

新しい梁モデルによる弾性床上の梁の解析

An Analysis of Beam Bending Problems on The Elastic Foundation by Means of New Discrete Beam Element

竹内 則雄*・神尾 洋一**・川井 忠彦*

Norio TAKEUCHI, Yoichi KAMIO and Tadahiko KAWAI

1. はじめに

川井によって提案された新離散化モデル¹⁾は三次元の一般式からすべての要素(たとえば梁, 平面, 平板等)が誘導できる。梁要素もそれにもれず一般的な三次元の式から容易に導き出せ, しかもせん断の影響を簡単に考慮できる。²⁾この新離散化モデルは始め物理的考察に基づいて開発されたもので, 数学的厳密さに欠けていたが, 最近になって都井³⁾や渡辺⁴⁾らがこの新離散化モデルの梁要素は Hughes らの提案した有限要素モデル⁵⁾と等価であることを指摘した。新しい梁要素は剛体変位場を仮定しているためせん断の影響が簡単に入るなど有利な点も多かったが, 一方では仮想ピン要素の導入といったプログラム上のテクニックを多少必要とした。しかし, 彼らの議論によりその欠点を取り除くことが可能となった。

さて梁要素は通常の骨組構造のみならず, 杭や矢板等のように弾性床上の梁としても多く用いられる。有限要素法(変位法)により弾性床上の梁の問題を解く場合, 関数を含む複雑な剛性行列を作成しなければならず取り扱いの面で多少面倒な点があった。しかし, 新しい梁モデルでは弾性床上の梁をあたかもバネ支点を持つ梁のように扱うことが可能であり, 取り扱いが非常に簡単になる。⁶⁾これは骨組構造と平面要素を組み合わせた著者らの方法⁷⁾と同様に新しい梁モデルが剛体変位場を仮定しているためである。

本論文では都井, 渡辺らの議論と著者らの方法から新離散化モデルの梁要素を再検討し, 新しい梁モデルを用いた弾性床上の梁の解析法を提案する。さらに二三の数値計算例を示し, その有効性を立証する。

2. 梁要素の剛性方程式

三次元的一般式から梁要素の剛性マトリックスを誘導する方法は文献²⁾に与えられている。ここでは別なアプローチで説明を行う。今簡単のため問題を面内荷重を受ける二次元状態とし, 要素の重心に図2・1に示されるような剛体変位 $(\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{\theta})$ を考える。ここで, 上付きの $\bar{\cdot}$ は局所座標系の成分であることを意味する。

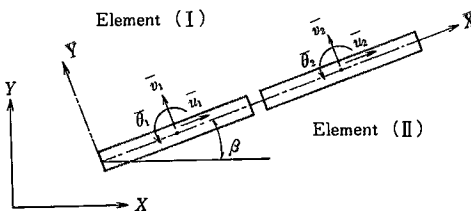


図2・1 新離散化モデルの梁要素

さて, I 要素と II 要素の結合部に(2・1)式で示される軸力, せん断力, 曲げモーメントに抵抗する3種のスプリング (k_N, k_S, k_M) を設定する。

$$[D] = \begin{bmatrix} k_N & \mathbf{0} \\ k_S & \\ \mathbf{0} & k_M \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} k_N = 2EA/(l_1+l_2) \\ k_S = 2\alpha GA/(l_1+l_2) \\ k_M = 2EI/(l_1+l_2) \end{matrix} \quad (2.1)$$

ここで, EI は曲げ剛性, GA はせん断剛性, EA は軸剛性, α は有効せん断係数を示す。さて, この3種のスプリングに貯えられる歪エネルギーは重心の剛体変位を用いて以下のように表される。

$$V = V_N + V_S + V_M \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} V_N = k_N(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)^2/2 = k_N\delta_N^2/2 \\ V_S = k_S\{(\bar{v}_2 - l_2\bar{\theta}_2/2) - (\bar{v}_1 + l_1\bar{\theta}_1/2)\}^2/2 = k_S\delta_S^2/2 \\ V_M = k_M(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1)^2/2 = k_M\varphi^2/2 \end{cases}$$

ここで, $\delta_N, \delta_S, \varphi$ は相対変位ならびに相対回転角でマトリックスを用いて次のように書き表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} \delta_N \\ \delta_S \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -l_1/2 & 0 & 1 & -l_2/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.3 \cdot a)$$

あるいは簡単に次のように書く。

$$\{\delta\} = [B]\{\bar{u}_i\} \quad (2.3 \cdot b)$$

したがって, (2・1)式(2・3)式から(2・2)式の歪エネルギーはマトリックスを用いて次のように表される。

$$V = \{\delta\}^T [D] \{\delta\} = \{\bar{u}_i\}^T [B]^T [D] [B] \{\bar{u}_i\} = \{\bar{u}_i\}^T [\bar{K}] \{\bar{u}_i\} \quad ([\bar{K}] = [B]^T [D] [B]) \quad (2.4)$$

以上のようにして得られた局所座標系に関する歪エネルギーの式を全体座標系の重心変位 $\{u_i\}$ により表すと以下

*東京大学生産技術研究所 第2部

**東洋エンジニアリング(株)

のようになる。ここで $[T]$ は座標変換マトリックスである。

$$V = \{u_i\}^T [T]^T [\bar{K}] [T] \{u_i\} = \{u_i\}^T [K] \{u_i\} \quad (2.5)$$

$$([K] = [T]^T [\bar{K}] [T])$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

このようにして得られた歪エネルギー (2.5) 式に、カステリアーノの原理を適用すると最終的に以下の関係式が得られる。

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial u_i} \right\} = \{R\} = [K] \{u_i\} \quad (2.6)$$

部材力はバネの設置された要素の結合部で以下のように求めればよい。

$$\{\bar{X}\} = [D][B][T] \{u_i\} \quad (2.7)$$

3. 部材接合部の処理方法

一般に、骨組要素は直列に結ばれている場合ばかりでなく隅角部のように角度をもって結合していたり異材料と結ばれているケースが多い。このような場合、新しい梁モデルでは質量や長さを持たない仮想ピン要素 (図3.1) を媒体として部材を結合させていた。しかし、この方法は従来の有限要素法の発想から生じないため、プログラム利用者の入力データミスを引き起こす原因の一つとなっていた。そこで、都井や渡辺らの議論を考えその方法を採用する。詳細は文献(3)4)に譲り概略のみ記述する。

図3.2を参照して説明する。新しい梁モデルでは剛体変位場を仮定するため各部材の重心A~Eに自由度を持つ。そして、各要素の重心にはさまれた接合部で剛性行列を作成し全体剛性行列を組み立てる。そこで、かりに□で示される部材 (二つの要素の重心点を節点とする部材) を考え、この部材について剛性行列を作成すれば、この剛性行列は本来の新しい梁モデルとまったく同様であり、積分点の取り方で Hughes の要素と考えることも可能である。図からも理解されるように、境界近傍やピン要素が含まれている近傍で要素分割を細分すれば、従来のピン要素という概念を使うことなくその影響を考慮

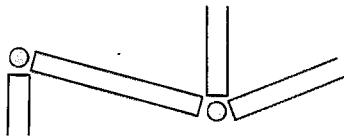


図3.1 仮想ピン要素

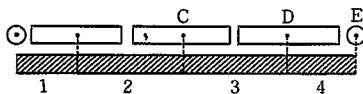


図3.2 新離散化モデルの梁要素と Hughes の要素

することができ汎用的になる。本論文の数値計算例はすべてこの方法を用いた。

4. 弾性床上の梁の解析

一般に弾性床上の梁では要素のたわみがあるとそのたわみに抵抗するバネが分布しているため反力が生ずる。したがって要素のたわみを与える4階の微分方程式にたわみの関数が含まれ、要素剛性マトリックスの作成はもはや単純にはゆかない。これを避けるために近似的にバネ支点を用いる方法も考えられるが、バネ支点の間隔により大幅に解が異なるので実用的にはならず、結局複雑な剛性マトリックスを作成して解いているのが現状である。4階の微分方程式にたわみの一次関数を用いただけでもその剛性マトリックスは複雑となるので、地盤と梁との摩擦など到底考えられないし、地盤バネが非線形となれば、その剛性行列の作成は想像を絶する。

さて、ここで、骨組要素と平面要素を結合した著者らの方法を考えてみる。このとき、剛体変位場を各要素について仮定し、平面要素と骨組要素の間に平面要素とまったく同様なバネを分布させていた。これは骨組要素についてみれば重心点に集中化を行った支点バネを持ったのと同様になる。そこで、新しい梁モデルを用いる場合、上記の方法と同様に要素の重心の変位に抵抗する支点バネを追加すれば近似的ではあるが弾性床上の梁と同様な解析を行ったものと考えることができる。図4.1(a)は剛体変位場を仮定した一つの梁部材が弾性地盤上にあるという状態をモデル化したものである。 k_h, k_s はそれぞれ、垂直、せん断の地盤反力係数である。梁要素は剛体変位場を仮定しているので地盤反力は線形分布をするものと考えられる。そこで、次のような3種のバネを重心に設定し支点バネとする。

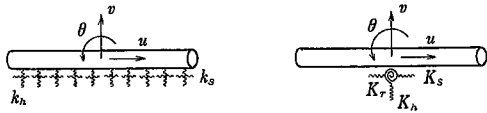
$$\left. \begin{aligned} K_h v &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} k_h \left(v + \frac{1}{2} x \theta \right) dx = (k_h \cdot l) v \\ K_r \theta &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} k_h \left(v + \frac{1}{2} x \theta \right) x dx = (k_h l^3 / 12) \cdot \theta \\ K_s u &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} k_s u dx = (k_s l) \cdot u \end{aligned} \right\} \therefore \begin{aligned} K_h &= k_h l \\ K_r &= k_h l^3 / 12 \\ K_s &= k_s l \end{aligned} \quad (4.1)$$

上記の関係から地盤反力 R は次のようにマトリックスを用いて表すことができる。

$$R = - \begin{bmatrix} K_s & 0 \\ 0 & K_h \\ 0 & K_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = -ku \quad (4.2)$$

今、全体剛性行列を組み合わせた時の連立方程式が以下のように与えられる。

研究速報



(a) 弾性床上の梁の地盤バネ (b) 積分後の弾性床上の梁の地盤バネ

図4・1 新しい弾性床上の梁

$$Ku = P + R$$

$$= P - ku \quad (4.3)$$

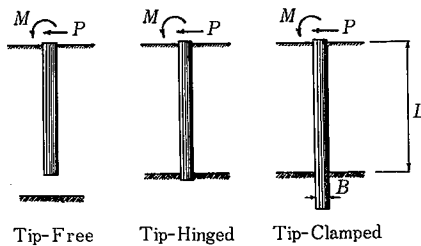
地盤反力が今の場合 (4.3) 式からも理解されるように未知数となっているため、最終的に次のような方程式を解けばよいことになる。

$$(K+k) \cdot u = P \quad (4.4)$$

ここで、 P は荷重項を示すものとする。

以上のように、要素内変位場を剛体と仮定することにより分布バネの集中化が行え、近似的とはいえ要素分割にあまり左右されない支点バネを用いた弾性床上の梁を考えることができた。このような支点バネ的な考え方から摩擦等の影響を簡単に取り入れることができる。これはせん断バネ K_s の存在からも明らかであろう。支点バネの利点は計算プログラムが非常に簡単であるばかりでなく地盤の破壊を考えやすいことにある。今回のモデルではせん断バネも含まれているので、接触面においてもモール・クーロンの破壊規準を導入することも可能である。また梁要素については従来の川井モデル²⁾であるから簡単に塑性ヒンジを導入することができる。

本報では主に弾性解の精度を検討することによりモデルの妥当性を示す。



Material Properties	
Modulus of deformation	350 000 kg/cm ²
Coefficient of horizontal subgrade	0.5 kg/cm ³
Moment of inertia	103 200 cm ⁴
Diameter (B)	40 cm
Pile length (L)	1 000 cm
Shear force (P)	2 000 kg
Bending moment (M)	300 000 kg·cm

図5・1 数値計算モデルと材料定数

5. 数値計算例

数値例として図5・1に示す地中の単杭の問題を取り上げた。材料定数は図に示す通りであり、荷重条件として杭頭にせん断力を与えた場合と曲げモーメントを与えた場合の2通りを考えた。また境界条件として杭頭を図に示す3つの状態に分けてそれぞれのケースについて計算を行った。図5・2～図5・7は本法による計算結果と解析解を比較したものである。要素分割は4, 8, 16の3種類を考えている。図の左下が曲げモーメントを正解と比較

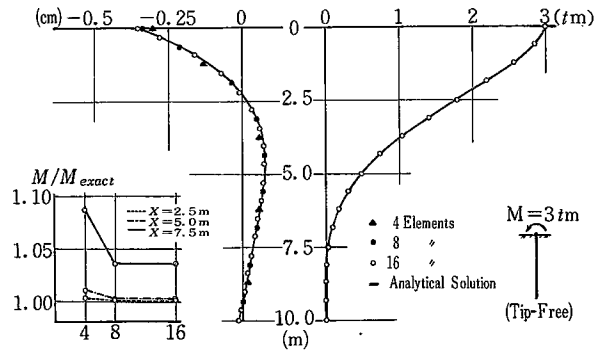


図5・2 先端自由・荷重 M の計算結果と正解との比較

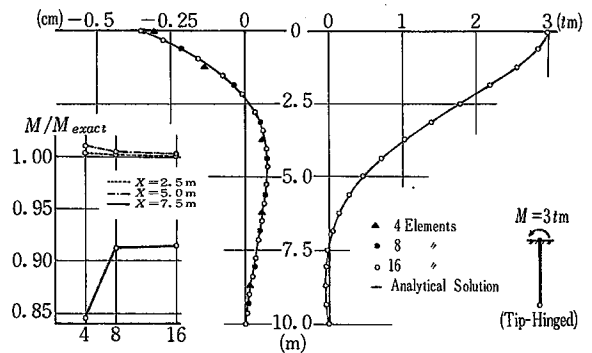


図5・3 先端ヒンジ・荷重 M の計算結果と正解との比較

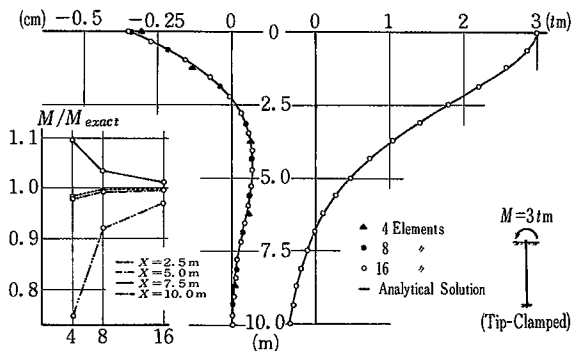


図5・4 先端固定・荷重 M の計算結果と正解との比較

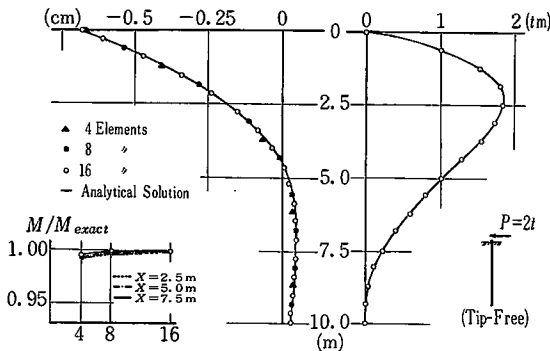


図5・5 先端自由・荷重 P の計算結果と正解との比較

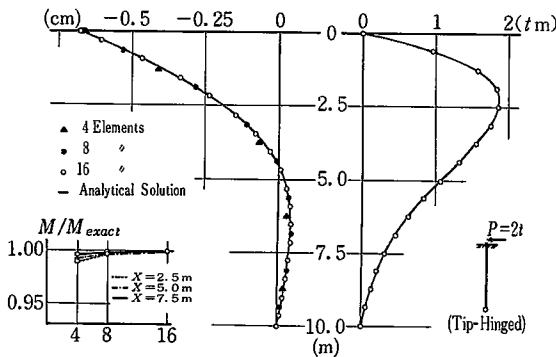


図5・6 先端ヒンジ・荷重 P の計算結果と正解との比較

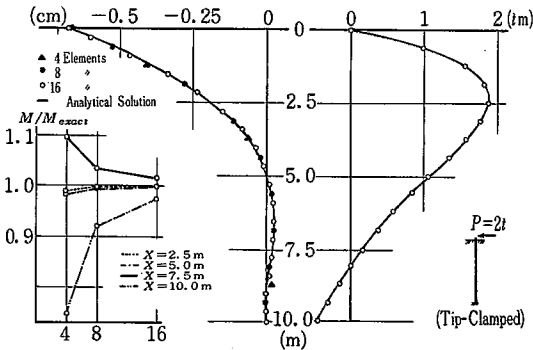


図5・7 先端固定・荷重 P の計算結果と正解との比較

したときの各要素分割に対する収束状況を杭の深さ方向に対する点でプロットしたものである。どのモデルも、おおむね10分程度で良好な結果を与えている。図の中央は変位を正解と比較したもので分割が粗くても良好な一致を示すことがわかる。右側は16分割の場合の曲げモーメントを正解と比較したもので誤差は図から読みとれない程度に良好な一致を示した。

表5・1 本モデルによる変位解と正解との比較

	TIP-FREE		TIP-HINGED		TIP-CLAMPED	
	EX- ACT	NU- MERI- CAL	EX- ACT	NU- MERI- CAL	EX- ACT	NU- MERI- CAL
$P=2 \cdot t$		0.6709		0.6756		0.6725
		0.6871	0.6856	0.6858	0.6812	0.6818
		0.6877		0.6864		0.6821
$M=3 \cdot t \cdot m$		0.3087		0.3093		0.3065
		0.3423	0.3538	0.3429	0.3503	0.3396
		0.3505		0.3511		0.3476

表5・1は変位解を正解と比較したもので上段が4分割、中段が8分割、下段が16分割の場合の計算結果である。新離散化モデルは一般に変位の信頼性が低い、梁要素については変位も十分精度があるものと思われる。解が多少大き目に出るのは剛体変位場の仮定からくるものばかりでなくせん断変形の影響を考慮したためであると思われる。

6. むすび

新しい梁モデルを利用して弾性床上の梁の解析を試みた。弾性床上の梁は杭ばかりでなく矢板やパイプラインの問題等へも応用が可能で、かなり広範囲な領域で使用することができる。本報はそのような問題への適用可能なモデルを開発し、その弾性解の精度を調べたものであり十分使用可能であることが理解できた。

(1980年9月5日受理)

参考文献

- 1) Kawai, T.: "New Element Models in Discrete Structural Analysis", 日本造船学会論文集, 第141号 (1977)
- 2) Kawai, T. and Chang, N. C.: "A Discrete Element Analysis of Beam Bending Problems Including the Effects of Shear Deformation", J. of "Seisan Kenkyu", Institute of Industrial Science, Univ. of Tokyo, 30. 5 (1978)
- 3) 都井: "骨組・回転対称シェル構造の動的非線形解析" 日本造船学会論文集, 第147号 (1980)
- 4) 渡辺: "変分差分法によるせん断変形を含んだRBSM梁要素の導出" 川井研研究会資料 (未発表) (1980)
- 5) Hughes, T. J. R. et al.: "A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending", Int. J. of for Num. Meth. in Eng., Vol. 11 (1977)
- 6) 都井・川井: "円筒殻の解析のための新しい離散化モデル(その1)", 生産研究, 30. 7 (1978)
- 7) 竹内・川井: "新離散化モデルによる地盤基礎の極限解析(その4)", 生産研究, 32. 10 (1980)