

弾性波の発生・伝播に関する計算手法の比較

Comparison of Numerical Methods on the Generation and Propagation of Elastic Waves

大保直人* 片山恒雄*
Naoto OHBO and Tsuneo KATAYAMA

1. ま え が き

地盤振動の研究に際し、変形歪みがただか 10^{-6} 程度のとき地盤は弾性体とみなすことができる。弾性体内部を伝わる波には、伝播速度の異なる P 波、S 波の 2 種があり、表面があるときはこれらのほかに表面にエネルギー密度の集中した表面波が伝わる。

半無限弾性体の表面上の 1 点に振動源を与えて、他の点でどのような振動が観測されるかという問題は Lamb の問題と呼ばれ、二重フーリエ積分によって解が求められている。Lamb は被積分関数を適当に近似して計算を容易にしたが、そのため近距離の変位は精度が大きく落ちるという欠陥があった。一方、近距離での変位に関しては、複素関数論をうまく利用したカニヤール (L. Ca-gniard) の計算法がある。これらの計算法は境界が水平な簡単な場合のみ適用できて、複雑な境界問題には利用できない。

本報告では、弾性波の発生・伝播について、すでに一部で試みられている 2 つの方法

- i) 運動方程式を差分方程式に置き換えて解を求める
- ii) 連続体である地盤を質点系と伸縮バネの等価モデルに置き換えて解を求める

を紹介し、これらの方法で得られた結果と解析解からの結果とを比較・検討し、それぞれの計算法の特徴について述べる。

2. 計算法の概略と試算例

2.1 差分法による解法

等方均一弾性体における運動方程式を差分方程式に置き換え、数値的に弾性波の発生・伝播の解を求める。^{1,2)}

地表面の振動源を原点とし、鉛直下方に z 軸、水平に x 軸をとる。変位の x, z 成分をそれぞれ u, w とすると、運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \Delta + \mu \nabla^2 u \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \Delta + \mu \nabla^2 w \quad (2)$$

である。ここに $\Delta = (\partial u / \partial x) + (\partial w / \partial z)$, $\nabla^2 = (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial z^2)$, ρ は密度, λ, μ は Lamé の弾性定数であ

る。境界面にあたる地表面 ($z=0$) でのせん断応力 (\widehat{xz}) と垂直応力 (\widehat{zz}) は

$$\widehat{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3)$$

$$\widehat{zz} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + \mu) \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4)$$

で与えられ、振動源として鉛直方向に力 F が作用する場合は $\widehat{xz}=0, \widehat{zz}=F$, また、力が作用しない場合は $\widehat{xz}=0, \widehat{zz}=0$ が境界条件式となる。式 (1)~(4) を中心差分で置き換えて数値計算を行う方法が差分法である。差分法で計算を行う場合、解の安定性が問題となる。 x, z 座標の間隔が等しい ($\Delta x = \Delta z$) 場合は次式のいずれかを満足すればよいが、等しくない ($\Delta x \neq \Delta z$) 場合は 2 つの式を同時に満足するように時間間隔 (Δt) を設定すればよい。¹⁾

$$1 - \left(V_p \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 - \left(V_s \frac{\Delta t}{\Delta z} \right)^2 \geq 0$$

$$1 - \left(V_s \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 - \left(V_p \frac{\Delta t}{\Delta z} \right)^2 \geq 0$$

ここに、 V_p, V_s はそれぞれ P 波、S 波の速度である。

地盤モデルは、ポアソン比 $\nu=0.25$, P 波速度 $V_p=200$ m/s とし、地表面に単位振幅の正弦一波 (周期は 8 Hz に相当) の力を作用させた場合を、時間間隔 $\Delta t=0.00433$ s, 距離間隔 $\Delta x = \Delta z = 1$ m として計算した。

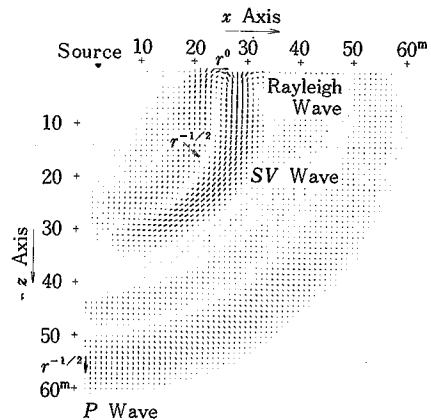


図1 差分法で得られた弾性波の伝播パターン ($\nu=0.25$)

* 東京大学生産技術研究所 第5部

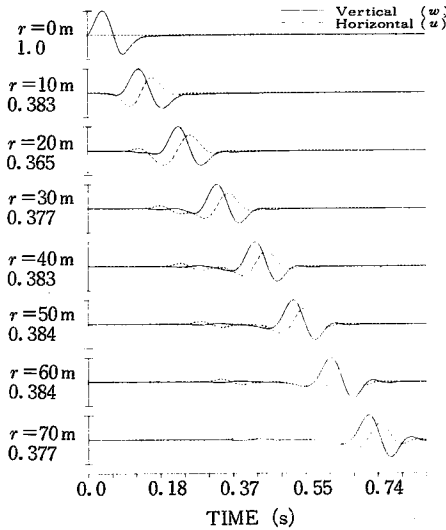


図2 地表面の計算波形

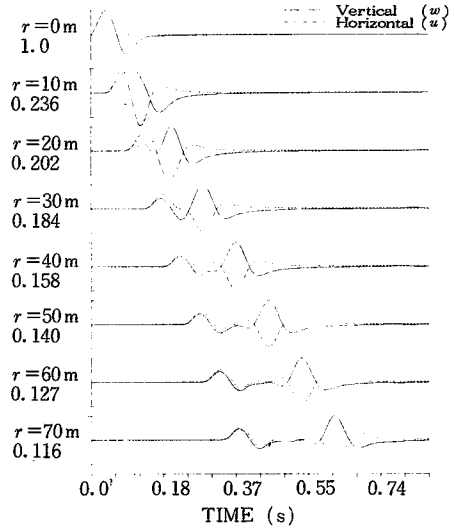


図3 伏角45度方向の計算波形

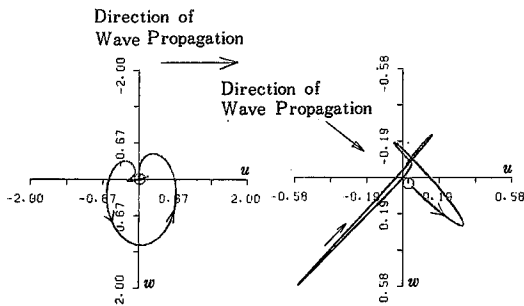


図4 地表面の振動軌跡 (r=40m)

図5 伏角45度方向の振動軌跡 (r=40m)

弾性波の伝播パターンの一例を図1に示す。これは、72ステップ目 ($t=0.30743$ s) の計算結果で、各格子点の変位ベクトルの全体の最大値を単位に基準化して表示してある。図中には弾性波の種類と振幅の距離減衰を示してあり、この減衰は2次元問題の解析解と一致している。SV波の指向性(せん断窓)³⁾は明瞭である。

地表面に沿う格子点および伏角(振動源の中心で水平面から下方に測った角度)45度方向の格子点を伝播する振動波形を図2, 3に示す。波形の左端には振動源からの距離と振動源で得られた上下動波形の最大振幅値を単位としたときの各距離での上下動最大振幅値の比を示してあり、各距離での波形の縦軸は上下動成分最大振幅値を同一の大きさに取って描かれている。振動波形の主要部分の伝播速度を求めてみると、 $V_p=200$ m/s, $V_s=115$ m/s, V_R (レイリー波速度)=106 m/sである。これらの

速度比は $V_p/V_s \approx 1.74$, $V_R/V_s \approx 0.92$ であり、ポアソン比 $\nu=0.25$ の条件から計算される値と一致している。

図4, 5に振動源から40m離れた地表および伏角45度方向の地点での振動軌跡を示す。地表での回転方向は反時計まわりで、レイリー波の性質を示している。地中の振動軌跡から、はじめにP波が、次にSV波が伝播していることがわかる。特に、この方向はSV波が卓越し、せん断窓の特性がより明らかである。

2.2 等価質点系モデル法による解法

連続体である地盤を質点と伸縮バネで結合させた網目の力学モデルで置き換え、力の釣り合いから方程式を求め、これを数値計算し弾性波の発生・伝播の解を求めめる。⁴⁾

図6の網目のモデルで、質点間の距離変化(伸縮)にともなう力の釣り合いを考える。格子点 $(x_{i,j}, z_{i,j})$ にある質点の変位を $(u_{i,j}, w_{i,j})$ 、密度を $\rho_{i,j}$ 、質点間の間隔を x および z 軸ともに h 、 x および z 軸方向のバネ定数を c_1 、対角線方向のバネ定数を c_2 とする。格子点 (i, j) の力学的な釣り合いから以下の2つの式が得られる。

$$\rho_{i,j} \frac{d^2}{dt^2} u_{i,j} = c_1 (u_{i+1,i} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) / h^2 + c_2 (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} - 4u_{i,j}) / (\sqrt{2}h)^2 + 2c_2 (w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}) / 4h^2 \quad (5)$$

$$\rho_{i,j} \frac{d^2}{dt^2} w_{i,j} = c_1 (w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}) / h^2 + c_2 (w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1} - 4w_{i,j}) / (\sqrt{2}h)^2 + 2c_2 (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}) / 4h^2 \quad (6)$$

ここで、 $c_1 = \lambda + \mu$, $c_2 = \mu$ とおき、さらに $\lambda = \mu$ を仮定し(これはポアソン比を $\nu=0.25$ とすることに相当する)、 $h \rightarrow 0$ の極限をとると式(5), (6)は式(1),

研究速報

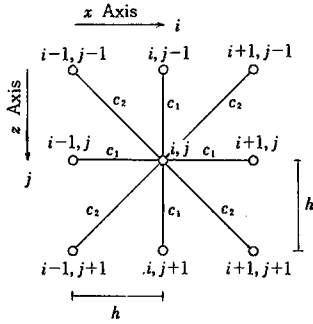


図6 等価質点系モデルの概念図

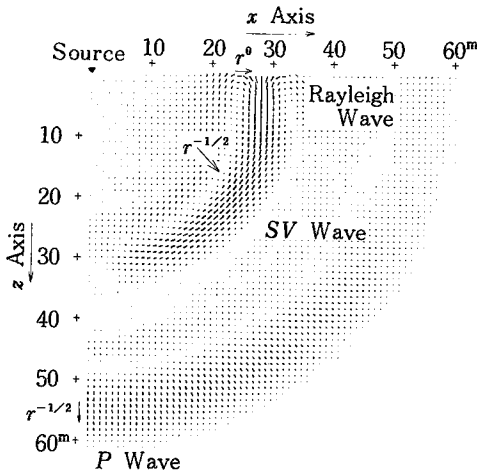


図7 等価質点系モデル法で得られた弾性波の伝播パターン ($\nu=0.25$)

(2) に一致する。

自由表面は存在しない部分の面分を存在する部分で補って、地中部と同一面積になるように評価する。⁵⁾ つまり、式(5)、(6)と自由表面での式を用いて、弾性波の発生・伝播について数値計算を行うことができる。この計算法を、ここでは等価質点系モデル法と呼ぶことにする。

計算では前述と同じ地盤モデルを用いた。図7に図1と同じ計算ステップの伝播パターンを示す。図1との比較から、大局的には差分法と同一の結果を示している。

3. 表面波特性の検討

地表付近でレイリー波が顕著に現れることは、前述の計算結果からも明らかである。ここでは、レイリー波の理論解と計算で求められた特性を比較・検討する。

レイリー波の理論解によれば、地表面の上下動と水平動の振幅比は次式で表される。

$$\frac{w_0}{u_0} = \frac{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{V_R}{V_S} \right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_R}{V_S} \right)^2}}$$

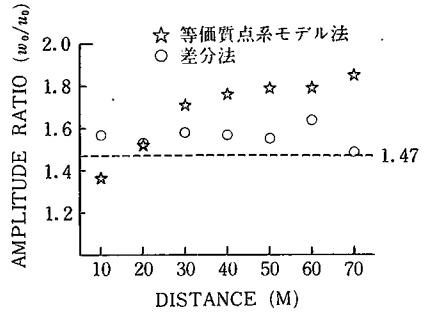


図8 地表面での振幅比

ここに、下添字の“0”は地表における振幅を表す。図8はそれぞれの計算法で求められた上下・水平動波形の最大振幅値から計算された振幅比と上式で求めた振幅比を示したものである。振動源からの距離が2波長以上になると ($r \geq 30$ m) 振幅比は、計算法で異なるが、ほぼ一定値を示している。図2および4から判断して、レイリー波とP波が明瞭に分離される距離は $r=30$ m 程度であり、それより大きな距離での主要成分はレイリー波であることから、この傾向を説明することができる。

レイリー波の水平・上下動変位の振幅は深さ方向に減衰する。波長をLとした場合の振幅分布の理論式は、地表面での振幅値を単位にとって

$$\frac{u}{u_0} = \left[\exp\left(-5.325 \frac{z}{L}\right) - 0.577 \exp\left(-2.471 \frac{z}{L}\right) \right] / 0.423$$

$$\frac{w}{w_0} = \left[0.848 \exp\left(-5.325 \frac{z}{L}\right) - 1.468 \exp\left(-2.471 \frac{z}{L}\right) \right] / 0.650$$

で表される。図9、10は差分法・等価質点系モデル法から得られた振動源より40m地点での水平・上下動の深さ方向振幅分布を理論曲線と比較して示したものである。計算法の違いで多少の差異はあるが、本質的には両者は理論値によく一致している。

振動源より10m間隔の格子点において、等価質点系モデル法および差分法で計算された最大振幅値の比を上下・水平成分のそれぞれに対して比較した。図11に、このようにして求めた地表面、伏角45度方向および鉛直方向の比を示す。両計算法による結果は、地中部では上下・水平成分ともほとんど同じとみなされるが、地表面では等価質点系モデル法が差分法に比べ、上下成分は10%、水平成分は20%程度小さな値を示している。これは地表面の評価法の違いに起因するものと考えられ、今後検討が必要である。

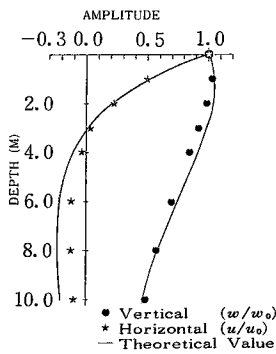


図9 差分法による深さ方向振幅分布 ($r=40$ m)

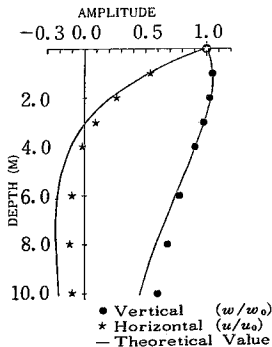


図10 等価質点系モデル法による深さ方向振幅分布 ($r=40$ m)

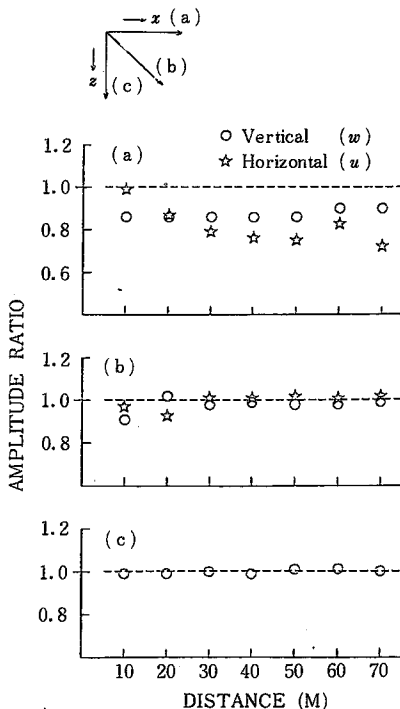


図11 等価質点系モデルと差分法による最大振幅の比

4. あとがき

以上、弾性波の発生・伝播に関する2つの計算法を紹介し、ポアソン比 $\nu=0.25$ の半無限弾性体地盤モデルの数値計算を行い、その結果と解析的な結果について比較・検討した。

2つの計算法の結果は部分的には多少の差異があるが、全体的には良く一致している。それぞれの計算法の特徴を簡単にまとめれば、以下のようになろう。

差分法ではポアソン比に関係なく解を求めることができる。しかし、盛土・切土・溝のような任意の地盤形状の解を求めるとき、任意形状の地表面を応力条件のみで評価できない場合がある。^{6,7)} この問題を解決できれば、その応用性はさらに広がるであろう。

一方、連続体である地盤を質点と伸縮バネで置き換え、力学的な釣り合いで解を求める等価質点系モデル法は任意の地盤形状への応用が容易である。たとえば、盛土・切土・溝等による波動伝播特性の定性的な解明には有効であろう。しかし、現状では、ポアソン比 $\nu=0.25$ の制約があり、さらに境界面(地表)での各成分の振幅値が差分法より小さな値を示す。これらの問題を含め、交通振動の伝播に関係した応用例は現在検討中である。

(1980年9月3日受理)

参考文献

- 1) 佐藤泰夫, 弾性波動論, 岩波書店, 1978
- 2) Alterman, Z. S., and F. C. Karal, Propagation of Elastic Waves in Layered Media by Finite Difference Methods, Bull. Seism. Soc. Amer., 58, 1968, 367~398
- 3) Woods, R. D., Screening of Surface Waves in Soils, J. Soil Mech and Found. Div., Proc. ASCE, 94, 1968, 951~979
- 4) 松沢武雄, 地震の理論とその応用, 東大出版会, 1976
- 5) Satô, Y., Characteristic Oscillation of a Rectangular Elastic Body by the Simulation Using a Framework Model, J. Phys. Earth, 26, 1978, 1~11
- 6) Alterman, Z. S. and A. Rotenberg, Seismic Waves in a Quarter Plane, Bull. Seism. Soc. Amer., 59, 1968, 347~368
- 7) Satô, Y., A Numerical Experiment on Wave propagation in an Elastic Quarter Space, J. Phys. Earth, 20, 1972, 287~299