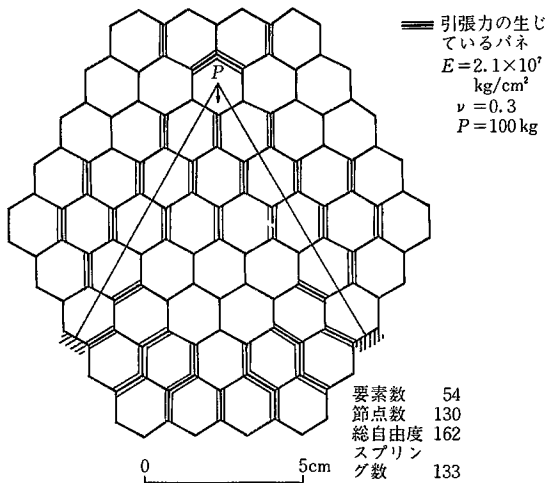


図12 HTGR 炉心構造の弾性解析

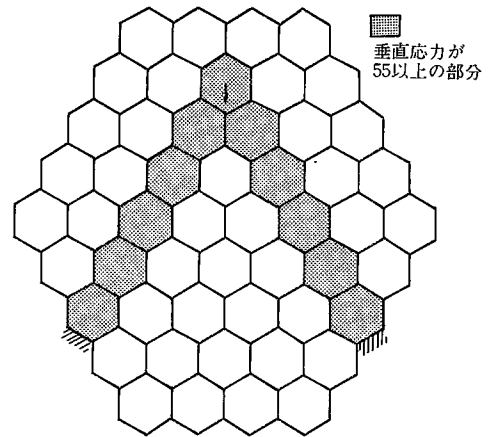


図14 HTGR 炉心構造の tension-crack analysis における荷重の伝達状態

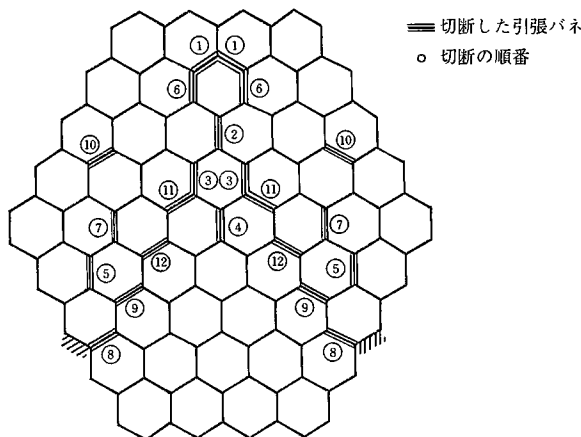


図13 HTGR 炉心構造の tension-crack analysis における破壊モード

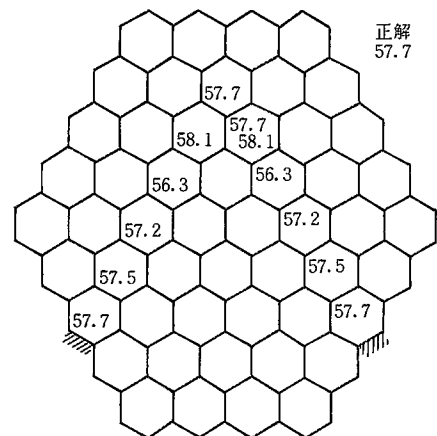


図15 HTGR 炉心構造の tension-crack analysis における応力分布

4. 技術計算の未来像

あとがき

以上において新しい離散化モデルを開発して極限解析法を一般化することにより構造工学諸問題の解析および設計合理化の道が開けてゆくであろうことを述べた。その具体的方策を示すと以下のとおりである。

- i) 一般に構造設計においてその弾性域の剛性と最終耐力の適確な評価が最も重要である(図16)。
- ii) 弾性域および弱塑性域の解析は有限要素法に任せとけばよい。
- iii) 最終耐力の実用的評価法の確立は新離散化モデルによる極限解析法の一般化以外には考えられない。
- iv) 構造物の崩壊に到る途中経過を追跡する必要のある場合には時間がかかることを覚悟のうえで荷重増分法ないし時間積分法によらざるを得ない。

以上の議論をわかりやすく図示したのが図17である。与えられた固体や構造物の最終耐力を評価するには図18に示すように、まず解析しようとする対象物の簡単な模型実験を行って、変形や応力分布を計測するのでなく、破壊や崩壊のメカニズムやパターンをできるだけ正確に記録するのである(これは考えているほど容易ではないかも知れない。あるいは、新しい実験技術の開発を必要とするかも知れない)。そして、その情報にもとづいて対象物のメッシュ分割を行い、メカニズムを仮定して崩壊解析を行うのである。それも従来のような上界の解だけでなく、下界も計算し、その差が許容誤差の範囲を超えている場合にはメッシュの最適化を行って、上界と下界を設定した誤差範囲内に収まるような所まで近づけるならば、その解は十分設計に役立つものとなるであろう。

RBSMモデルは物理的発想から得られたモデルであるため、その数学的基礎が薄弱であったが、最近になってようやくその極限解析解の精度を保証する道が開けてきたようである。しかしながら Prager, Druckerらによって創始された極限解析の理論は剛塑性体の微小歪み静的解析にしか適用されず、実際問題へ適用するにはなお大変形、亀裂発生生長の影響を考慮に入れた理論にまで拡張する必要がある。それにも増して現在最も理論的研究が遅れている分野は動的崩壊問題であろう。動的極限解析の理論を作り上げるのは現在のところ殆ど絶望的のようであるから、RBSMモデルによる時間増分解析を数多く実施して、その実験結果との対応を調べ妥当性を確

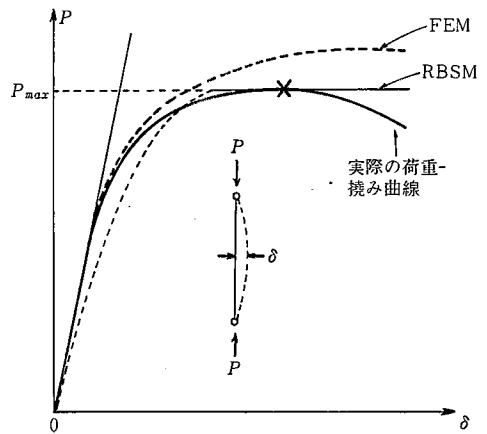


図16 構造設計における2つの重要なパラメーター：弾性域における剛性と最終耐力

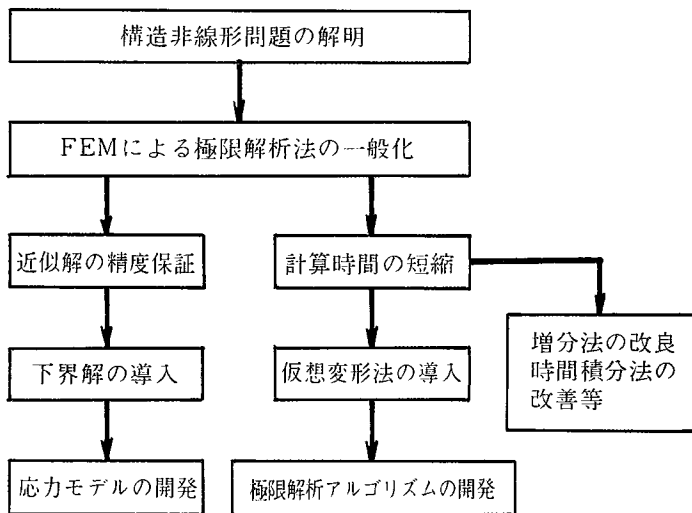


図17 構造非線形問題解明への道

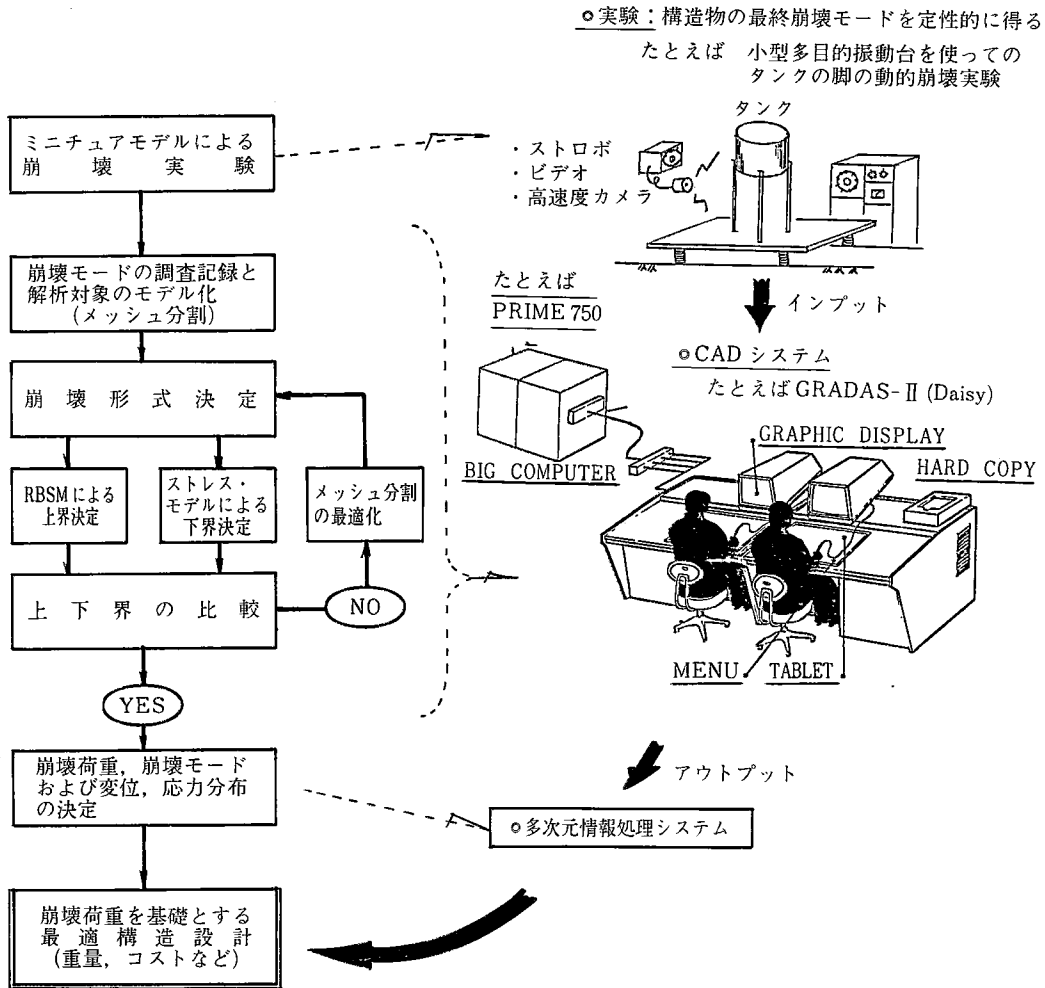


図18 計算機シミュレーションによる対話型極限解析システム(a) 負荷前 (b) 負荷後

認してゆきたいと考えている。

謝 辞

本小論中に紹介した Mg 合金の超塑性に関する問題は本所第4部 石田洋一教授の示唆によるものであり、同教授から貴重な電頭写真の提供を頂き、また適切など指導をいただいたことを併記し、厚くお礼申し上げる次第である。

(1981年2月6日受理)

参 考 文 献

1) 近藤一夫：“低次形状関数モデルをもちいた平板構造要素解析の基礎的研究”，東京大学学位論文(昭和52年12月)

2) 都井 裕：“簡易化された要素モデルによる板殻構造解析に関する研究”，東京大学博士論文(昭和53年12月)

3) 川井忠彦，竹内則雄，“HTGR 炉心の耐震性に関するシミュレーション技術について”，東大生研 ERS 研究会資料，昭和54年7月(未発表)

4) 竹内則雄，川井忠彦，“新離散化モデルによる地盤基礎の極限解析(その1)”一引張りに抵抗しない材料の解析一，生産研究，Vol. 32, No.6(昭和55年6月)

5) 竹内則雄，川井忠彦，“新離散化極限解析解の誤差評価に関する一方法”，生産研究，Vol.33, No.2(昭和56年2月)

6) D. G. Atwood and P. M. Hazzledine unpublished work, referred in D. A. Smith; J. de Physique, Colloque C4 36.(1975), 456p.