

# 不連続体力学のすすめ(その2)

## 一固体力学非線形問題への挑戦一

Development of Discontinuum Mechanics (1)

— A Challenge to Nonlinear Problems of Solid Mechanics —

川井 忠彦\*

Tadahiko KAWAI

### 3. 新離散化モデルの開発

前節の議論から望ましき有限要素モデルは要素内剛性と要素間剛性を兼ねそなえたモデルでなければならないことになる。

このようなモデルとして著者は図11に示すように通常の有限要素モデルを2種類のバネで結合させた複合モデルを考えた。すなわち相隣る要素間に働く直応力 $\sigma_n$ と剪断応力 $\tau_s$ に抵抗する2種類の分布バネ系 $k_n, k_s$ で要素同志を結合させたモデルを考えたのである。

図11においてはこの境界边上のバネを一組のバネ系で代表させているが、これは分布バネ系を示すものとする。

このバネ系をもって前述の要素間強度を表現しようとするのがそのねらいであり、その応力-歪み関係式は次式のようなマトリックス方程式で表されるものとする。

$$\begin{Bmatrix} f_n \\ f_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{nn} & k_{ns} \\ k_{sn} & k_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \end{Bmatrix} \quad (1)$$

または  $f = k\delta$  (2)

ここに、 $f$ は境界边上の境界反力ベクトル(単位辺長当たり)、 $\delta$ は境界边上の隣接2要素の対応点の相対変位ベクトルを表す。すなわち、

$$\delta_n = u_j - u_i, \quad \delta_s = v_j - v_i \quad (3)$$

である。(3)式は Goodman の創始にかかるいわゆるジョイントエレメント(joint element)のバネ系に採用した応力-歪関係式と同じである<sup>14)</sup>。

さて話を簡単にするため問題を平面応力場の解析に限定し、適当にメッシュ分割された有限要素の代表的な一要素について考える。

(i) 変位場

$$u(x, y) = H(x, y)u \quad (4)$$

ここに  $H(x, y)$  はいわゆる形状関数(shape function)、 $u$  は要素の節点変位ベクトルを表す。(3)式より有限要素法の標準的手続に従って次のような一連の関係式が求められる。

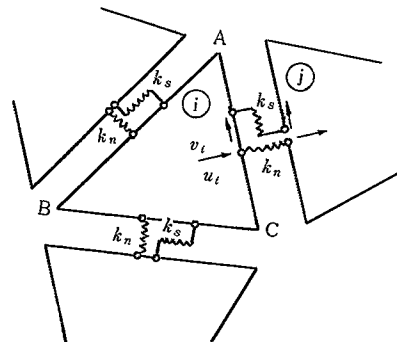


図11 新離散化モデル  
—有限要素・バネモデル—

(ii) 歪みマトリックス

$$\epsilon = \partial H(x, y)u = B(x, y)u \quad (5)$$

ここに  $B(x, y)$ ,  $\partial$  はある微分演算子を意味する。

(iii) 応力マトリックス

$$\sigma = D\epsilon \quad (6)$$

ここに  $D$  はよく知られた平面応力場に対する応力-歪みマトリックスを表す。

(iv) 要素歪みエネルギー式(各要素につき)

$$\begin{aligned} V_i^e &= \iint \frac{1}{2} \epsilon^T \sigma dx dy = \frac{1}{2} u^T \left( \iint B^T D B dx dy \right) u \\ &= \frac{1}{2} u^T K^e u \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、上つき  $e$  は要素ごとの計算値であることを示す。

$$K^e = k \iint B^T D B dx dy \quad (8)$$

で与えられ、要素剛性マトリックスを表している。

(v) 境界边上の分布バネ系に貯えられる歪みエネルギー  $V_b$

いま図11を参考にして境界辺  $\overline{CA}$  上のバネ系に貯えられる歪みエネルギー  $V_b$  を求める。要素間の相対変位ベクトルを  $\delta$ 、またそれによりバネ系に発生する反力ベクトルを  $f$  とすれば、

\*東京大学生産技術研究所 第2部

$$V_{bc\bar{A}} = \int_0^{L_{Ac}} \frac{1}{2} \delta^T \mathbf{f} ds = \int_0^{L_{Ac}} \frac{1}{2} \delta^T \mathbf{K} \delta ds \quad (9)$$

( $L_{Ac}$  は辺  $\bar{AC}$  の長さを表す)

また(4)式より要素間の相対変位ベクトル  $\delta$  は次式のごとく与えられる。

$$\delta = \left. \begin{aligned} & \{ \mathbf{u}_j(x(s), y(s)) - \mathbf{u}_i(x(s), y(s)) \} \mathbf{n}_{ij} \\ & = \{ \mathbf{H}_j(x(s), y(s)) \mathbf{u}_j - \mathbf{H}_i(x(s), y(s)) \mathbf{u}_i \} \mathbf{n}_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに  $\left. \begin{aligned} x(s) &= x_c - m_{ij}s \\ y(s) &= y_c + l_{ij}s \end{aligned} \right\} ((x_c, y_c) \text{ は } c \text{ 点の座標}) \quad (11)$

与えられる境界辺  $\bar{AC}$  の方程式 ( $l_{ij}, m_{ij}$ ) は境界辺上において②から⑦要素に向かって立てられた単位法線ベクトル  $\mathbf{n}_{ij}$  を表している。

したがって(10)式を(9)式に代入すれば

$$V_{bc\bar{A}} = \frac{1}{2} \mathbf{A}_{ij}^T \mathbf{K}_{ij}^e \mathbf{A}_{ij} \quad (12)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \int_0^{L_{Ac}} \mathbf{N}_{ij}(s)^T \mathbf{K}_{ij} \mathbf{N}_{ij}(s) ds \quad (13)$$

$e'$  は各境界辺ごとに計算することを示す。ここに

$$\mathbf{N}_{ij}(s) = [ \mathbf{H}_j(x(s), y(s)) : -\mathbf{H}_i(x(s), y(s)) ] \mathbf{n}_{ij} \quad (14)$$

$$\mathbf{A}_{ij}^T = [ \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j ] \quad (15)$$

である。

(vi) 外力のなす仮想仕事  $\delta W^e$  (各要素につき)

$$\delta W^e = \iint \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dx dy + \oint \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} ds \quad (16)$$

ここに  $\bar{\mathbf{p}}$  は物体力,  $\bar{\mathbf{f}}$  は境界に働く外力ベクトルを表している。

(vii) 全体の系に関する仮想仕事方程式

$$\delta \Pi = \delta V_i + \delta V_b - \delta W = 0 \quad (17)$$

$$\text{ここに, } V_i = \sum_i \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i^{(i)} \mathbf{u}_i \quad (18)$$

$$V_b = \sum_i \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_{ij}^{(i)} \mathbf{u}_{ij} \quad (19)$$

$$\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j \quad (20)$$

$$\delta W = \sum_i \delta \mathbf{u}_i^T \bar{\mathbf{F}}_i \quad (21)$$

$\mathbf{K}_{ij}^{(i)}$  は(13)式で定義される。

このようにして(17)式から有限要素法の標準剛性方程式が導けることは明らかであろう。ここで若干見方を変えて要素②および⑦の間に働く境界反力ベクトルを  $\mathbf{f}_{ij}$  で表せば(1)式を参考にして

$$\mathbf{f}_{ij} = \mathbf{K}_{ij}^{(i)} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \quad (22)$$

与えられる。したがって(17)式は次式のようにも表せる。

$$\delta \left( \sum_i \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i^{(i)} \mathbf{u}_i \right) + \delta \left( \sum_{ij} \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{f}_{ij} \right) - \left( \sum_i \delta \mathbf{u}_i^T \bar{\mathbf{F}}_i \right) = 0 \quad (23)$$

$$(23) \text{ 式で便宜上 } \lambda_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{f}_{ij} \quad (24)$$

とおき, 系全体のマトリックス方程式で表せば

$$\delta \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \right) + \delta \left( \lambda_{ij} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \right) - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} = 0 \quad (25)$$

となる。

ここに  $ij$  は有限要素境界線のすべてについての総和を表すものとする。(25)式はいうまでもなく鷲津教授の命名されたハイブリッド変位型モデル(I)に対するハイブリッドポテンシャルエネルギーの原理である。

この変分原理は各有限要素につき互いに独立な変位場を仮定すると境界辺上での変位連続条件が一般に満足されないの、いわゆる Lagrange の未定係数  $\lambda_{ij}$  を導入し,  $\lambda_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i)$  なる一種のポテンシャル項を追加して, 境界変位連続条件をポテンシャルエネルギー-最小原理の中に取り込んだことになっている。

このようにして  $\lambda_{ij}$  を導入してゆくと物理的な発想に基づく境界パネの考え方は消えて, 純数学的な Lagrange の未定係数法の考え方が導入されたことになる。このことはもしも境界パネの剛性が要素剛性よりもずっと大きければ, 境界パネはほとんど変形せずに一つの要素から他の要素に力を伝えることになる。この場合の極限では通常のハイブリッド変位モデル(I) (hybrid displacement model(I)) に帰着することを物語っている<sup>9)</sup>。

ところでこのハイブリッド型変位モデル(I)の収束性は数学的に保証されているので本節で提案した有限要素パネモデルの理論的根拠についてもある程度言えたことになろう。

#### 4. 剛体-バネモデル (Rigid Body-Spring Model) の新離散化モデルよりの導出<sup>7) 8) 9)</sup>

前節において提案した有限要素-バネモデルにおいて要素の変位場が線形の場合には別の新しい簡易要素モデルが導けることを示そう。

一般に要素内の変位場が線形であると仮定するとそれは次式のごとく与えられる。

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{H}_d(x, y) \mathbf{d} + \mathbf{H}_e(x, y) \mathbf{e} \quad (26)$$

あるいは

$$\left\{ \begin{aligned} U(x, y) \\ V(x, y) \end{aligned} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y-y_0) \\ (x-x_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ x_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (x-x_0) & 0 & \frac{1}{2}(y-y_0) \\ 0 & (y-y_0) & \frac{1}{2}(x-x_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

ここに  $\mathbf{d}^T = [u_0, v_0, x_0]$  は要素内の重心(必ずしも重心にとらなくてもよいが)の剛体変位,  $\mathbf{e}^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]$  は要素内の一様歪みベクトルをそれぞれ表している。

したがって図11に示すような CST要素の節点変位ベクトルを  $\mathbf{u}$  とすれば (26) 式に各節点の座標値 ( $x_i, y_i$ ) ( $i = 1, 2, 3$ ) を次々に代入して、容易に次のような節点ベクトルの変換式が得られる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_b \mathbf{d} + \mathbf{H}_\epsilon \boldsymbol{\epsilon} = [\mathbf{H}_d, \mathbf{H}_\epsilon] \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

(28) 式を各要素について作り前節の (17), (18), (19), (20), (21) 式に代入すればつきよく系全体のポテンシャルエネルギー  $\Pi$  は系全体の要素重心の剛体変位ベクトルおよび一様歪みベクトルを改めて  $\mathbf{d}, \boldsymbol{\epsilon}$  と定義するとこれら二つのベクトルの汎関数となる。したがって(17)式の変分は当然  $\mathbf{d}$  と  $\boldsymbol{\epsilon}$  について求められるわけであり、次式のごとく与えられることになる。

$$\delta \Pi(\mathbf{d}, \boldsymbol{\epsilon}) = \delta V_i(\boldsymbol{\epsilon}) + \delta V_b(\mathbf{d}, \boldsymbol{\epsilon}) - \delta W(\mathbf{d}, \boldsymbol{\epsilon}) = 0 \quad (29)$$

したがって

$$\text{変分 } \delta \mathbf{d} \text{ につき: } \frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{d}}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\epsilon}) - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\epsilon}) = 0 \quad (30)$$

$$\text{変分 } \delta \boldsymbol{\epsilon} \text{ につき: } \frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}) + \frac{\partial V_b}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\epsilon}) - \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\epsilon}) = 0 \quad (31)$$

なる二つのマトリックス式が得られる。

さて Castigliano の定理より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{d}} &= \mathbf{K}_{dd}^{(b)} \mathbf{d} + \mathbf{K}_{d\epsilon}^{(b)} \boldsymbol{\epsilon}, \quad \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}} = \overline{\mathbf{F}}_d \\ \frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} &= \mathbf{K}_{\epsilon\epsilon}^{(i)} \boldsymbol{\epsilon}, \quad \frac{\partial V_b}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{K}_{\epsilon d}^{(b)} \mathbf{d} + \mathbf{K}_{\epsilon\epsilon}^{(b)} \boldsymbol{\epsilon} \\ \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} &= \overline{\mathbf{F}}_\epsilon \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

と書くとすれば (30, 31) 式は次式のごとく書ける。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{dd} \mathbf{d} + \mathbf{K}_{d\epsilon} \boldsymbol{\epsilon} &= \overline{\mathbf{F}}_d \\ \mathbf{K}_{\epsilon d} \mathbf{d} + \mathbf{K}_{\epsilon\epsilon} \boldsymbol{\epsilon} &= \overline{\mathbf{F}}_\epsilon \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

(上添字は無意味となるので以後省略することにする)

(33) 式は有限要素全体の重心変位ベクトル  $\mathbf{d}$  と要素内歪ベクトル  $\boldsymbol{\epsilon}$  で表された平衡方程式でこの方程式は適当なスケールを施せば一辺に解くことが可能と思われる。このようにして  $\mathbf{d}$  と  $\boldsymbol{\epsilon}$  が決定できれば変位場も応力分布も完全に求められ問題が解決したことになる。

(33) 式はまた次のような形で解くこともできるであろう。すなわち (43) 式の第2式を  $\boldsymbol{\epsilon}$  について解いて

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{K}_{\epsilon\epsilon}^{-1} (\overline{\mathbf{F}}_\epsilon - \mathbf{K}_{\epsilon d} \mathbf{d}) \quad (34)$$

なる式を求めこれを第1式に代入すれば

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \overline{\mathbf{F}} \quad (35)$$

なる式が最終的に得られる。

ここに

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_{dd} - \mathbf{K}_{d\epsilon} \mathbf{K}_{\epsilon\epsilon}^{-1} \mathbf{K}_{\epsilon d} \\ \overline{\mathbf{F}} &= \overline{\mathbf{F}}_d - \mathbf{K}_{d\epsilon} \mathbf{K}_{\epsilon\epsilon}^{-1} \overline{\mathbf{F}}_\epsilon \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

である。

(35) 式は要素の剛体変位  $\mathbf{d}$  のみを未知量とする平衡方程式である。

換言すると要素重心に節点を取り、その剛体変位を節点変位とする剛性方程式が作られることが明らかになったわけで、これが著者が数年前に物理的な考察から直観的に導いた剛体-バネモデルの理論的基礎を与えたことになろう。(図12)

(35) 式の  $\mathbf{K}$  は一般に非対角項も零とならないつまったマトリックスとなるであろう。ところが RBSM 要素を組み合わせることで全体の剛性方程式を作ってゆくとスパースな帯マトリックスとなる。したがって RBSM モデルの弾性解がよい結果を与えるのは非対角項が無視できる場合であり、具体的にはメッシュ分割が主応力線に沿う方向に切られている場合であろう。

さて (43) 式は実際には反復法 (iteration method) を用い、次のように解いてゆくのが実用的であろう。

(i) 第1近似

(a) まず (43) 式の第一式のみを取り  $\boldsymbol{\epsilon}$  の項を無視した次式

$$\mathbf{K}_{dd} \mathbf{d}^{(1)} = \overline{\mathbf{F}}_d \quad (37)$$

の解を  $\mathbf{d}^{(1)}$  とし

(b)  $\mathbf{K}_{\epsilon\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} = \overline{\mathbf{F}}_\epsilon - \mathbf{K}_{\epsilon d} \mathbf{d}^{(1)}$  (38)

(a) 式の解  $\mathbf{d}^{(1)}$  を上式の右辺に代入  $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$  を求めるとそれは要素内の歪み場の第1近似解を与える。

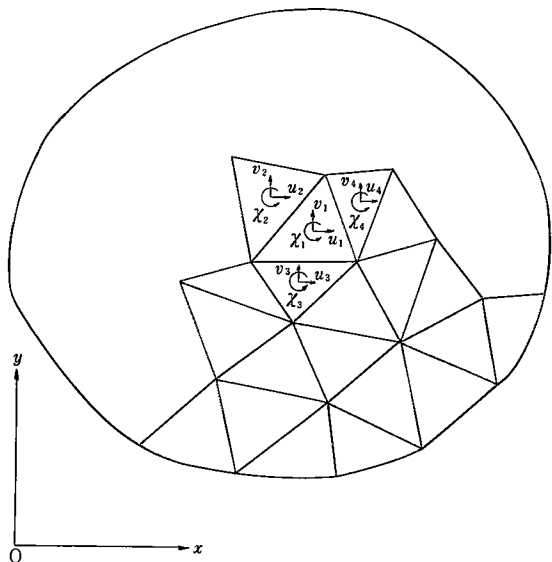


図12 RBSMによる2次元構造物モデル化

(ii) 第2近似

$$(c) \quad K_{dd}d^{(2)} = \bar{F}_d - K_{de}e^{(1)} \quad (39)$$

$e^{(1)}$  を上式の右辺に代入  $d^{(2)}$  について解き、  
重心変位場  $d$  の第2近似解が求まる。

$$(d) \quad K_{ee}e^{(2)} = \bar{F}_e - K_{ed}d^{(2)} \quad (40)$$

前段で求めた  $d^{(2)}$  を上式の右辺に代入し再び  
について解き  $e^{(2)}$  を決定する。

以上の計算を反復して  $d^{(n)}, e^{(n)}$  の解が許容  
誤差範囲内に入れば計算を止めることにすれ  
ば(43)式の方程式を実用的に解くことが  
できるものと考えている。

以上の結果を要約すると次のようになる。物理的には  
要素剛性が境界バネの剛性よりもはるかに大きくなった  
極限を考えると要素は変形せず(すなわち剛体で)、要素  
間バネのみが変形するモデルに帰着するわけで、そこに  
著者がさきに提案した RBSM モデルのルーツがある  
(図13)。

このようにして重心の剛体変位  $d$  と要素内歪み  $e$  を独  
立のパラメータとする線形要素を2種類のバネで接合  
したモデルを用い、固体の変形を弾性から塑性崩壊に至  
る領域まで組織的に追跡し得る可能性が出てきた。

実際の固体の変形の自由度は無限であるが、一つの有  
限要素はまたそれよりもさらに細かい有限要素の集合体  
に離散化されるから、このような離散化の手続きを数千  
回、数万回と繰り返してゆけば、その最小の有限要素は  
かなり実際の結晶粒子のそれに近いものになってゆくで  
あろう(図14)。これが有限要素法の世界、特に大規模  
な構造物の解析のときにしばしば使用されるサブストラ  
クチュア(Substructure)の考え方であり、もしもこ  
の方法が無限回繰り返せるならば理論的にマクロの世界  
とミクロの世界は繋ってゆくはずである。

もちろん実際の物質は金属ならばたくさんの結晶の集合  
体であり、一つの結晶はまたたくさんの分子の集合体で  
あろう。そしてまたその分子はさらに細い原子構造をも  
っており、ついには物質の窮極の単位といわれる素粒子  
からなる複雑な構造から出来ていることは現代物理学の  
教えるところである。

したがってここで提案しているモデルにはやはり連続  
体と見なし得る範囲であっておそらく結晶のレベルの変  
形までは何とか通用できるモデルであろう。

しかし結晶以下のスケールの話になると分子、原子、  
……等その大きさのレベルに応じ合う新しいモデルを考  
えてゆくことが必要になるのでなかろうか(図15)。いず  
れにしても単位の長さのスケールに応じた離散化モデル  
を考え、その集合体の力学的挙動を大型電子計算機によ  
るシミュレーションによって研究してゆく方法は新しい  
実験技術と相まって今後の材料科学の展開に大きな貢  
献が期待できそうである。

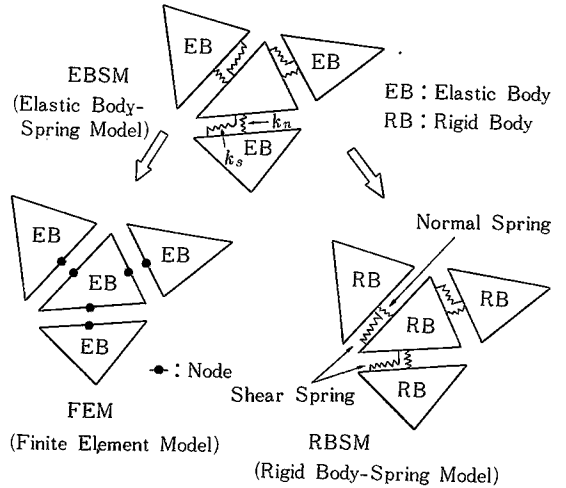


図13 FEMモデルとRBSMモデルの相関性

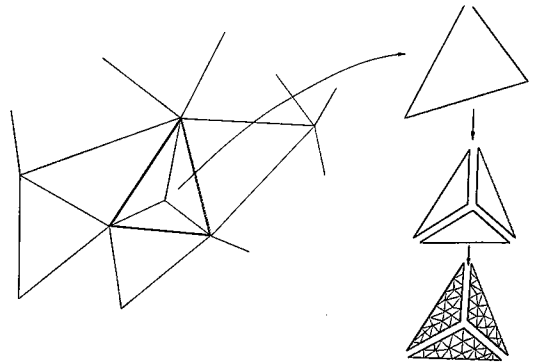
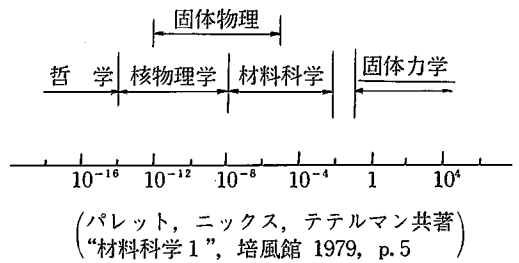


図14 サブストラクチュア(Substructure)の概念



(パレット, ニックス, テルマン共著)  
“材料科学1”, 培風館 1979, p.5

図15 固体力学と他の学問分野との関係

5. 材料の構成方程式<sup>(10), (11)</sup>

前節の終わりにおいて固体または構造物を通常の方法  
に従い、線形の有限要素に分割し、要素間の大きさが(2  
× 2)の剛性マトリックスで定義されるバネ系で接合し  
たモデルを考えると弾性から塑性そして崩壊に至る変形  
の全領域に亘り、統一的に応力や変形のパターンを追跡  
し得ることを述べた。

ここで若干これらの要素の剛性マトリックスを作る場

合に採用する材料の構成方程式（応力-歪み関係式、降伏条件等）について述べておきたい。

上述のモデルにおいては要素内強度と要素間強度の二つの強度を考える必要があることはすでに述べたとおりである。

始めの要素内強度は従来の有限要素法における要素剛性を意味するものであり、一つの要素を連続体で近似する立場に立っている。したがってこの要素の剛性マトリックスについては要素が弾性域にある場合は一般的な Hooke の法則、塑性域に入った場合には塑性流れ理論に基づき、降伏条件としては Von Mises の条件をとり、応力-歪み関係式としては Prandtl-Reuss の法則に従うて展開されている有限要素法の標準的手法に従うものとしよう。

問題は2種類のパネ率によって表現した要素間強度である。実際の固体においてこのようなパネ系によるモデル化が果たして妥当なものであろうか。

著者は転位論については全くの素人であるので確信をもって言うことができないが、金属材料の場合それらが多結晶体であり粒界強度という問題は転位論のなかでも最も新しい研究課題として活発な研究が世界的に展開されており、理論の体系化が着々と進展しつつあると聞いている。したがって近い将来境界パネに理想化されたマクロ的強度をミクロの立場から評価する理論式が提示されるものと思われる。しかしながらこのような理論式が固体力学のレベルで実用化されるのはかなり先の話と思われる。

固体力学の立場から考えてみるとやはり塑性流れ理論に従ってパネ剛性の定式化を行ってゆくののがやはり一番オーソドックスであろう。

竹内は<sup>9)</sup>要素境界力は垂直（引張り、圧縮）と剪断の2成分よりなり、要素間力と要素間相対変位が2種類のパネ（ $k_n, k_s$ ）により結ばれているとして以下のようなパネ定数の理論式を導いた。

すなわちこれらのパネ系がある応力条件を満足すると塑性化がおけるとし、その条件を次式のごとく表すことにする。

$$f(\sigma) = 0 \quad \left( \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \tau \end{Bmatrix} \right) \quad (41)$$

ここに  $f(\sigma)$  は塑性流れ理論におけるいわゆる塑性ポテンシャルである。

次いで塑性流れ法則に従えば次の関係式が得られる。

$$\Delta \varepsilon^{(p)} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad \varepsilon^{(p)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_n^{(p)} \\ \gamma^{(p)} \end{Bmatrix} \quad (42)$$

ここで上付きの  $(p)$  は塑性状態の量を示すものとする。いま弾性歪みを  $\varepsilon^{(e)}$ 、全体歪みを  $\varepsilon$  で表すものとするれば、

$$\Delta \varepsilon^{(e)} = \Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^{(p)} \quad (43)$$

$\Delta$  はもちろん増分量を表しているものとする。

さて弾性状態における応力と歪み（あるいは力と相対変位）の間には次の関係が成立している。

$$\sigma = k^{(e)} \varepsilon^{(e)} \quad (44)$$

(42) 式～(44) 式を整理して次の関係式が求まる。

$$\Delta \sigma = k^{(e)} \left( \Delta \varepsilon - \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \quad (45)$$

(45) 式を塑性条件：

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta \sigma = 0 \quad (46)$$

に代入し、 $\lambda$  について解くと次のような式が得られる。

$$\lambda = \frac{k^{(e)} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta \varepsilon}{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T k^{(e)} \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \quad (47)$$

したがって、(47) 式を (45) 式に代入すれば次のような応力増分の関係式が得られる。

$$\Delta \sigma = \left[ k^{(e)} - \frac{\left( k^{(e)} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \frac{\partial f}{\partial \sigma} k^{(e)}}{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T k^{(e)} \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \right] \Delta \varepsilon \quad (48)$$

なおここで述べた方法は剛塑性体のものであり、歪み硬化などは含まれていない。すなわちある破壊条件に対する比例関係のような取扱いとなっている。

いま塑性状態の剛性行列を成分表示すると以下のようになる。

$$k_{ij}^{(p)} = k_{ij}^{(e)} \delta_{ij} - \frac{1}{\sum_i k_i^{(e)} \bar{f}_i^2} \bar{f}_i \bar{f}_j k_i^{(e)} k_j^{(e)} \quad (49)$$

ここで  $\bar{f}_i = \partial f / \partial \sigma_i$  ( $i=1, 2$ ) であり  $\sigma_1 = \sigma_n, \sigma_2 = \tau_s$  である。また  $k_i^{(e)}$  は弾性におけるパネ定数成分を表しており、ここで示したモデルでは非対角項が零であるため対角項の成分のみしか存在しない。なお塑性解析における除荷の判定は  $\lambda < 0$  で行えばよい。

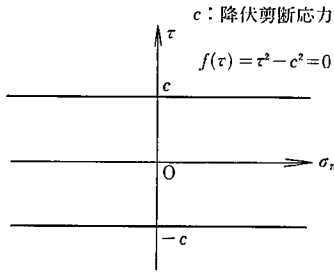
以上の一般論を基にして竹内は代表的な四つの降伏条件式

- (1) Tresca の条件： $f(\tau) = \tau^2 - c^2 = 0$
- (2) Mohr-Coulomb の条件： $f(\sigma_n, \tau) = \tau^2 - (c - \tan \phi \sigma_n)^2 = 0$  (直線包絡線)
- (3) Mohr-Coulomb の条件： $f(\sigma_n, \tau) = \tau^2 - c^2 (1 - \sigma_n / \sigma_t) = 0$  (放物線包絡線)
- (4) Von Mises の条件： $f(\sigma_n, \tau) = \frac{1}{4} \sigma_n^2 + \tau^2 - c^2 = 0$

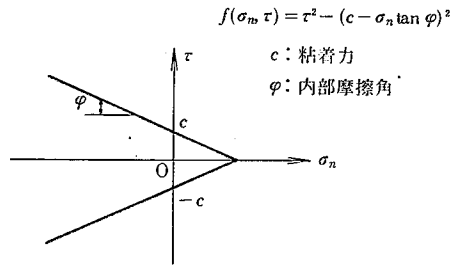
(50)

の場合を例にとってパネ系の応力-歪み関係式を具体的に導いている。ここで述べた四つの降伏条件を図示すると図16のごとくなる。

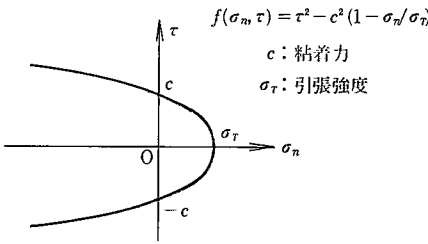
これらの降伏条件は材料に応じて使い分けることが必



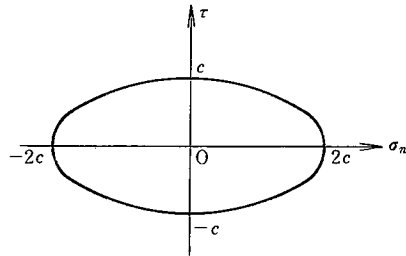
(a) Tresca の降伏条件



(b) Mohr-Coulomb の降伏条件  
(直線包絡線)



(c) Mohr-Coulomb の降伏条件 (放物線包絡線)



(d) Mises の降伏条件 (平面応力)

図16 材料の代表的破壊基準

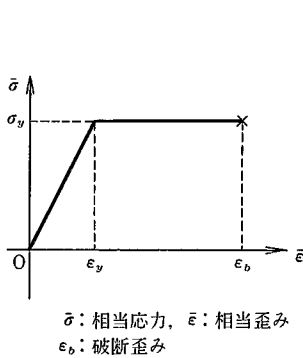


図17 要素境界におけるこりおよび亀裂の導入

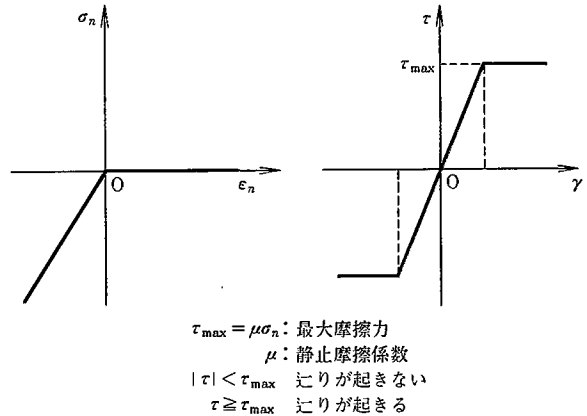


図18 接触問題における要素間バネの特性

要なことはいうまでもないことで、軟鋼のような延性に富む金属材料の場合には Tresca の条件がよくあてはまるが、土や岩盤のような材料の場合には Mohr-Coulomb の条件 (直線または放物線包絡線) の方が一般によく使われている。任意の材料の場合には Von Mises の条件を用いれば無難であろう。

さて初期の剛体-バネモデルにおいては Tresca の条件を用いて降伏の判定を行ったが、図17に示すような一般的な完全弾塑性体の応力-歪み線図で引張り相当歪み  $\epsilon$  がある限界値  $\epsilon_b$  に到達したらバネが切れると仮定すれば、引張りによりクラックが生ずる状態のシミュレーションが可能となるであろう。竹内はこのような考え

方を具体化して Zienkiewicz らが提案した no-tension analysis<sup>12)</sup> を改良した tension-crack analysis のアルゴリズムを開発し、土や岩盤構造の解析に適用しその有効性を確認している。その詳細は文末の参考文献を参照されたい。もう一つの理論的アプローチとして定義のあいまいな要素間バネの概念をできれば導入しないで理論の定式化を進める道を考え、著者の研究室では有限要素法の世界で現在はほとんど使われなくなった“応力モデル (stress models)”の再検討を行っている。(図18)。

その理由は応力モデルは応力を未知量にとっており、要素内外の応力の釣合条件を考えるが要素間の変位の連続性は一般に保たれないことを容認したモデルである。

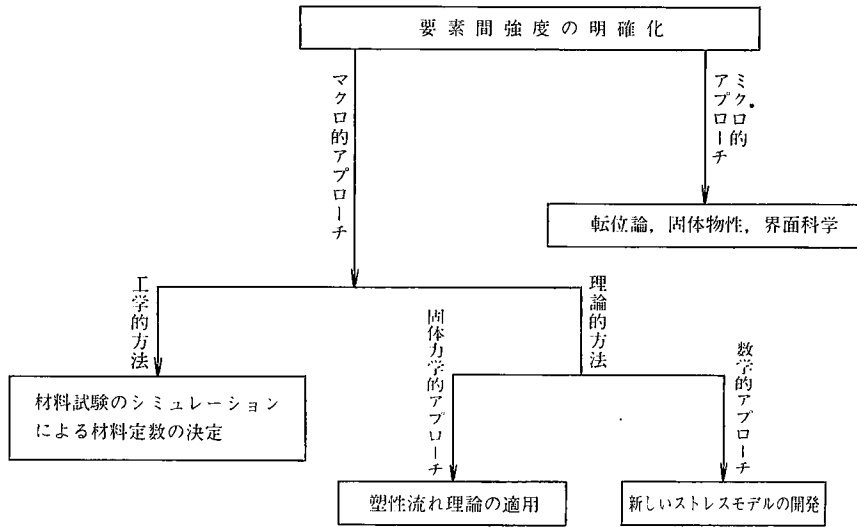


図19 要素間強度の明確化とそのアプローチ

したがって弾塑性解析は本質的に応力法 (Force method) の方が理にかなっており、また極限解析においてはいわゆる下界 (lower bound) の解を与えるので、従来の大部分の FEM モデルや RBSM モデルを用いて得られる近似解の精度をチェックする道が開けるものと思われる。

ハイブリッド型コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づいて渡辺は<sup>9)</sup>一連のハイブリッドストレスモデルを開発しその実用化を進めている<sup>13)</sup>。ついでながら前節で提案した有限要素-バネモデル (以後 FESM と略記する) を用いると一般に接触問題の解析が弾性でも塑性でも容易に行い得ることが実証されている。たとえば弾性接触の場合、 $k_n$ ,  $k_s$  のバネの特性を図 18 に示すようにとれば、接触領域が未知で載荷の進展に伴って変化してゆくので反復計算が必要であり若干計算は面倒になるが接触問題の解析も従来の有限要素法に比べるとずっと楽に行えるのである。

またこれまでは材料の粘弾性や粘弾塑性的特性を含めた場合の解析については解れていなかったが、原子炉の高温強度や土、岩盤、コンクリート構造においては無視できない重要な問題である。このような問題の場合には境界バネを図 20 に示すようなバネ-スライダ-ダッシュポット系で置き換えればよいのである。

その一般的定式化がすでに都井<sup>9)</sup>によって試みられ、二、三の基礎的問題について解析を行い、この方法の有効性が確認されているが、実際問題への応用は今後の課題である。これまで述べた方法はいずれも要素間強度を決定する理論的アプローチであるが、2 節で述べたように材料試験の結果得られる情報はあくまで材料試験片の平均応力と平均歪みとの関係であり、試験片の形状、荷重の種類、荷重の掛け方、境界条件、材料の組成、熱処理の

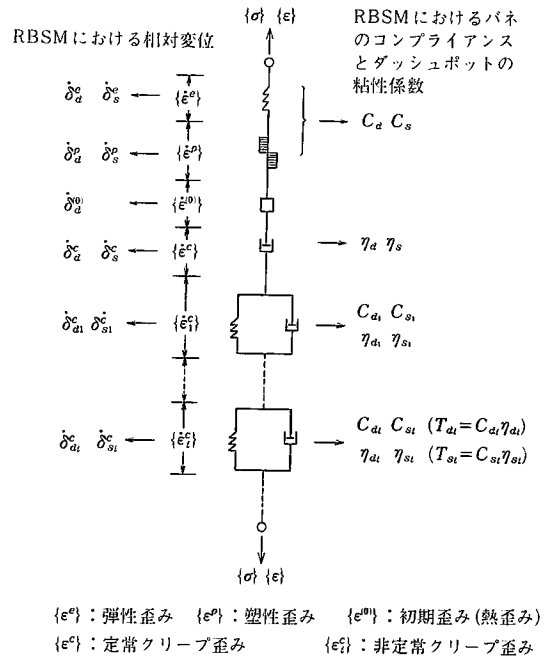


図20 粘弾塑性体の力学モデル

方法等と数多くの因子にその結果は左右されている。

これらの因子のなかで試験片の形状や境界条件の影響についていろいろ論ぜられているようであるが著者は固体力学の立場からこれらの点を重視したい。

材料の塑性変形や破壊等の問題は本来局所的なものであり、マクロのレベルでは一様な応力と見なされる場合でもミクロのレベルではかなりの不均一応力場になっていることは想像に難くない。このような原因がもとで固

体力学理論による解析と実験とは全く似ても似つかぬような結果となるわけで中西はこのような矛盾点を早くから見抜いて独自の理論を立てたのであろう。

さて試験片形状や境界条件の影響を取り除き、材料のより実際の応力-歪み関係や降伏条件を求めるために著者は本小論で説明した FESM モデルを用いて材料試験の計算機シミュレーションを行うこと提案したい。(Goodman の開発した岩盤解析用ジョイントエレメント<sup>14)</sup>や Ngo らが提案したコンクリート解析用リンケージエレメント<sup>15)</sup>ではバネ定数を実験的に決定することをすでに考えている)

すなわち要素間のバネ定数を適当に仮定してまず材料試験の結果得られる応力-歪み曲線を計算によって求めてみるのである。その結果得られた曲線と実験結果との間に相似性が見られるかどうか検討し、見られなければ、メッシュ分割を適当に変えて計算を繰り返して相似性が得られるようにする。次に最初に仮定したバネ定数を試行錯誤的に変化させて計算曲線が実験曲線に重なるようにする。このようにして最終的に計算曲線と実験による応力-歪み関係がほぼ一致するところまで持ってこれたとすれば、その時仮定したバネ定数とその使用構成則こそ我々が求めているより現実的なマクロのレベルでの応力-歪み関係ではなかろうか。

## 6. 結 論

固体力学の分野における非線形問題の解析において現在有限要素法が当面している壁が、連続体仮設に基づくものであることを述べ、この壁を打破するための一つのアプローチとして、こり (Slip) や亀裂の発生生長をも表現できるようにした新しい有限要素-バネモデルの考え方とその理論的根拠について若干説明した。

これを要するに物質の破壊を伴う現象は連続体力学の枠内で説明すると現在経験しているような数学的非線形の壁にぶつかり、有限要素法でも歯が立たない。この難

問を解決するため、物質の粒子性あるいはミクロの立場の考え方を若干とり入れてゆくことにより、固体の極限状態での挙動をより深く理解する道が開ける可能性のあることを論じた。

このモデルの理論的基礎づけは未完成で、検証データの集積も十分でないが、これまで試みた一連の例題解析からマクロの固体力学の分野で残された難問題の解明に何かのきっかけを与え得る可能性が見出されたばかりでなく、ミクロの世界の現象のシミュレーションにも応用し得る見通しが得られている。

近い将来この続報として理論的基礎の補足を行った上で二、三の新しい研究成果を紹介させていただき、本手法にご関心を持たれた方々から忌憚のない批判と助言をいただきたいと考えている。

(1980年3月19日受理)

## 参 考 文 献

- 11) 山田嘉昭：塑性・粘弾性，日本鋼構造協会編，コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-7-④，培風館
- 12) Zienkiewicz, O. C., et al.: "Stress Analysis of Rock as a 'No Tension' Material", *Geotechnique*, 18, p. 56-66, 1968
- 13) B. Fraeijns de Veubeke: "Displacement and equilibrium models in the finite element method", Chapter 9 of *Stress Analysis* (eds. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister), Wiley, 1965
- 14) R. E. Goodman, R. L. Taylor, and T. Bekke: "A model for the mechanics of jointed rock", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 94, SM3, p. 637-659, 1968
- 15) D. Ngo and A. C. Scordelis: "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beam", *ACI Journal*, Vol. 64, No. 3, March, 1967

