

新離散化極限解析解の誤差評価に関する一方法について

A Method for the Error Evaluation of the New Discrete Limit Analysis Solutions

竹内 則雄*・川井 忠彦*

Norio TAKEUCHI and Tadahiko KAWAI

1. はじめに

従来用いられてきた有限要素法は、理論的に考えると要素分割を無限に小さく細分すれば、荷重に対する正解値を得ることができる。しかし、実際には有限な数だけの要素分割を行っているため、表面力等の連続性が保たれておらず正解値を与えることはない。また、連続体仮説に基づく塑性流れ理論を前提としているため、明確な崩壊機構も知ることができない。一方、解析的にも多くの試みがなされているが、^{1)~4)}崩壊機構の仮定が難しく、また可容速度場を得るのが困難である等の欠点が現実の構造解析ではたびたび体験するところである。

さて、川井モデルは一般化された極限解析用のモデルであり、与えられた要素分割から運動学的に許容される崩壊機構のパターンをいくつか仮定することができる。したがって、与えられた要素分割に対し、崩壊機構と表面力の連続性は少なくとも保たれた極限解析解を求めることができる。ただし、それらの解は要素内の応力分布を考えていないため、いずれかの要素内部で塑性条件が破れていると考えられる。したがって、求められた極限解析解は一つの上界値を与えることがわかる。かりに、与えられた要素分割の中に正解のり線パターンが含まれていれば当然著者らの増分解析法により、与えられた要素分割に対する最良の上界値が得られると考えられるが、複雑な地盤の場合には正しいり線を予想することは極めて困難であり、得られた最高荷重の評価もできないのが現状であった。

一方、川井は極限解析を効率よくしかも経済的に行う方法を早くから提唱していた。⁵⁾その方法を具体化するためには下界値を求める実用的方法の開発が不可避であり、そのために要素内応力を推定する方法が研究された。もし、なんらかの形で要素内応力が得られれば、川井の提案したコンピュータによる対話型システムを用いて上下界のはさみ打ちによる実用的な極限解析を行うことができるものと考えられるに至った。最近、豊島⁷⁾は川井モ

デルを用いて決定された表面力を利用して最小二乗法による要素内応力の近似的推定法を与えた。この方法は表面力と要素内応力から得られる表面力の二乗誤差を最小化することによって要素内応力を得ようとする方法で、もし誤差が少なければ良好な結果を与えるものと思われる。

本論文ではこの最小二乗法により要素内応力を推定し川井モデルの要素分割の良否の判定基準を与える方法について述べる。さらに、これによって得られる最高荷重が崩壊荷重の下界値を示すことを簡単な数値計算例で示す。

2. 新離散化モデルの最高荷重

いま、地盤の崩壊というものについて考えてみると、ひずみ硬化やひずみ軟化を無視し、弾性係数を無限大とするモデルすなわち、剛塑性体を仮定した土から形成される地盤の一部あるいは全体に塑性変形が生じたとき地盤は崩壊したものと見なせる。上界定理はこの崩壊機構条件を満足するような崩壊荷重は真の解より大きいか、たかだか等しいことを示している。一方、川井モデルは崩壊機構条件と表面力の連続性を満たしているの上界値を与えることがわかる。この証明は文献4)に従って行えば簡単にできる。このように川井モデルによる崩壊解析は与えられた要素分割に対する最良の崩壊荷重を与えるが、正解に近い解を得るためには信頼性の高い要素分割の技術が必要である。しかも、得られた荷重は上界値であるため一般に危険側の評価を与える結果となる。特に現存する地盤の解析を行う場合は正しいり線を予想することが難しく、したがって要素分割も困難であり、得られた荷重が正解とどれほど異なるか予想することもそれだけではできない。すなわち、ぜひとも同じ問題に対する精度の高い下界値の実用的解析法の開発が必要となる。

さて、下界値を与える条件は平衡条件と塑性条件を満足することが前提である。ところが、川井モデルは要素境界面上の表面力を取り扱うため要素内応力状態はわか

* 東京大学生産技術研究所 第2部

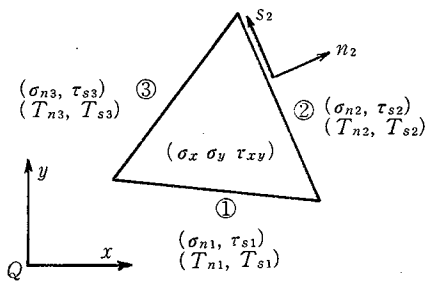
らない。したがって、表面力の連続性は満足していても要素内で塑性条件を破っている可能性がある。かりに要素内応力がなんらかの形式で得られれば、要素内で塑性条件を破っているか否か判定できる。そこで、川井モデルの表面力を利用して得られた要素内応力と降伏応力の比を安全率としてその最小値を与える要素を探す。そして、この最小の安全率を川井モデルによって得られた最高荷重にかけてやれば、要素内応力は完全に塑性条件を満足するものと思われる。したがって、崩壊荷重値を低減させたわけであるから、崩壊機構条件は完全に満足し得なくなるであろうが、平衡条件と塑性条件は満足しているので下界値を与えるものと思われる。

以上のような議論から次のような計算方法を考えることができる。すなわち、初めに川井モデルによる従来方式の増分崩壊解析を行い最良の崩壊荷重と要素表面力の状態を得る。次にこの要素表面力を利用し要素内応力を算出する。この結果得られた要素内応力と降伏応力の比を安全率とし、この安全率の中から最小のものを取り出し得られた最高荷重にかけ合わせる。これが与えられた要素分割に対する近似的な下界値となる。以上の計算方法は川井モデルによる繰返し計算終了後、ただ一度だけ要素内応力を算出するだけなので計算時間はほとんどかからず実用的な解析になるものと思われる。

3. 要素内応力の推定法

要素内応力を厳密に求めようとすると解析解を用いた境界積分を行う必要がある。しかし、実際にはこのような厳密な手法を用いなくても近似的に最小二乗法により推定することができる。ここでは、最小二乗法による要素内応力の推定法を述べる。

いま三角形要素を仮定し図3・1に示される記号を用いる。座標系は図に示されるように全体座標系と各要素境界辺上に設けた3つの局所座標系を考える。このように



$$\sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}] \quad (\text{要素内応力})$$

$$T_{ni} = [T_{ni} \ T_{si}] \quad (\text{表面力})$$

$$\sigma_{ni} = [\sigma_{ni} \ \tau_{si}] \quad (\text{川井モデルによる表面力})$$

図3・1 各種の応力の記号と座標系

考えると要素内応力から次のように単位面積当たりの表面力を得ることができる。

$$T_{ni} = \tilde{R}_i \cdot \sigma \tag{3.1}$$

$$\tilde{R}_i = \begin{pmatrix} l_{1i}^2 & m_{1i}^2 & 2l_{1i} \cdot m_{1i} \\ l_{1i} \cdot l_{2i} & m_{1i} \cdot m_{2i} & (l_{1i} \cdot m_{2i} + l_{2i} \cdot m_{1i}) \end{pmatrix}$$

ここで、 l_{1i} 、 l_{2i} 、 m_{1i} 、 m_{2i} は i 番目の要素境界辺における方向余弦で以下の関係がある。

$$l_{1i} = \cos(n_i, x) \quad l_{2i} = \cos(m_i, y)$$

$$m_{1i} = \cos(s_i, x) \quad m_{2i} = \cos(s_i, y)$$

一方、要素内応力から得られる表面力と川井モデルから得られる表面力の二乗誤差は各要素境界辺の長さを A_i として以下のように与えられる。

$$E = \sum_i (T_{ni} \cdot A_i - \sigma_{ni} A_i)^2 \cdot (T_{ni} \cdot A_i - \sigma_{ni} A_i) \tag{3.2}$$

(3.1)式を(3.2)式に代入し、二乗誤差を最小化すると

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma} = 2 \sum_i \tilde{R}_i^t \cdot \tilde{R}_i \cdot \sigma \cdot A_i^2 - 2 \sum_i \tilde{R}_i^t \cdot \sigma_{ni} \cdot A_i^2 = 0 \tag{3.3}$$

が得られる。したがって、要素内応力を次のように求めることができる。

$$\sigma = R^{-1} \cdot S \tag{3.4}$$

$$R = \sum_i \tilde{R}_i^t \cdot \tilde{R}_i \cdot A_i^2$$

$$S = \sum_i \tilde{R}_i^t \cdot \sigma_{ni} \cdot A_i^2$$

以上のようにして得られた要素内応力に対して2節で述べた計算法を適用する。

4. 数値計算例

さて、これまでの議論を数値計算により確かめてみることにする。図4・1は簡単な圧縮問題の例で平面ひずみ状態を仮定し、破壊条件にトレスカの条件を用いている。図上段のグラフの縦軸には正解に対する最高荷重の比をとっている。また横軸には正解のびり線に対するずれの割合をとっている。すなわち、図の下段に示してあるような要素分割を行った場合を示す。図中の実線が川井モデルによる最高荷重に安全率をかけたときの値である。川井モデルによる解が明らかに上界値であることがわかるし、また、正しい要素分割になるにつれ正解に近づくことがわかる。一方、最小二乗法を用い安全率をかけた結果では正解に対し下界値側の値を示している。要素分割が悪い場合には川井モデルによる解と本法による解に

研究速報
 はかなりの開きがあるが、正解に近づくにつれ収束する傾向にあることがわかる。

図4・2は同じ問題に対して要素分割を図の下段に示されるように行ったときの結果である。この場合は正しいり線の一つのパターンを含んでいるため川井モデルによる解は正解と一致する。しかし、構造全体でながめると、他に可能なり線があるにもかかわらず要素分割ではそれが含まれていないため、本法による解は下界値側の値を示している。もちろん、要素分割を正解に近づけてゆけば収束する傾向にある。

図4・3は剛体ポンチの押込み問題 ($h/b=2$) の例である。条件は前の例と同じである。図の左側が荷重変位曲

線で、実線が川井モデルによる解を、点線が正解を、そして一点破線が本法による解を与えている。正解と川井モデルによる解が良好な一致を示しているにもかかわらず、本法による解が14%程度下側に表れている。そこで図の右側に示されるような安全率の図を書いてみた。白ぬりの部分は安全率が1以上で破壊のおそれがないことを示している。図から観察すると板の中心部の要素内応力が14%程度降込応力を破っていることがわかる。したがって、この部分の要素分割をていねいに行えば本法による解も正解に近づくものと思われる。

最後に同じ剛体ポンチの押込み問題に対して $h/b > 8.74$ の場合について計算を行ったものが図4・4に示されている。この場合も先ほどと同様な傾向が得られていることがわかる。主働域と受働域は正当な要素分割を行っているし、またこの領域は剛体的に作用する部分であるため要素内応力は降伏応力に対して正当な値となっているこ

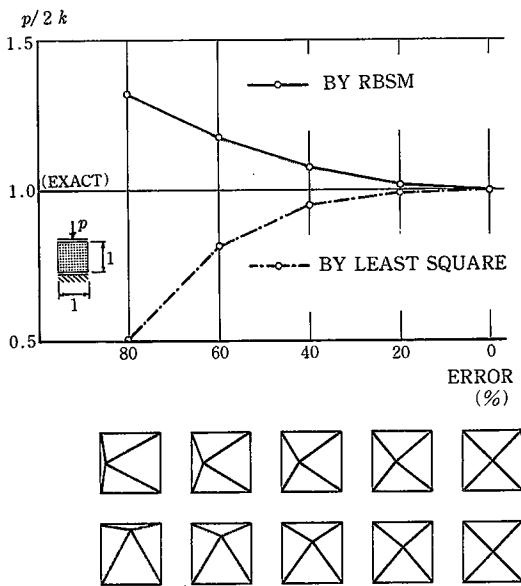


図4・1 圧縮問題に対する計算結果(I)

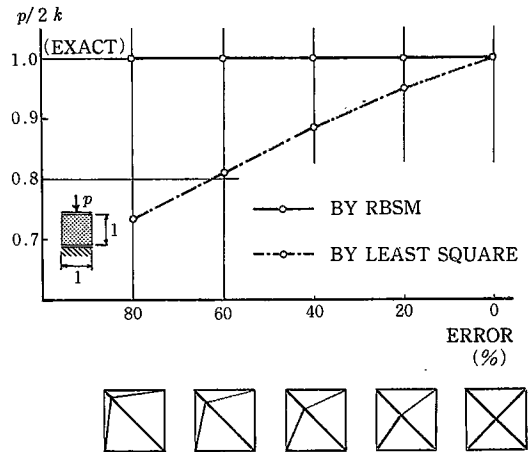


図4・2 圧縮問題に対する計算結果(II)

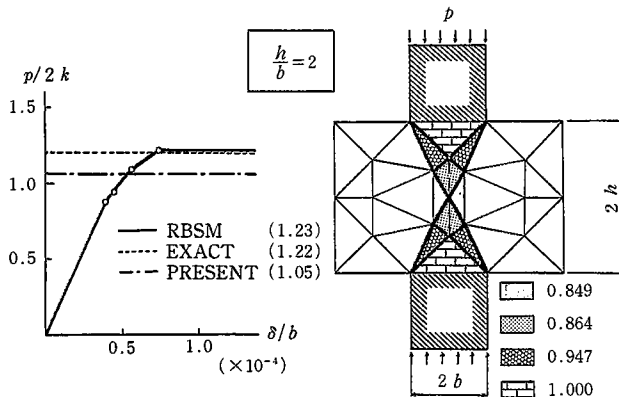


図4・3 剛体ポンチの押込み問題 ($h/b=2$)

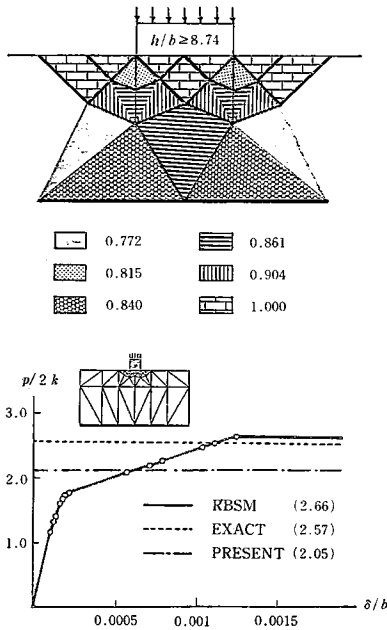


図4・4 剛体ポンチの押込み問題($h/b > 8.74$)

とがわかる。一方、放射状に応力を伝える塑性域では要素分割が厳密に評価されていないため要素内応力が降伏応力を破る。この結果本法による解が下界値側に出るものと思われる。

5. む す び

川井モデルによる増分極限解析法は与えられた要素分割に対する最良の上界荷重を与える。その結果を利用して簡易的ではあるが、最小二乗法を用いて要素内応力を算出し下界側の最高荷重値を示す方法を提案した。川井モデルによる解が上界値であるということは、危険側の最高荷重を与えることになるので、実際の設計に用いる

研究速報場合にはその上界値と正解との誤差を評価しないと適用に不安が残る。しかし、本論文で述べた方法を用いれば要素分割の妥当性も評価でき、上界値の信頼性も増してることがわかり、本解析法による崩壊解析結果の精度保証の道が開けてきた。

また、川井モデルは一般的に考えると重心に平行変位と回転角の3つの自由度を考えるが、最高荷重のみ考え変位の信頼性を無視するならば、平行変位の2自由度のみで十分である。この場合、要素剛性行列は(4×4)となり、また面倒な積分も必要としないため大幅な計算時間の短縮化が期待できる。さらに、本法は川井モデルによる最終解のみ用い、剛性行列を解く必要がないので計算時間はほとんどかからない。したがって、川井が提案した対話型システム⁶⁾に載せることが可能であり極限解析を手軽にしかも経済的に行える可能性が十分にあることが明らかになった。

(1980年11月11日受理)

参 考 文 献

- 1) Drucker, D.C. and W. Prager: "Soil mechanics and plastic analysis of limit design", Quart. of Appl. Math., 10, 2, pp.157-165 (1952)
- 2) 山口: "塑性流動における速度場の理論", 土木学会論文集, 63, pp8-16 (1959)
- 3) 田中: "構造物の極限解析", 彰国社 (1966)
- 4) 山口: "土の剛塑性理論における極限定理と応用", 土木学会論文集, 145, p12-22 (1967)
- 5) 近藤: "平面応力問題に対する一離散化手法", 日本鋼構造協会第13回大会マトリックス解析法研究発表論文集, pp.191-196 (1979)
- 6) 川井: "有限要素法は金属工学に何をもたらすか(その3)", 金属, 50, 9, pp.53-57 (1980)
- 7) 豊島: "RBSM未定応力算出法(その4)", 未発表(1980)

正 誤 表

(1月号)

頁	段	行	種 別	正	誤
45	左	↑5	参考文献	p. 38~41	p. 33~38