

予引張あるいは予圧縮ばねを利用した免震床の研究

(第2報 振動特性と免震性能—その2—)

An Earthquake Isolation Floor Using Pre-Tensed or Pre-Compressed Springs

(2nd Report: Vibration Characteristics and Performance of Reducing Acceleration — Part 2 —)

藤田 隆 史*
Takafumi FUJITA

1. ま え が き

本研究では予引張あるいは予圧縮ばねを利用した新しい型式の免震床を考案し、前報¹⁾において、免震装置と免震床の基本構造、免震装置についての一方向加振実験および正弦波加振による調和共振と地震応答の解析について述べた。本報告では、免震装置の正弦波加振による1/3次分数調波共振の解析について述べる。

2. 正弦波加振による分数調波共振の解析

2.1 運動方程式

正弦波加振を受ける免震装置の可動部分の運動方程式は次式で与えられる。¹⁾

$$\ddot{x} + g\bar{\mu} \operatorname{sgn}(\dot{x}) + f(x) = a\omega_f^2 \cos \omega_f t \quad (1)$$

ただし、

$$f(x) = \begin{cases} \beta + \Omega^2(x - \beta/\omega^2) & : x \geq \beta/\omega^2 \\ \omega^2 x & : |x| \leq \beta/\omega^2 \\ -\beta + \Omega^2(x + \beta/\omega^2) & : x \leq -\beta/\omega^2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} 1 & : \dot{x} > 0 \\ -1 & : \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (3)$$

ここで、上式に用いられている諸記号は前報と同じものであるから説明を省略するが、式(1)左辺の第2項は可動部分に加わる動摩擦力を表し、第3項は可動部分の非線形復元力を表している。

分数調波共振の解析の場合には、解析を容易にするため、 $\beta/\omega^2 \ll 1$ であることに着目して、式(2)を次のように近似する。

$$f(x) \approx \begin{cases} \beta + \Omega^2 x & : x > 0 \\ -\beta + \Omega^2 x & : x < 0 \end{cases} \\ = \beta \operatorname{sgn}(x) + \Omega^2 x \quad (4)$$

したがって、式(1)の運動方程式は次のようになる。

$$\ddot{x} + g\bar{\mu} \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \beta \operatorname{sgn}(x) + \Omega^2 x = a\omega_f^2 \cos \omega_f t \quad (5)$$

2.2 周期解の解析

1/3次分数調波共振における周期解を求めるために $\omega_f t = 3\tau$ (6)

とおき、式(5)を次のように変形する。

$$x'' + x = -\frac{9}{\omega_f^2} \{g\bar{\mu} \operatorname{sgn}(x') + \beta \operatorname{sgn}(x)\} \\ - \left(\frac{9\Omega^2}{\omega_f^2} - 1\right)x + 9a \cos 3\tau \quad (7)$$

ただし、 $' = d/d\tau$, $'' = d^2/d\tau^2$

式(7)の近似解を

$$x(\tau) = \xi(\tau) - (9/8)a \cos 3\tau \quad (8)$$

とおくと、 ξ に関する次の微分方程式が得られる。

$$\xi'' + \xi = -\frac{9}{\omega_f^2} \left\{g\bar{\mu} \operatorname{sgn}\left(\xi' + \frac{27a}{8} \sin 3\tau\right) + \beta \operatorname{sgn}\left(\xi - \frac{9a}{8} \cos 3\tau\right)\right\} \\ - \left(\frac{9\Omega^2}{\omega_f^2} - 1\right)\left(\xi - \frac{9a}{8} \cos 3\tau\right) \quad (9)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \xi(\tau) &= X(\tau) \cos\{\tau - \phi(\tau)\}, \\ \xi'(\tau) &= -X(\tau) \sin\{\tau - \phi(\tau)\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

を式(9)の近似解と考えて、形式的に平均法を適用すると次式が得られる。

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{9}{\pi\omega_f^2} \left\{g\bar{\mu} \int_0^\pi \operatorname{sgn}(-X \sin \theta + \frac{27a}{8} \sin 3(\theta + \phi)) \sin \theta d\theta + \beta \int_0^\pi \operatorname{sgn}\left(X \cos \theta - \frac{9a}{8} \cos 3(\theta + \phi)\right) \cdot \sin \theta d\theta\right\} \quad (11)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = -\frac{9}{\pi\omega_f^2 X} \left\{g\bar{\mu} \int_0^\pi \operatorname{sgn}(-X \sin \theta + \frac{27a}{8} \sin 3(\theta + \phi)) \cos \theta d\theta + \beta \int_0^\pi \operatorname{sgn}\left(X \cos \theta - \frac{9a}{8} \cos 3(\theta + \phi)\right) \cdot \cos \theta d\theta\right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{9\Omega^2}{\omega_f^2} - 1\right) \quad (12)$$

ただし、 $\theta = \tau - \phi$

式(11)、(12)右辺の積分は部分積分と超関数の意味

* 東京大学生産技術研究所 第2部

研究速報
 の微分を用いて計算される。たとえば、

$$\int_0^\pi \operatorname{sgn}\left(-X \sin \theta + \frac{27a}{8} \sin 3(\theta + \phi)\right) \sin \theta d\theta$$

$$= \left[-\cos \theta \cdot \operatorname{sgn}\left(-X \sin \theta + \frac{27a}{8} \sin 3(\theta + \phi)\right) \right]_0^\pi$$

$$+ \int_0^\pi \cos \theta \left\{ \sum 2\delta(\theta - \hat{q}_i) - \sum 2\delta(\theta - \check{q}_i) \right\} d\theta$$

$$= 2 \sum \cos \hat{q}_i - 2 \sum \cos \check{q}_i$$

ただし、 δ は Dirac のデルタ関数である。 \hat{q}_i, \check{q}_i は
 $x'(\theta) = -X \sin \theta + (27/8)a \sin 3(\theta + \phi) = 0$
 $(0 \leq \theta \leq \pi)$ (13)

の、おのおの、 x' が負から正に、正から負に変化する場
 合の根である。同様に、 \hat{p}_i, \check{p}_i を
 $x(\theta) = X \cos \theta - (9/8)a \cos 3(\theta + \phi) = 0$
 $(0 \leq \theta \leq \pi)$ (14)

の、おのおの、 x が負から正に、正から負に変化する場
 合の根とすると、式(11)、(12)は次のように計算される。

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{18}{\pi \omega_f^2} \left\{ g\bar{\mu} \left(\sum \cos \hat{q}_i - \sum \cos \check{q}_i \right) \right.$$

$$\left. + \beta \left(\sum \cos \hat{p}_i - \sum \cos \check{p}_i \right) \right\} \equiv P(X, \phi)$$

(15)

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{18}{\pi \omega_f^2 X} \left\{ g\bar{\mu} \left(\sum \sin \hat{q}_i - \sum \sin \check{q}_i \right) \right.$$

$$\left. + \beta \left(\sum \sin \hat{p}_i - \sum \sin \check{p}_i \right) \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{9\Omega^2}{\omega_f^2} - 1 \right)$$

$$\equiv Q(X, \phi)$$

(16)

ここで、 $\cos \hat{p}_i, \cos \check{p}_i, \dots$ は付録に示されているように、 X/a と ϕ の関数として計算することができる。

(i) 応答変位の共振曲線：周期解は式(15)、(16)の右辺を0と置くことにより求められる。そこで、次式が得られる。

$$\frac{\sum \cos \hat{q}_i - \sum \cos \check{q}_i}{\sum \cos \hat{p}_i - \sum \cos \check{p}_i} = -\frac{\beta}{g\bar{\mu}} \quad (17)$$

$$\frac{a}{X} \left\{ g\bar{\mu} \left(\sum \sin \hat{q}_i - \sum \sin \check{q}_i \right) \right.$$

$$\left. + \beta \left(\sum \sin \hat{p}_i - \sum \sin \check{p}_i \right) \right\} = \frac{\pi a}{36} (9\Omega^2 - \omega_f^2)$$

(18)

式(17)、(18)は形式的に次のように書くことができる。

$$\begin{cases} R(X/a, \phi) = -\beta / (g\bar{\mu}) & (17)' \\ S(X/a, \phi; \bar{\mu}, \beta) = (\pi/36)a(9\Omega^2 - \omega_f^2) & (18)' \end{cases}$$

$X/a > 0, 0 \leq \phi < 2\pi/3$ の範囲について $R(X/a, \phi)$ の値を数値計算した結果、 $0 \leq \phi \leq \pi/3$ の範囲の ϕ に対しては、式(17)'を満足する X/a の根は存在せず、 $\pi/3 < \phi_l \leq \phi \leq \phi_u < 2\pi/3$ (ϕ_l, ϕ_u は $\bar{\mu}, \beta$ の関数) の範囲の ϕ に対しては、一般に、 X/a は2個の根 $T_i(\phi; \bar{\mu}, \beta)$ ($i = 1, 2$) を持つことがわかる。したがって、

$$\left. \begin{aligned} S(T_i(\phi; \bar{\mu}, \beta), \phi; \bar{\mu}, \beta) &= (\pi/36)a(9\Omega^2 - \omega_f^2) \\ &\quad (\text{入力変位振幅 } a \text{ が一定の場合}) \\ S(T_i(\phi; \bar{\mu}, \beta), \phi; \bar{\mu}, \beta) &= (\pi/36)A(9\Omega^2/\omega_f^2 - 1) \\ &\quad (\text{入力加速度振幅 } A \text{ が一定の場合}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

より、 ω_f の値に対して ϕ の値を数値的に求めることができる。また、そのときの X の値も求められる。

実験による共振曲線は応答変位の最大値についてのものであるが、応答変位の最大値は次式から計算される。

$$|x|_{\max} = \operatorname{Max}_i \left\{ X \cos q_i - \frac{9a}{8} \cos 3(q_i + \phi) \right\} \quad (20)$$

ただし、 q_i は式(13)の根である。

また、周期解の近似解は最終的には次式で与えられる。

$$x(t) = X \cos\left(\frac{\omega_f}{3}t - \phi\right) - \frac{9a}{8} \cos \omega_f t \quad (21)$$

(ii) 応答加速度の共振曲線：可動部分の絶対加速度 \ddot{y} は、式(21)の x を用いて、次式で与えられる。

$$\ddot{y}(t) = -g\bar{\mu} \operatorname{sgn}(\dot{x}) - \beta \operatorname{sgn}(x) - \Omega^2 x \quad (22)$$

また、その最大値は次のようになる。

$$|\ddot{y}|_{\max} = g\bar{\mu} + \beta + \Omega^2 |x|_{\max} \quad (23)$$

したがって、応答加速度の共振曲線は応答変位のそれより、式(23)を用いて求めることができる。

2.3 安定性の解析

式(15)、(16)より、 X, ϕ の変分方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \Delta X &= \left[\frac{\partial P}{\partial X} \right]_{P=Q=0} \Delta X + \left[\frac{\partial P}{\partial \phi} \right]_{P=Q=0} \Delta \phi \\ \frac{d}{d\tau} \Delta \phi &= \left[\frac{\partial Q}{\partial X} \right]_{P=Q=0} \Delta X + \left[\frac{\partial Q}{\partial \phi} \right]_{P=Q=0} \Delta \phi \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ここで、 $\Delta X, \Delta \phi$ は周期解からの変動分を表し、これらが安定であるための条件として、次に示す周期解の安定条件が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial Q}{\partial \phi} \right]_{P=Q=0} &< 0 \\ \left[\frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial Q}{\partial \phi} - \frac{\partial P}{\partial \phi} \frac{\partial Q}{\partial X} \right]_{P=Q=0} &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式(25)の条件は、 $\cos \hat{p}_i, \cos \check{p}_i, \dots$ の $X/a, \phi$ による偏微分係数で表され、それらは付録にある置換変数を順次偏微分することにより計算される。

3. 実験および計算結果

図1は正弦波入力の変位振幅を一定とした場合の、可動部分の絶対加速度と相対変位についての共振曲線であり、本報では分数調波共振の場合の計算結果が追加されている。解析で得られた分数調波共振の共振曲線は閉曲線を成している。その内、一点鎖線の部分は安定な周期解によるものであり、破線の部分は不安定な周期解によ

研究速報

るものであって物理的には実現されないものである。ところで、 $a=0.915, 1.78 \text{ cm}$ の場合には分数調波共振の実験結果が示されていない。これは、振動台の加速度に対する制限から、より高い振動数での実験が行えなかったためであり、実験が可能であれば分数調波共振が発生したものと思われる。

図2は入力加速度振幅が一定の場合の共振曲線であり、図1と同様、分数調波共振についての計算結果が追加されている。 $A=300 \text{ gal}$ の場合には分数調波共振の計算結果も実験結果も示されていないが、これは、解析でも解が存在せず、実験でも発生しなかったためである。

図3は分数調波共振の場合の入力加速度と応答加速度、

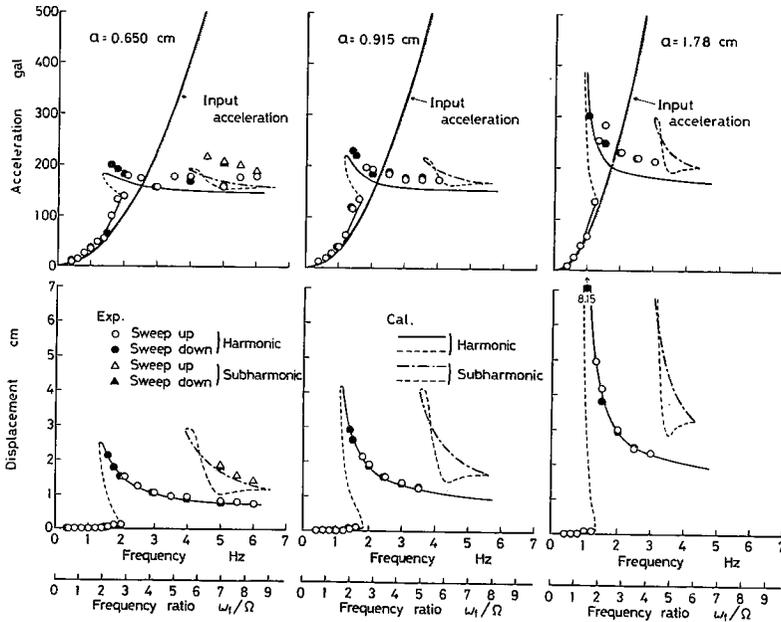


図1 正弦波加振による共振曲線 (入力変位振幅が一定の場合)

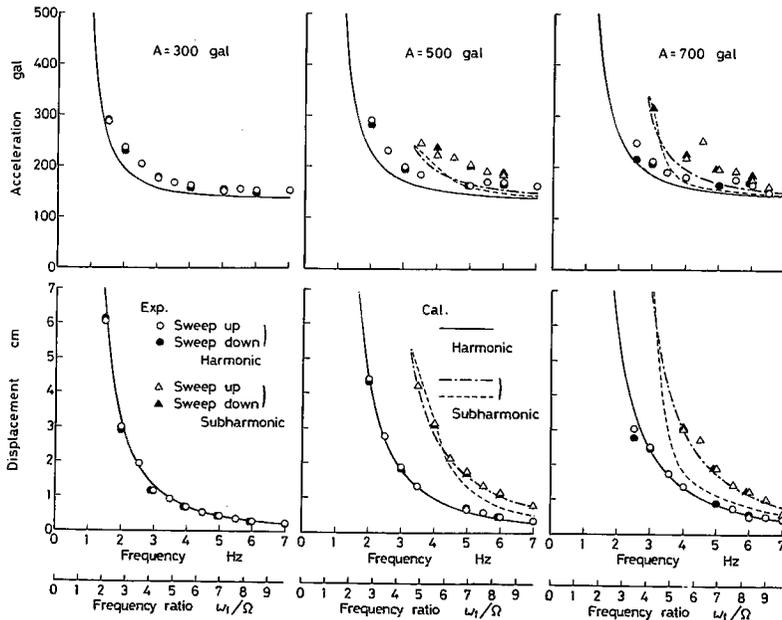


図2 正弦波加振による共振曲線 (入力加速度振幅が一定の場合)

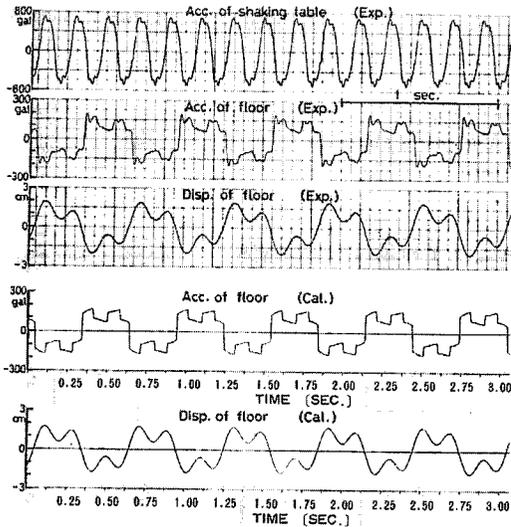


図3 正弦波加振による分数調波共振の場合の応答波形 (5 Hz, 700 gal 入力)

応答変位の波形を示したものである。

以上において、計算結果は実験結果とはほぼ満足し得る一致を示している。

4. あとがき

前報と本報の結果より、免震装置の一方加振に関しては、基本的な振動特性と免震性能を解析によって予測することが可能となり、与えられた要求に対して適切な設計条件を検査することができる。

(1980年7月5日受理)

付 録

式 (14), (13) はおのおの、次のように変形される。

$$(9/2)\cos 3\phi \cos^3 \theta - \{X/a + (27/8)\cos 3\phi\}\cos \theta = (9/8)\sin 3\phi(4\cos^2 \theta - 1)\sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad (A1)$$

$$(27/2)\cos 3\phi \sin^3 \theta + \{X/a - (81/8)\cos 3\phi\}\sin \theta = \pm(27/8)\sin 3\phi(1 - 4\sin^2 \theta)\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \quad (A2)$$

式 (A1), (A2) の両辺を二乗して整理すると

$$\cos^6 \theta - \{(4/9)(X/a)\cos 3\phi + 3/2\}\cos^4 \theta + \{(4/81)(X/a)^2 + (1/3)(X/a)\cos 3\phi + 9/16\} \cdot \cos^2 \theta - (1/16)\sin^2 3\phi = 0 \quad (A3)$$

$$\sin^6 \theta + \{(4/27)(X/a)\cos 3\phi - 3/2\}\sin^4 \theta + \{(4/729)(X/a)^2 - (1/9)(X/a)\cos 3\phi + 9/16\} \cdot \sin^2 \theta - (1/16)\sin^2 3\phi = 0 \quad (A4)$$

式 (A3), (A4) はおのおの $\cos^2 \theta$, $\sin^2 \theta$ の三次方程式であるから、両式をまとめて次のように書くことにする。

$$s_i^3 + b_i s_i^2 + c_i s_i + d_i = 0 \quad (i=1, 2) \quad (A5)$$

ただし、 $i=1, 2$ はおのおの式 (A3), (A4) に対応している。

$$\left. \begin{aligned} B_i &= -b_i^2/9 + c_i/3 \\ C_i &= 2b_i^3/27 - b_i c_i/3 + d_i \end{aligned} \right\} \quad (A6)$$

とおくと、式 (A5) の実根は次のようになる。

(i) $D_i = 4B_i^3 + C_i^2 > 0$ の場合

$$s_{i1} = \sqrt[3]{(-C_i + \sqrt{D_i})/2} + \sqrt[3]{(-C_i - \sqrt{D_i})/2} - b_i/3 \quad (A7)$$

(ii) $D_i = 4B_i^3 + C_i^2 = 0$ の場合

$$\left. \begin{aligned} s_{i1} &= 2\sqrt[3]{-C_i/2} - b_i/3 \\ s_{i2} &= -\sqrt[3]{-C_i/2} - b_i/3 \quad (\text{重根}) \end{aligned} \right\} \quad (A8)$$

(iii) $D_i = 4B_i^3 + C_i^2 < 0$ の場合

$$\left. \begin{aligned} s_{i1} &= 2\sqrt{-B_i} \cos(\lambda_i/3) - b_i/3 \\ s_{i2} &= -\sqrt{-B_i} \{\cos(\lambda_i/3) + \sqrt{3} \sin(\lambda_i/3)\} - b_i/3 \\ s_{i3} &= -\sqrt{-B_i} \{\cos(\lambda_i/3) - \sqrt{3} \sin(\lambda_i/3)\} - b_i/3 \end{aligned} \right\} \quad (A9)$$

ただし、 $\tan \lambda_i = -\sqrt{-D_i}/C_i$ ($0 < \lambda_i < \pi$)

式 (A7)~(A9) で与えられる s_{ij} が $0 \leq s_{ij} \leq 1$ を満足すれば、式 (A1), (A2) の根 p_j, q_j の \sin, \cos は次のようになる。

$$\sin p_j = \sqrt{1 - s_{1j}} \quad (A10)$$

$$\cos p_j = \begin{cases} \sqrt{s_{1j}} : \text{式 (A1) が } \cos \theta = \sqrt{s_{1j}} \text{ で成立の場合} \\ -\sqrt{s_{1j}} : \text{式 (A1) が } \cos \theta = -\sqrt{s_{1j}} \text{ で成立の場合} \end{cases} \quad (A11)$$

$$\sin q_j = \sqrt{s_{2j}} \quad (A12)$$

$$\cos q_j = \begin{cases} \sqrt{1 - s_{2j}} : \text{式 (A2) が 複号の + で成立の場合} \\ -\sqrt{1 - s_{2j}} : \text{式 (A2) が 複号の - で成立の場合} \end{cases} \quad (A13)$$

最後に、 $\hat{p}_j, \check{p}_j, \hat{q}_j, \check{q}_j$ の判別は次のようになされる。

$$\left. \begin{aligned} -(X/a)\sin p_j + (27/8)\sin 3(p_j + \phi) > 0 \\ \text{のとき, } p_j &= \hat{p}_j \\ -(X/a)\cos q_j + (81/8)\cos 3(q_j + \phi) > 0 \\ \text{のとき, } q_j &= \hat{q}_j \end{aligned} \right\} \quad (A14)$$

不等号が逆の場合は $p_j = \check{p}_j, q_j = \check{q}_j$ となる。

参 考 文 献

1) 藤田, 服部, 石田: 予引張あるいは予圧縮ばねを利用した免震床の研究(第1報), 生産研究, Vol. 32, No. 8 (1980)