

上界接近法の塑性加工への応用

Application of Upper Bound Analysis to Plastic Metal Working

木内 学*
Manabu KIUCHI

塑性加工の分野において、所要の加工力や被加工材の変形挙動に関する実用的な解析手法として広く用いられている、上界接近法の概要とその特性を説明し、さらに、筆者らがこれまで行ってきた種々の解析例の紹介を通して、この解析手法の有効性と可能性を示す

1. ま え が き

与えられた加工条件の下での材料の塑性変形を解析する場合、塑性力学的諸条件すなわち、降伏条件・釣合条件・流動法則・境界条件などを満足する応力・ひずみあるいは変位の正解を求めることは一般に非常に困難であり、多くの場合、近似的な解を得ることができるにすぎない。現在、塑性加工時の被加工材の変形挙動を解析する手法としては、(1) スラブ法、(2) エネルギー法、(3) 迂り線場法、(4) 上界法または上界接近法、(5) 有限要素法、などが用いられている。これらの解析法はおのおの特徴あるいは利点・欠点を有しており、目的に応じて使い分けられているが、その一部の適用例を除いて、いずれも上述の諸条件の一部を満足する近似解法としての役割を果たしているに過ぎない、ということができる。

このうち上界法または上界接近法は、塑性力学におけるいわゆる第2変分原理あるいは上界定理、すなわち「材料内に任意の動的可容速度場を仮定した場合、その変形およびすべりの仕事率は、真の外力が材料との接触面においてなす仕事率よりも小さくない」を用いて、剛塑性体近似した材料の加工に要する消費動力あるいは荷重などの上界解を求める手法である。この解析手法は、Hillにより基礎となる理論が示された後¹⁾、Kudo²⁾、Kobayashi, Avitzur³⁾、その他多くの研究者によって理論的な拡張が図られるとともに、実際の変形・加工問題への広範な適用が試みられ、各種の押し出し・引抜き・鍛造加工、等の解析に大きな役割を果たしてきたことはよく知られているとおりでである。本稿ではこの上界法または上界接近法の概要と問題点について、いくつかの応用例を示しつつ説明する。

2. 上界定理とその適用

上界定理については種々の数式化が行われているが、工藤・高橋による一般的な数式表示は以下の如くである。²⁾

$$\int_{S_c} \sum_i F_i(\dot{U}_i) dS \leq \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ij}^k \dot{\epsilon}_{ij}^k dV + \int_{r_k} k(\Delta \dot{u}_T^k) dS + \int_{S_c} \sigma_f(\Delta \dot{u}_T^k) dS - \int_{S_F} \sum_i F_i(\dot{u}_i^k) dS \quad (1)$$

ただし

- \dot{u}_i^k : 材料の動的可容速度
- $\dot{\epsilon}_{ij}^k, \sigma_{ij}^k$: \dot{u}_i^k より求められるひずみ速度, 応力
- F_i : 外力
- S_F : 外力の与えられる境界面
- S_c : 外部物体との接触面
- Γ^k : 動的可容速度場の不連続面
- \dot{U}_i : 外部物体との接触面における速度
- $\Delta \dot{u}_T^k$: Γ^k 上における動的可容相対すべり速度
- k : 材料のせん断降伏応力
- σ_f : 相対すべりに要するせん断応力

上式の物理的意味は前項で述べたとおりであるが、この上界定理を適用する手順を簡単にまとめると次のようになる。(1)材料の変形流動状況を近似する適当な動的可容速度場を仮定する。この動的可容速度場は与えられた速度の境界条件と体積一定の条件を満足する。(2)動的可容速度場から変形に伴う仕事率またはエネルギー消費率を求める。(3)仕事率またはエネルギー消費率を最小にするように動的可容速度場の修正を図り、可能な範囲内の最適な(最小のエネルギー消費率を与える)動的可容速度場を探し出す。(4)最終的に得られた動的可容速度場から、エネルギー消費率と合わせて、加工に要する荷重、その他必要な諸量を算出する。この手順のうち、エネルギー消費率を最小化する動的可容速度場の検

* 東京大学生産技術研究所 第2部

索については、動的可容速度場を仮定する際に、それを規定する主たる因子と考えられるもの、たとえば塑性域の形状や大きさを規定する因子などを可変のパラメータ(準独立変数)として含ませておき、このパラメータの変化を通してエネルギー消費率の最小化を図る、というような方法が採られている。その際、解析的処理によって直接的にエネルギー消費率の極値を求めることが可能な場合と、試行錯誤を繰り返す数値計算に頼らざるを得ない場合がある。材料の変形流動が複雑化するとともに、動的可容速度場を仮定する際の自由度、すなわち、可変パラメータの数が増し、解析的処理はもちろん数値計算によっても、エネルギー消費率の最小化を図ることが難しくなる。しかしながら、現在では、数値計算の技術は著しく進歩しており、各所のコンピューターセンターのライブラリーには、この種の計算のための汎用プログラムが備えられているので、これを利用することによって、相当高次の問題まで処理が可能となっている。

3. 平面押し・引抜き問題への応用¹⁾

平面変形問題として最も基礎的なものの一つに図1に示す平板ダイスによる板の押し・引抜き加工がある。この場合、ダイス内における被加工材の流動状況を近似する動的可容速度場としては、種々の形態のものが考えられるが、以下にその代表的なものを比較検討してみる。

図2に示す速度場は、Cylindrical Fieldと呼ばれ、ダイス頂点を中心とする二つの同心円筒面で示される剛塑性境界を仮定し、これにより区切られた塑性域内で、材料の各点はダイスの頂点に向かう半径方向速度成分のみを有する、とするものである。半径方向速度は次式で示され、

$$v = v_f \cdot r_f \cdot \frac{\cos \theta}{r} = v_o \cdot r_o \cdot \frac{\cos \theta}{r} \quad (2)$$

この速度場をもとに計算される押し・引抜きに必要な無次元化加圧力または引抜き応力は次式となる。

$$\left[\left(\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_o} \right) - \left(\frac{\sigma_{xb}}{\sigma_o} \right) \right]_c = \frac{2}{\sqrt{3}} f(\alpha) \cdot \ln \left(\frac{t_o}{t_f} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{m}{2} \cot \alpha \cdot \ln \left(\frac{t_o}{t_f} \right) + m \frac{t}{t_f} \right] \quad (3)$$

ただし、

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sin \alpha} \int_0^\alpha \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \theta} \cdot d\theta \quad (4)$$

α = ダイス半角, σ_{xf} = 前方張力, σ_{xb} = 後方張力

t_o = 入口板厚, t_f = 出口板厚, m = 摩擦定数である。

この結果から明らかなように、Cylindrical Fieldにおいては動的可容速度場が一義的に仮定されるために、その最適化すなわち消費エネルギーの最小化を図る余地がない点に制約がある。

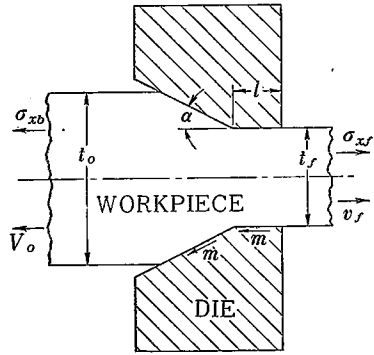


図1 平面押し・引抜き加工のダイスと被加工材の形状

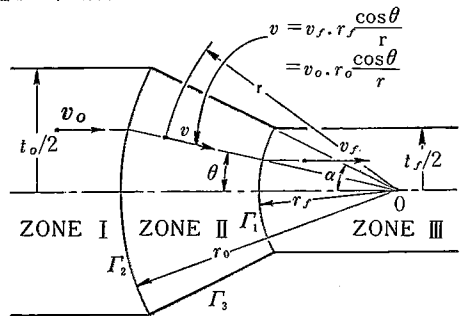


図2 Cylindrical Field の概要

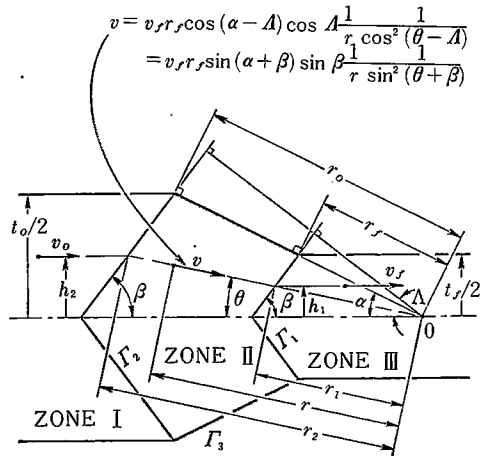


図3 Trapezoidal Field の概要

図3は二つの平行平面で剛塑性境界を仮定した Trapezoidal Field と呼ばれる動的可容速度場である。剛塑性境界の形状のほかは Cylindrical Field と同様の考え方が採られており、塑性域内における半径方向速度は次式で与えられる。

$$v = v_f r_f \sin(\alpha + \beta) \sin \beta \frac{1}{r \sin^2(\theta + \beta)} \quad (5)$$

また押し・引抜き応力は次式となる。

$$\left[\left(\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_o} \right) - \left(\frac{\sigma_{xb}}{\sigma_o} \right) \right]_{rz} = \frac{2}{\sqrt{3}} f(\alpha, \beta) \cdot \ln \left(\frac{t_o}{t_f} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{\sin\alpha} \left[-\cot(\alpha+\beta)\cot\beta \right. \\
 & + \cot^2\beta + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2(\alpha+\beta)} - \frac{1}{\sin^2\beta} \right) \\
 & \left. + \frac{1}{2} m \frac{1}{\sin^2(\alpha+\beta)} \ln\left(\frac{t_0}{t_f}\right) \right] + \frac{2}{\sqrt{3}} m \frac{l}{t_f} \quad (6)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 f(\alpha, \beta) = & \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{\sin\alpha} \left[-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{2\sin^2(\alpha+\beta)} \right. \\
 & \left. + \frac{\cos\beta}{2\sin^2\beta} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right| \right] \quad (7)
 \end{aligned}$$

Trapezoidal Field の場合には、剛塑性境界の傾角 β を任意に選べるので、これが可変パラメータとなり、(6)式は β に関して最適化することが可能であり、また必要である。ただし最適化の処理を解析的に行うことは困難であり、数値的に行わざるを得ない。

図4に示す動的可容速度場は Uni-Triangular Field と呼ばれるもので、上述の速度場とは考え方が基本的に異なる。この速度場では、中央面上で交わる二つの平面状の速度不連続面を仮定し、材料の塑性変形はこれら速度不連続面上で起こるせん断変形のみと考える。ダイス面を一辺とする三角形領域の内部の材料の流れはダイス壁に平行かつ一様とし、その速度は次式で示される。

$$v = v_f \frac{\sin\beta_1}{\sin(\beta_1+\alpha)} = v_0 \frac{\sin\beta_2}{\sin(\beta_2-\alpha)} \quad (8)$$

その結果、押出し・引抜き応力は次式となる。

$$\begin{aligned}
 \left[\left(\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_0} \right) - \left(\frac{\sigma_{xb}}{\sigma_0} \right) \right]_{UT} = & \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{(t_f/2)\cot\alpha + X_0} \\
 & \cdot \left[\left(\frac{2}{t_f} \right) \left\{ X_0^2 + \left(\frac{t_f}{2} \right)^2 \right\} + \left(\frac{2}{t_0} \right) \left\{ (L - X_0)^2 + \left(\frac{t_0}{2} \right)^2 \right\} \right. \\
 & \left. + m \frac{L}{\cos\alpha \sin\alpha} \right] + \frac{2}{\sqrt{3}} m \frac{l}{t_f} \quad (9)
 \end{aligned}$$

ここで X_0 は速度不連続面の交線の位置を示す可変パ

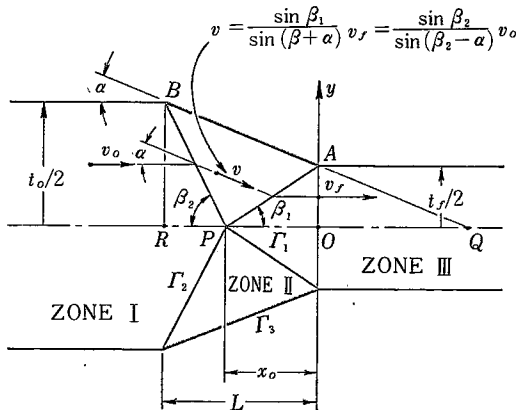


図4 Uni-Triangular Field の概要

ラメータであり、(9)式は X_0 に関して最適化が可能である。 X_0 の最適値は次の微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial X_0} \left[\left(\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_0} \right) - \left(\frac{\sigma_{xb}}{\sigma_0} \right) \right]_{UT} = 0 \quad (10)$$

を解くことにより次のように求められ、

$$\begin{aligned}
 (X_0)_{opt} = & \frac{1}{2} t_f \left[-\cot\alpha \right. \\
 & \left. + \sqrt{\frac{1}{(t_f/t_0)\sin^2\alpha} \left\{ 1 + \frac{1-t_f/t_0}{1+t_f/t_0} \right\}} \right] \quad (11)
 \end{aligned}$$

この結果を(9)式に代入して、押し出し・引抜き応力の最適解は次式となる。

$$\begin{aligned}
 \left[\left(\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_0} \right) - \left(\frac{\sigma_{xb}}{\sigma_0} \right) \right]_{UT, (X_0)_{opt}} = & g \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{4}{\sqrt{3}} \cot\alpha \\
 & + \frac{2}{\sqrt{3}} m \frac{l}{t_f} \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\text{ただし、} g = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(1+\lambda)^2 + (1-\lambda^2)m}{\lambda}}, \quad \lambda = \frac{t_f}{t_0} \quad (13)$$

Uni-Triangular Field の考え方を拡張したのが図5に示す Multi-Triangular Field である。これはダイス内に複数個の速度不連続面の組、あるいは複数個の三角形領域を考え、材料の各点は押し出し・引抜き方向とダイス面に平行な方向とに交互に方向を変えながら流れていくがその速度は各領域で一様であり、実際の塑性変形は速度不連続面上でのせん断変形のみである、とする考え方である。図において第 i 番目の三角形領域における速度は次式で示される。

$$v^{(i)} = v_{i-1} \frac{\sin\beta_{i2}}{\sin(\beta_{i2}-\alpha)} = v_i \frac{\sin\beta_{i1}}{\sin(\beta_{i1}+\alpha)} \quad (14)$$

ただし、 β_{i1} 、 β_{i2} は第 i 番目の速度不連続面の組の中央面に対する傾角であり、 v_{i-1} 、 v_i はその上流側・下流側での押し出し・引抜き方向の速度である(図5参照)。この速度場から計算される押し出し・引抜き応力は、各速度不連続面の傾角 β_{i1} 、 β_{i2} またはその交点の位置 X_{0i} について最適化することが可能であり、その結果得られる応力の最適解は次式となる。

$$\begin{aligned}
 \left[\left(\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_0} \right) - \left(\frac{\sigma_{xb}}{\sigma_0} \right) \right]_{MT, (X_{0i})_{opt}} = & \sum_{i=1}^n \left(g_i \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{4}{\sqrt{3}} \cot\alpha \right) \\
 & + \frac{2}{\sqrt{3}} m \frac{l}{t_f} \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\text{ただし } g_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(1+\lambda)^2 + (1-\lambda^2)m}{\lambda}}, \quad \lambda = \frac{t_i}{t_{i-1}} \quad (16)$$

また $(X_{0i})_{opt}$ は次式で示される。

$$(X_{0i})_{opt} = \frac{1}{2} t_i (-\cot\alpha + \sqrt{D_i^*}) \quad (17)$$

$$D_i^* = \frac{1}{(t_i/t_{i-1})\sin^2\alpha} \left\{ 1 + \frac{1-t_i/t_{i-1}}{1+t_i/t_{i-1}} m \right\} \quad (18)$$

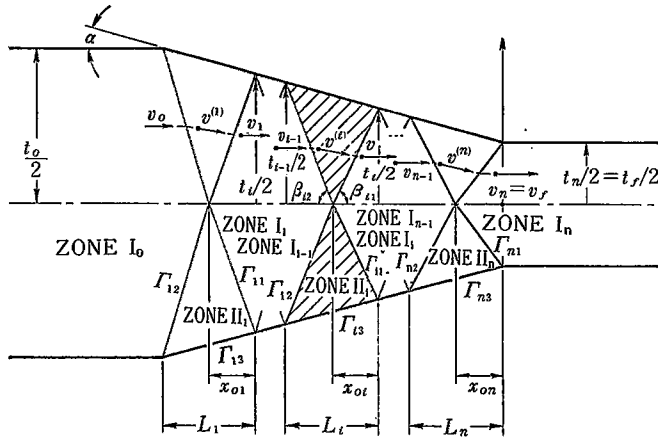


図5 Multi-Triangular Field の概要

特別の場合として、ダイス内の材料を n 個の領域に分割する際に次式が満足されるようにすると、

$$\lambda = \left(\frac{t_i}{t_{i-1}} \right) = \left(\frac{t_f}{t_0} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (19)$$

押し・引抜き応力の最適解は次のようになる。

$$\left[\left(\frac{\sigma_{zf}}{\sigma_0} \right) - \left(\frac{\sigma_{zb}}{\sigma_0} \right) \right]_{MT, (x_{0i})_{opt}, \lambda = (t_f/t_0)^{\frac{1}{n}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{n}{\sin \alpha} \left\{ \sqrt{\frac{(1+\lambda)^2 + (1-\lambda^2)m}{\lambda}} - 2 \cos \alpha \right\} + m \frac{l}{t_f} \right] \quad (20)$$

以上の4種類の動的相容速度場による上界解を比較するために数値計算を行った結果を図6に示す。ただし計算条件は圧下率 $r=25\%$ 、摩擦定数 $m=0.05$ 、Multi-Triangular Field における分割形態は $(t_i/t_{i-1}) = (t_f/t_0)^{\frac{1}{n}}$ としてある。図から明らかのように、Cylindrical Field と最適化された Trapezoidal Field の解はほとんど一致し、また Uni-Triangular Field, Multi-Triangular Field の解は、最適ダイス角の近傍で、上の2種

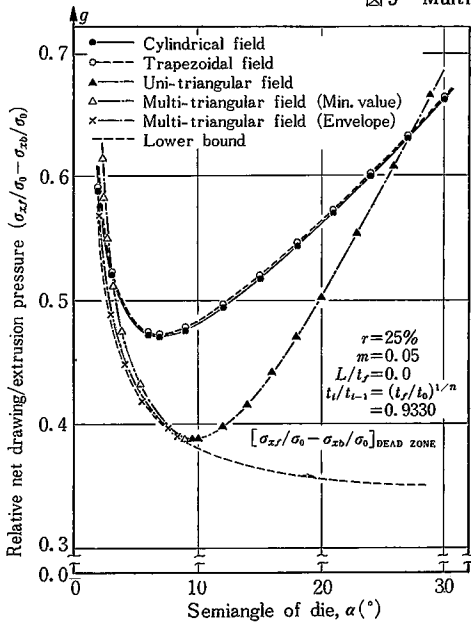


図6 各種動的相容速度に基づく押し・引抜き応力の計算値の比較

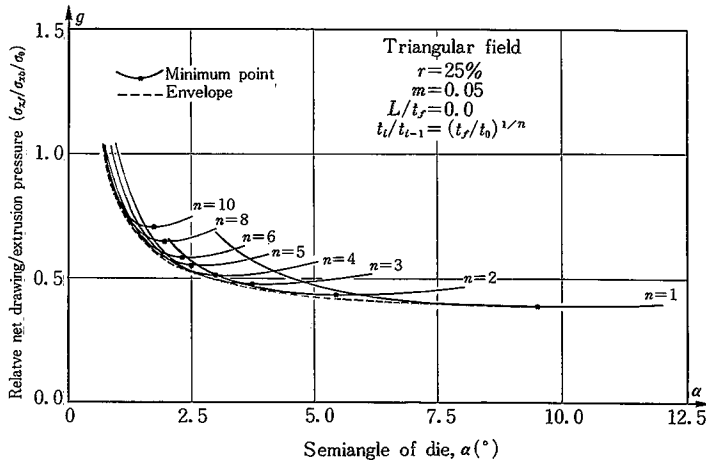


図7 Uni- and Multi-Triangular Fields による解とそれらの包絡線

類の動的可容速度場の解よりも秀れていることが判る。

ところで (20) 式で示した Multi-Triangular Field の解で、分割数 n を連続な実数とみなし、次の方程式

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[\left(\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_0} \right) - \left(\frac{\sigma_{xb}}{\sigma_0} \right) \right]_{M.T., (x_{0i})_{opt}, \lambda=(t_f/t_0)^{1/2}} = 0 \quad (21)$$

を解くことにより、分割数 $n=1, 2, 3, \dots$ に対応する曲線群の包絡線を得ることができる(図7参照)。図6において一点鎖線は包絡線を示し、他方破線は下界解を示す。図より最適ダイス角より小さいダイス角の範囲では、この上界解の包絡線が下界解にほとんど一致することが判るが、このことは上界接近法もその適用如何で、非常に正解に近い解を与え得ることを示しており、興味深い結果であると言える。

4. 圧延加工への応用^{3),5)}

図8に示すような板材の圧延加工において、ロールギャップ内の材料の流れを示す動的可容速度場としては、扇形速度場、すなわち、上下のロール面上の対応する点における接線の交点を中心とし、この接線を半径とする円弧上の各点の速度が全てこの中心点に向かっており、かつその大きさが一様である、とする速度場が用いられる場合が多い。この速度 v はロール接触角 α の関数として近似的に次式となる。

$$v = \frac{v_f \cdot t_f}{R_0} \frac{1}{t_f/R_0 + \alpha^2} = \dot{U} \frac{t_f/R_0 + \alpha_n^2}{t_f/R_0 + \alpha^2} \quad (22)$$

ただし R_0 = ロール半径、 t_f = 出側板厚、 v_f = 出側速度、 α_n = 中立角、 \dot{U} = ロール周速、である。この速度から全エネルギー消費率 J^* は次式のように求まる。

$$J^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \dot{U} t_f \left[\left(1 + \frac{R_0}{t_f} \alpha_n^2 \right) \left\{ \ln \left(\frac{t_0}{t_f} \right) + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{t_f}{R_0}} \cdot \sqrt{\frac{t_0}{t_f} - 1} + \frac{\sigma_{xb} - \sigma_{xf}}{(2/\sqrt{3})\sigma_0} + m \sqrt{\frac{R_0}{t_f}} \left(2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{R_0}{t_f}} \cdot \alpha_n - \tan^{-1} \sqrt{\frac{t_0}{t_f} - 1} \right) \right\} + m \frac{R_0}{t_f} (\alpha_2 - 2\alpha_n) \right] \quad (23)$$

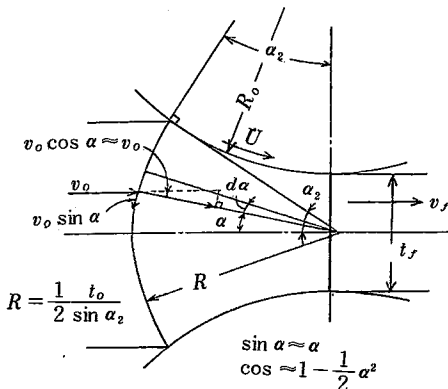


図8 板圧延の扇形速度場の概要

上式に含まれる中立角 α_n は次式を満足する。

$$\frac{\partial J^*}{\partial \alpha_n} = 0 \quad (24)$$

これより α_n は次のように求められる。

$$\alpha_n = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{t_f}{R_0}} \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{t_0}{t_f} - 1} - \frac{1}{m} \sqrt{\frac{t_f}{R_0}} \left\{ \ln \left(\frac{t_0}{t_f} \right) + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{t_f}{R_0}} \sqrt{\frac{t_0}{t_f} - 1} + \frac{\sigma_{xb} - \sigma_{xf}}{(2/\sqrt{3})\sigma_0} \right\} \right] \quad (25)$$

(23) 式に (25) 式の α_n を代入して全エネルギー消費率の最適解を求め、さらにその結果より圧延動力、圧延トルク等を計算できる。しかしながら、このような通常の板圧延の解析に上界法または上界接近法を適用することは、必ずしも得策ではない。なぜならば圧延加工に関しては、スラブ法に基づく極めて有力な理論体系が確立されており、その成果をのぞく結果を上界法または上界接近法により導くことは容易でないからである。

ところが、圧延加工の分野においても、その重要性にもかかわらず他の解析手法の適用が難しく、未解決のまま残されており、上界接近法が有力な手がかりとなる問題が存在する。たとえば圧延材内部の欠陥の挙動に関する問題もその一つである。鋼塊内部の微小欠陥(空隙)を、圧延加工により閉鎖・圧着させ、健全な内部組織を得ることは、分塊圧延・厚板圧延などの過程で極めて重要な課題である。この問題について、上界接近法に基づくリミットアナリシスが試みられ、相応の成果をあげている。その考え方の概要は次のとおりである。まず、図9, 10に示すように、空隙は被圧延材の厚さ方向の中央に位置する場合を対象とし、圧延中の材料を Zone (I)

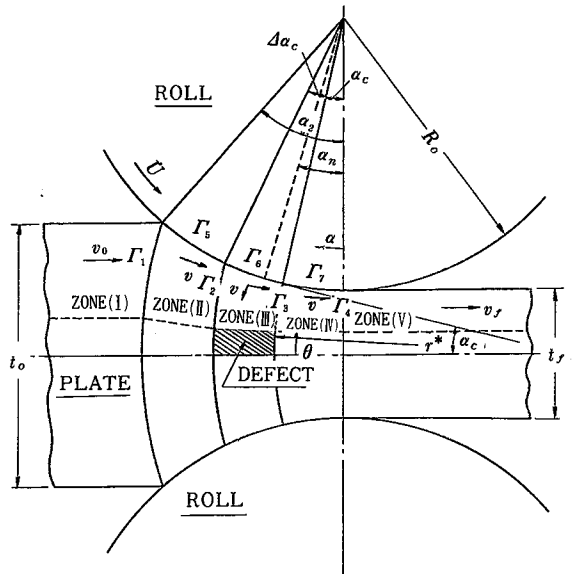
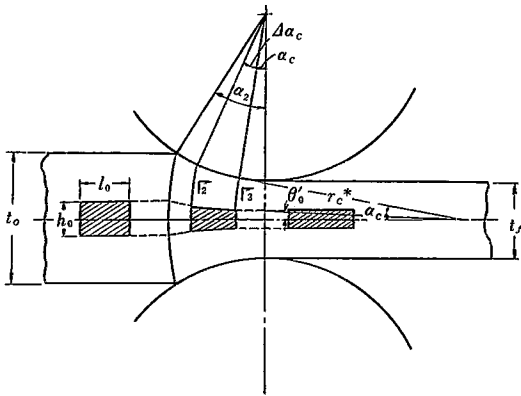


図9 圧延材内部の空隙の閉鎖挙動に関する解析モデルと速度場

表1 図9の解析モデルに対応する動的可容速度場一覧表

	$0 \leq \alpha_n \leq \alpha_c$	$\alpha_c \leq \alpha_n \leq \alpha_c + \Delta\alpha_c$	$\alpha_c + \Delta\alpha_c \leq \alpha_n \leq \alpha_2$
ZONE(II) $v = \frac{B}{A + \alpha^2}$ $u = 0$	$A = t_f/R_0$ $B = (1 + \beta)\dot{U}(t_f/R_0 + \alpha_n^2)$	$A = t_f/R_0$ $B = \dot{U} \frac{1 + \beta}{(1 + \beta \frac{\alpha_n - \alpha_c}{\Delta\alpha_c})} (t_f/R_0 + \alpha_n^2)$	$A = t_f/R_0$ $B = \dot{U}(t_f/R_0 + \alpha_n^2)$
ZONE(III) $v = \frac{D + E\alpha}{A + \alpha^2}$ $u = F \left(1 - \frac{\theta}{\alpha}\right)$	$A = t_f/R_0$ $D = \left(1 - \beta \frac{\alpha_c}{\Delta\alpha_c}\right) \dot{U}(t_f/R_0 + \alpha_n^2)$ $E = \beta \frac{1}{\Delta\alpha_c} \dot{U}(t_f/R_0 + \alpha_n^2)$ $F = \frac{1}{2} \beta \frac{1}{\Delta\alpha_c} \dot{U}(t_f/R_0 + \alpha_n^2)$	$A = t_f/R_0$ $D = \dot{U} \frac{\left(1 - \beta \frac{\alpha_c}{\Delta\alpha_c}\right) (t_f/R_0 + \alpha_n^2)}{\left(1 + \beta \frac{\alpha_n - \alpha_c}{\Delta\alpha_c}\right)}$ $E = \dot{U} \frac{\beta \frac{1}{\Delta\alpha_c} (t_f/R_0 + \alpha_n^2)}{\left(1 + \beta \frac{\alpha_n - \alpha_c}{\Delta\alpha_c}\right)}$ $F = \frac{1}{2} \dot{U} \frac{\beta \frac{1}{\Delta\alpha_c} (t_f/R_0 + \alpha_n^2)}{\left(1 + \beta \frac{\alpha_n - \alpha_c}{\Delta\alpha_c}\right)}$	$A = t_f/R_0$ $D = \left(1 - \beta \frac{\alpha_c}{\Delta\alpha_c}\right) \frac{\dot{U}}{1 + \beta} (t_f/R_0 + \alpha_n^2)$ $E = \beta \frac{1}{\Delta\alpha_c} \frac{\dot{U}}{1 + \beta} (t_f/R_0 + \alpha_n^2)$ $F = \frac{1}{2} \beta \frac{1}{\Delta\alpha_c} \frac{\dot{U}}{1 + \beta} (t_f/R_0 + \alpha_n^2)$
ZONE(IV) $v = \frac{C}{A + \alpha^2}$ $u = 0$	$A = t_f/R_0$ $C = \dot{U}(t_f/R_0 + \alpha_n^2)$	$A = t_f/R_0$ $C = \dot{U} \frac{1}{\left(1 + \beta \frac{\alpha_n - \alpha_c}{\Delta\alpha_c}\right)} (t_f/R_0 + \alpha_n^2)$	$A = t_f/R_0$ $C = \frac{\dot{U}}{1 + \beta} (t_f/R_0 + \alpha_n^2)$



$$\Delta\alpha_c = l_0 t_0 / (R_0 (t_f + R_0 \alpha_c^2))$$

$$\theta_0 = \left[\frac{1}{2} h_0 (t_f + R_0 \alpha_c^2) / i_0 \right] / \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_c} \right) (t_f + R_0 \alpha_c^2) \right] = h_0 \alpha_c / i_0$$

l_0 : INITIAL LENGTH OF DEFECT

h_0 : INITIAL HEIGHT OF DEFECT

図10 圧延材内部の空隙の幾何学的関係

~(V)に分割する。Zone(I), (V)は剛体域であり、おのおの様な水平速度 v_0, v_f を有する。Zone(II), (III), (IV)は塑性域であり、このうち Zone(III)は空隙の長さに対応する接触角度 $\Delta\alpha_c$ を有し、境界 Γ_2, Γ_3 により Zone(II), (IV)から分けられている。圧延中に空隙が閉鎖する場合には、Zone(III)の材料が圧延加工を受けつつ空隙に向かって流入するものとする。Zone(II), (IV)および(III)においては上述の扇形速度場を

用いるものとし、その半径方向速度を v 、Zone(III)における回転(θ)方向速度を u で表す。中立角 α_n と空隙の位置 α_c および大きさ $\Delta\alpha_c$ の大小関係により、各 Zone における u, v をおのおのまとめて表1に示す。

この動的可容速度場から全エネルギー消費率 J^* を求めることができ、一般に次式のように表される。

$$J^* = J^*(\sigma_0, R_0, \dot{U}, t_f, \alpha_n, \alpha_2, m, \alpha_c, \Delta\alpha_c, \theta_0, \beta^*) \quad (26)$$

ただし、 σ_0 = 材料の変形抵抗、 $\theta_0 = \theta$ 方向にみた空隙をささむ角度、 $\beta^* = \beta / \Delta\alpha_c$ である。ここで β は体積流れ一定の条件に導入されたパラメーターであり、次式を満足する。

$$v_0 t_0 = (1 + \beta) v_f t_f \quad (27)$$

$\beta = 0$ は、空隙の閉鎖は起こらず、単純に圧延された分だけ延伸する場合に相当し、 $\beta > 0$ の場合は、 $v_0 t_0 > v_f t_f$ となり空隙の閉鎖が起こることを意味している。

圧延中に空隙の閉鎖が起こるか否かの判定は次式によって行うことができる。すなわち次の不等式が成立する場合に

$$(\partial J^* / \partial \beta^*)_{\beta=0} < 0 \quad (28)$$

は、空隙の閉鎖が起こると考えることができる。実際に数値計算を行った1例を図11, 12に示す。図中に示す変数は、 h_0 = 空隙の初期厚さ、 l_0 = 空隙の初期長さ、 t_0 = 被圧延材の初期厚さ、である。図より、ロールギャップ内にかみ込まれた空隙は、圧下率が限界値以上であれば

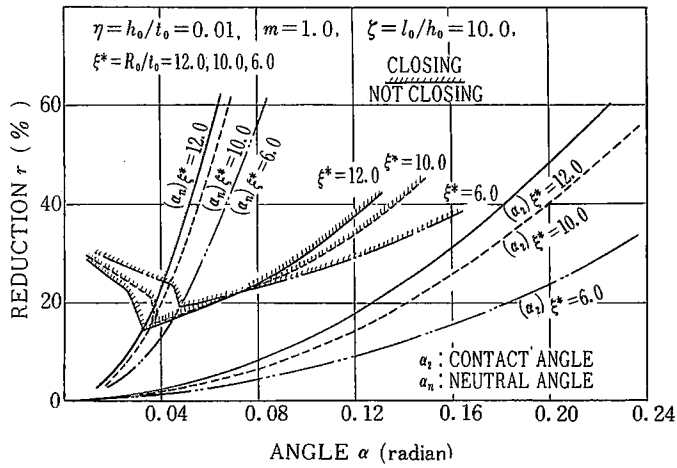


図11 ロール半径と板厚の比 (R_0/t_0) が空隙の閉鎖限界線に与える影響

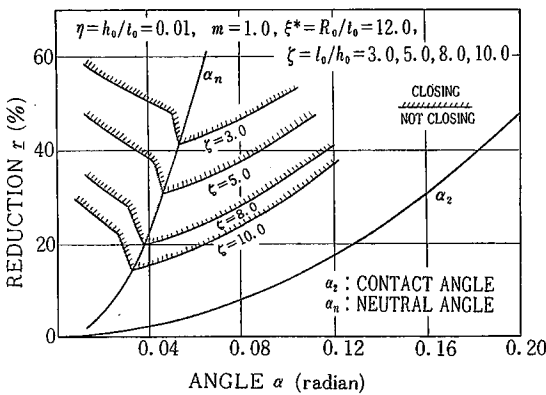


図12 空隙の初期長さ と厚さの比 (l_0/h_0) が閉鎖限界線に与える影響

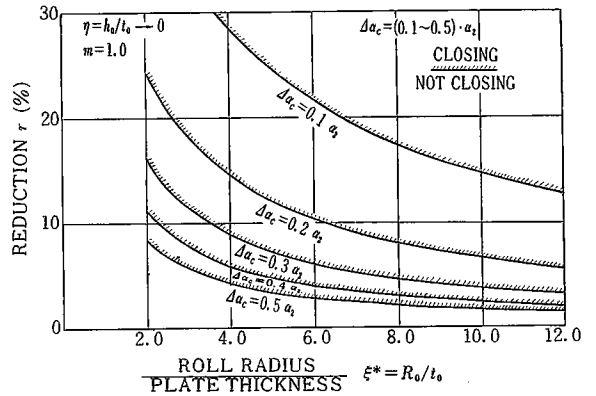


図13 空隙の閉鎖終了限界線に与える空隙寸法の影響

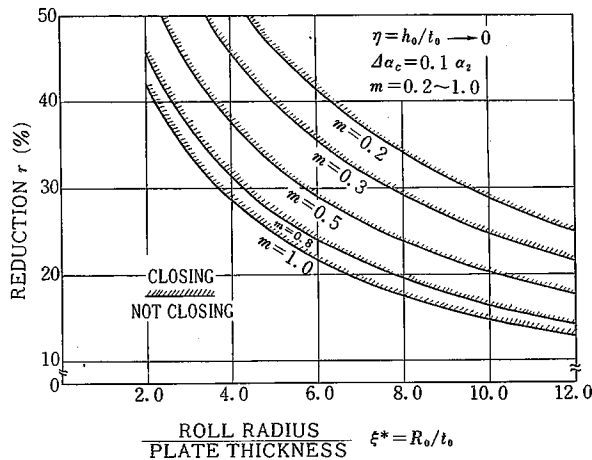


図14 空隙の閉鎖終了限界線に与える摩擦定数 m の影響

中途から閉鎖を開始し、出口に近づく閉鎖を中止することが判る。図 11 はロール半径と板厚の比 (R_0/t_0)、図 12 は空隙の初期長さの比 (l_0/h_0) が、この空隙の閉鎖限界線に与える影響について示したものであるが、他の加工条件因子の影響についても同様に解析することが可能である。

上述の解析をさらに発展させて、空隙が閉鎖し終わる限界の圧延条件を計算した結果を図 13, 14 に示す。これらの結果は、従来経験的に得られていた結果と良く対応しており、この種の問題の解析的検討に対する上界接近法の有用性が示された好例と考えることができる。

5. 棒・線材の押し出し引抜き加工への応用⁶⁾

第 3 節で述べた平面ひずみ問題の場合と同様、棒・線材のいわゆる軸対称押し出し・引抜き加工についても、種々の動的可容速度場が提案されている。その代表的なものは図 15 に示すいわゆる Spherical Field と呼ばれるもので、二つの同心球面で表される剛塑性境界内の塑性域において、材料はダイス頂点に向かう半径方向流れのみを構成すると仮定する。このときの半径方向速度 v は次式で与えられ、

$$\dot{U}_r = v = -v_f r_f^2 \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad \dot{U}_\theta = \dot{U}_\varphi = 0 \quad (29)$$

これより押し出し・引抜き応力については次式が導かれる。

$$\left[\left(\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_0} \right) - \left(\frac{\sigma_{xb}}{\sigma_0} \right) \right]_s = 2f(\alpha) \ln \left(\frac{R_0}{R_f} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} - \cot \alpha + m(\cot \alpha) \ln \frac{R_0}{R_f} + m \frac{L}{R_f} \right] \quad (30)$$

$$\text{ただし } f(\alpha) = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left\{ 1 - (\cos \alpha) \sqrt{1 - \frac{11}{12} \sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sqrt{11 \times 12}} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{\frac{11}{12}}}{\sqrt{\frac{11}{12} \cos \alpha + \sqrt{1 - \frac{11}{12} \sin^2 \alpha}}} \right] \right\} \quad (31)$$

また、 α = ダイス半角、 R_0 = 素材半径、 R_f = 製品半径、 L = ダイスベアリング部長さ、である。

最適ダイス角は次の方程式を解くことにより、

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_0} \right) = 0, \quad \text{or} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sigma_{xb}}{\sigma_0} \right) = 0 \quad (32)$$

次式のように求まる。

$$\alpha_{opt} \cong \sqrt{\frac{3}{2} m \ln(R_0/R_f)} \quad (33)$$

図 16 には Triangular Field と呼ばれる速度場を示す。この速度場では、二つの円錐面で表される速度不連続面にはさまれたダイス内の領域 (図 16 の Zone II) で、材料はダイス壁面に平行でかつ一様な速度で流れ、そのため実質的な塑性変形は、速度不連続面におけるせん断変形のみと考える。この速度場は次式となり、

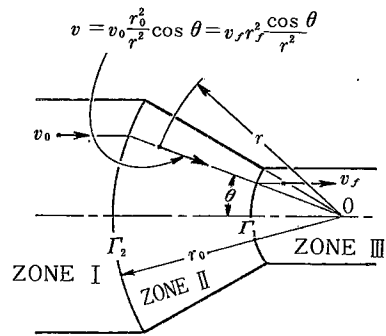


図 15 軸対称押し出し・引抜き加工の Spherical Field の概要 (B. Avitzur)

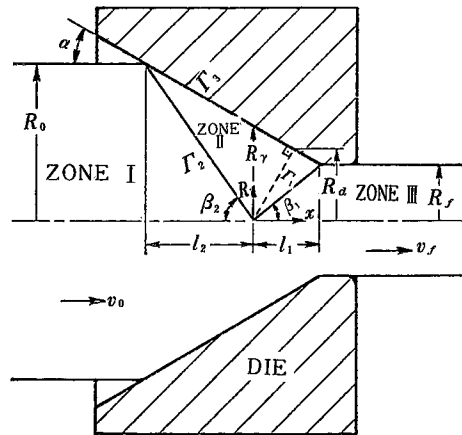


図 16 軸対称押し出し・引抜き加工の Triangular Field の概要 (B. Avitzur)

$$\left. \begin{aligned} v_R &= -K \tan \alpha \left(1 + \frac{x}{R} \tan \alpha \right) \\ v_x &= K \left(1 + \frac{x}{R} \tan \alpha \right) \\ v_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\text{ただし } K = v_f (R_f/R_r)^2 = v_0 (R_0/R_r)^2 \quad (35)$$

これより計算される押し出し・引抜き応力は次式となる。

$$\left[\left(\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_0} \right) - \left(\frac{\sigma_{xb}}{\sigma_0} \right) \right]_r = \frac{1}{\sqrt{3}} (\cot \alpha) \left[F_\alpha \left(\frac{R_0}{R_d} \right) - F_\alpha \left(\frac{R_f}{R_d} \right) \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} (\sin \alpha) \left[\frac{1}{\sin \beta_1 \sin(\beta_1 + \alpha)} + \frac{1}{\sin \beta_2 \sin(\beta_2 - \alpha)} \right] + \frac{2}{\sqrt{3}} m \left[\left(\frac{R_0}{R_d} - \frac{R_f}{R_d} \right) \cot \alpha + \frac{L}{R_f} \right] \quad (36)$$

ただし、

$$F_\alpha(Z) = \sqrt{4 \tan^2 \alpha + (1+Z)^2} - 2 \tan \alpha$$

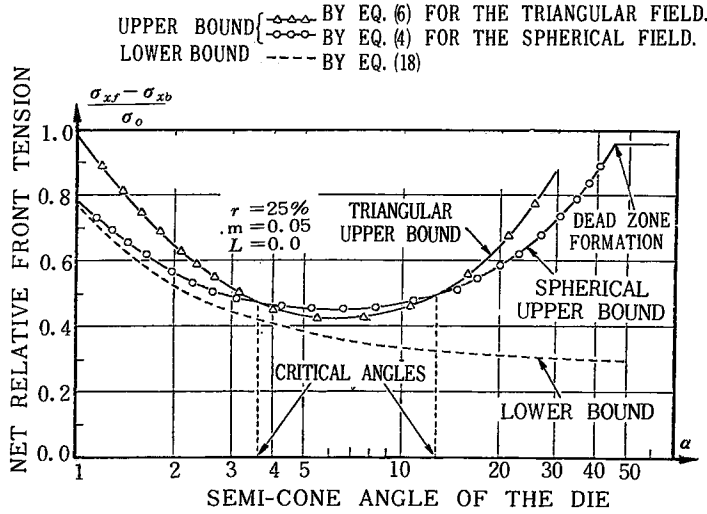


図17 各種動的相容速度場に基づく棒・線材の押し・引抜き応力の計算値の比較 (B. Avitzur)

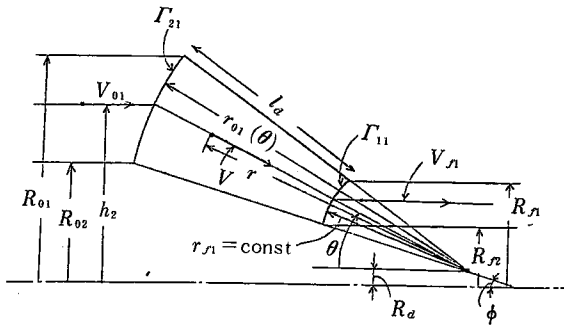


図18 管材の押し、引抜き加工の際の一般化 Spherical Field の概要

$$\begin{aligned}
 & + \operatorname{arcsch}\left(\frac{1-Z}{2 \tan \alpha}\right) + \sqrt{4 \tan^2 \alpha + 1} \\
 & \cdot \left[\operatorname{arcsch}(2 \tan \alpha) - \operatorname{arcsch}\left(\frac{4 \tan^2 \alpha + 1 - Z}{2 Z \tan \alpha}\right) \right] \quad (37)
 \end{aligned}$$

図16に示すように、 β_1, β_2 は二つの速度不連続面(円錐面)の頂角であり、 R_d はこの円錐面の頂点よりダイス面に下した垂線の脚の位置での半径であるが、 R_d の計算方法については省略する。

図17には Avitzur 等による Spherical Field と Triangular Field に基づく押し・引抜き応力の計算結果の比較を示す。図から明らかなように最適ダイス角の近傍では Triangular Field の方がより低い上限解を示すが、ダイス角が小または大きい範囲では、Spherical Field の方がより良い解を与えることが判る。

6. 管材の押し・引抜き加工への応用

管材の押し・引抜き加工、特にプラグあるいはマンデルレルを用いない加工においては、加工条件によって製

品の肉厚あるいは内径が変化するなど棒・線材の場合にはみられない複雑な変形が発生する。このような変形挙動の解析に当たっては上限接近法が非常に有効である。図18には管材の押し・引抜き加工の解析に用いられる動的相容速度場のうちの一般化された Spherical Field と呼ばれるものを示す。ダイス内の塑性域は、中心軸から R_d だけはずれた位置に中心を有し、かつ半径が r_{f1} の円弧と、 $r_{o1}=f(\theta)$ で表される曲線、とで示される剛塑性境界によって入側・出側の剛体域から分けられ、この塑性域内での材料の流れは中心に向かう半径方向流れ V によって示される。

$$V = -V_{f1} \frac{r_{f1} \cos \theta (r_{f1} \sin \theta + R_d)}{r (r \sin \theta + R_d)} \quad (38)$$

ここで V_{f1} は出側の速度、 r は半径方向の位置を表す。上述のように出側境界は半径 r_{f1} の円弧で示されるが、入側境界については、その形状を $r_{o1}=f(\theta)$ とおくと、体積一定の条件と幾何学的関係より $f(\theta)$ に関する次の方程式を導くことができ、

$$V \{ f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta \} = V_{f1} \frac{r_{f1} \cos \theta (r_{f1} \sin \theta + R_d)}{f(\theta) \sin \theta + R_d} \quad (39)$$

これを解いて次の関数形を得る。

$$f(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} \left[\sqrt{2 \cdot \frac{V_{f1}}{V_{01}} \cdot r_{f1} \left\{ -\frac{1}{4} r_{f1} \cos 2\theta + R_d \sin \theta \right\} + 2C^* - R_d} \right] \quad (40)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 C^* = & \frac{1}{2} \{ (r_{f1} + l_d) \sin \alpha + R_d \}^2 \\
 & + \frac{V_{f1}}{V_{01}} r_{f1} \left\{ \frac{1}{4} r_{f1} \cos 2\alpha - R_d \sin \alpha \right\} \quad (41)
 \end{aligned}$$

(36)式で示される速度場から計算される全エネルギー消費率は可変パラメータ R_d を含んでいるので、 R_d について最適化処理を行うことが必要になる。その結果最小のエネルギー消費率を与える R_d の最適値が定まり、それにより押し出し・引抜き応力や製品の肉厚その他の諸量を得ることができる。図 18 に示すマンドレルまたはプラグなしの引抜き・押し出し加工の解析は、その他の広範な管材の押し出し・引抜き加工の基礎をなすものとして重要である。上述の動的可容速度場を変形させることにより、プラグやマンドレルを用いる場合の解析も可能であり、工具形状の最適設計その他の面で、この解析手法が実用的な意味で極めて有用であると言える。

7. Upper Bound Elemental Technique(UBET)の応用

上界法または上界接近法の実際加工への適用の面で近年特に注目されるのは、いわゆる Upper Bound Elemental Technique (UBET)による大規模なシミュレーションプログラムの開発である。これは、被加工材や工具の形状が複雑化するとともに、上述のような単一の全体的速度場の構成が非常に困難になるため、被加工材を複数の領域に分割し、各領域ごとに構成した比較的単純な速度場を、コンピューターを用いて連立的・総合的に処理し、被加工材の複雑な変形・流動状況をシミュレートしようとする試みである。この考え方は工藤による解析モデルに端を発しているが、その後 Avitzur らによって軸対称鍛造加工を対象とする汎用シミュレーションプログラムの開発が試みられ、従来理論的アプローチが困難であった鍛造加工の分野において、所要の加工荷重その他の実用的な解を簡便に得ることに成功している。

UBET の理論的構成、すなわち、被加工材の各領域(要素)への分割、分割された各領域(要素)の変形モードと動的可容速度場の構成、各エネルギー消費率の計算法、全仕事率の最小化と最適変形モードの検索等の考え方については拙著「UBET の概要と問題点」⁷⁾に詳述したので参照されたい。

筆者らは、このUBET の理論ならびに応用法についてさらに拡張を図り、近年新しい成果を導きつつある。たとえば、被加工材と工具との接触面における面圧分布のシミュレーションもその一つである。上界法または上界接近法が動的可容速度場に依存しており、応力にかかわる諸条件とは独立した解を提示する、というその特性から考えると、接触圧力分布のシミュレーションという問

題は UBET とは本来なじまないように思われるが、仮想要素法と名付けられた新しい解析手法を開発することにより、スラブ法で求められる接触圧力分布と同様の結果を導くことができることが示された。これにより UBET の適用範囲は大きく拡張され、その有用性が著しく高められたといえることができる。

8. おわりに

本稿では、塑性加工の分野で簡便かつ実用的な解析手法として広く用いられている上界法または上界接近法について、その基本的な考え方を示すとともに、典型的な応用例を示しつつ適用に際しての手順や問題点について述べた。この解析手法については、これまで多くの研究がなされているが、まだまだ十分とはいえず、多くの可能性が残されている。それらの可能性を掘り起こすためには解決すべき問題は多いが、それらは非常に興味深い課題でもある。他方、解の唯一性がない、その他の理由によってこの解析手法に対する批判も根強く主張され続けている。しかしながら、塑性加工という実際生産に結びついている学問の立場から見ると、これに代わる現実的で汎用性の高い解析手法は見当たらないのも事実である。その意味で上界法または上界接近法は、今後ますます改良が重ねられると同時に、その応用分野も拡大していくことが予想され、その成果が期待できると考えられる。

(1980年8月15日受理)

参考文献

- 1) R. Hill, "Mathematical Theory of Plasticity" (鷲津, 山田, 工藤訳「塑性学」, 培風館(1954))
- 2) 工藤, 「塑性学」, 森北出版 (1969)
- 3) B. Avitzur, "Metal Forming: Process and Analysis", McGraw Hill (1968)
- 4) M. Kiuchi, B. Avitzur "Limit Analysis of Flow Through Inclined Converging Planes" Trans. ASME, J. of Engineering for Industry Vol. 102 (1980-5) 109
- 5) 木内, 向, "極限解析の圧延加工への応用" 生産研究, Vol. 31, no. 12, (1979-12) 759
- 6) B. Avitzur et. al., "Limit Analysis of Flow Through Conical Converging Dies", J. of The Franklin Institute, Vol. 299, no. 5 (1975-5)
- 7) 木内, "Upper Bound Elemental Technique(UBET)の概要と問題点", 生産研究, Vol. 30, No.2 (1978-2) 59