

## 不連続体力学のすすめ(その1)

## — 固体力学非線形問題への挑戦 —

Development of Discontinuum Mechanics (1)

— A Challenge to Nonlinear Problems of Solid Mechanics —

川井 忠彦\*  
Tadahiko KAWAI

固体や構造物の最終強度の問題は非弾性、大変形および亀裂の発生成長を伴う高度非線形問題である。この数学的非線形の壁は固体力学が基礎とする連続体仮説に由来すると思われる。著者の研究室ではこの壁を破るため“剛体—バネモデル(Rigid Body—Spring Model)”と名付ける要素を始め一連の離散化モデルを提案し、極限解析(limit analysis)の一般化を試みている。

この方法は物質の不連続性(粒子性)を考慮に入れた一つの粒状体力学理論ということができよう。

1. 技術革新の壁と固体力学非線形問題<sup>1), 2)</sup>

現在工学の諸分野で当面している技術革新の壁といわれる諸問題は100%非線形問題であり境界領域問題(Interdisciplinary problems)であるといっても過言ではない。

スリーマイルズ・アイランド事故のために前途多難な原子力開発においては原子炉の高温強度や耐震性の問題が最重点研究課題となっている。前者の問題は材料のクリープ変形や亀裂の発生を伴う解明困難な非線形問題の好例であり、後者の問題も地震を受ける原子炉の信頼性の高い破壊強度評価法の確立から要望されている動的非線形問題で有限要素法の最新の技法を用いてもその実用化には程遠い現状にある。

最近地球科学の分野では東海大地震発生の可能性をめぐってプレートテクトニクス説が茶の間の話題となり、地殻変動と地震の発生ならびにその伝播機構、地盤と構造物の動的連成性や地盤の液化化等地震学、地震工学の諸問題の研究が一段と推進されつつある。

かつてのタンカーブームの頃に相次いで起こった大型船の海難事故や昨年シカゴ空港で起きたDC-10の墜落事故等は今日の巨大科学技術、なかんずく構造工学の中に、いまだ知られざる盲点があることを警告した歴史的事件であった。また宇宙開発の副産物として生まれた複合材料や電子工学の将来を左右するといわれている半導体や超LSIの開発等により金属、冶金、応用化学、応用

物理、原子力、電気、電子工学等の広い分野に跨がる材料科学(material science)が脚光を浴びているが、その発展の鍵を握る固体物性、界面科学や転位論等の分野でもその研究開発が一つの曲り角にさしかかっていると聞いている。

一方溶鉱炉内の反応や内燃機関内のガスの燃焼流動現象は固体または気体の燃焼を伴う流れの問題であり、超高圧送電や核融合の分野におけるプラズマの問題等も本質的には電磁気学、流体力学、熱伝達や物質移動等数多くの学問分野が錯綜した典型的な学際問題であろう。

ここにあげた問題は今日技術革新の壁といわれている問題のほんの数例にすぎないが、それらが解明困難であるといわれる理由の一つはいずれも連続体仮説に基づく力学や物理学の枠内で理論の定式化を行おうとするために生ずる数学的非線形の壁に起因するのではないかと著者は考えている。

ところが現状ではこのような複雑な非線形問題を解くための数学が近い将来画期的な進歩を遂げる見通しは極めて暗いといわれており、学問の流れを変えるような発想の転換が要望されている。

さて問題を固体の非線形問題に限り、その問題点を論ずることにしよう。一般に構造物の非線形問題は材料非線形性、幾何学的非線形性および亀裂の発生成長の三つのパラメータに支配されたきわめて複雑な問題となる。したがって、最近のいかなる進んだ手法を駆使したとしても、その解明はきわめて困難である(図1)。

有限要素法が当面している大きな問題点は次の点であると著者は考えている。

① 有限要素法は通常、変位を未知量にとるいわゆる変位法(displacement method)に立脚しており、極限解析の立場から考えると、真の解の上界(upper bound)が求まるに過ぎない。したがって、これだけでは得られた解の精度は保証されないことを覚悟しなければならない。

② 有限要素法による非線形解析は、計算時間と費用が膨大にかかり、実用化には程遠い現状にある。その原

\* 東京大学生産技術研究所 第2部

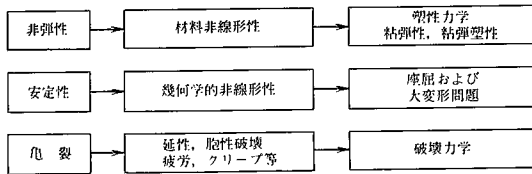


図1 構造非線形問題の本質

図は、非線形解析が荷重増分法 (load incremental procedure) を基礎としており、これに反復法 (iteration method) を併用したりして大次元行列演算を数多く繰り返す必要があるからである。また、計算精度を保持することがきわめて困難で往々にして演算が不安定になりやすいなどの点から、計算時間やコストがかかり過ぎる結果となる。これらが著者に新しい離散化モデルの開発を思い立たせた動機である。

## 2. 連続体力学の問題点

前節の末尾で有限要素解の精度の問題について言及したが、この点をさらに具体的に考えてみよう。

### (a) 材料試験と材料の構成式

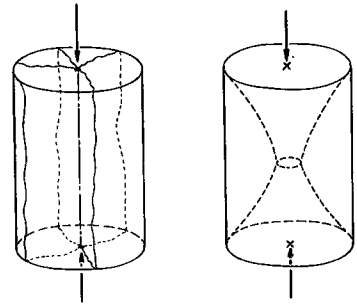
材料の構成則 (constitutive law) すなわち応力-歪みの関係や材料の破損法則は通常材料試験を行って実験的に定められる。これらの材料試験の結果得られる応力と歪みの関係は試験片のある断面における平均応力と平均歪みの関係を求めたもので、これをもってその材料の構成式であるとする現状の考え方について再検討する必要があるであろうか。

図2はコンクリート円柱試験片の圧壊した状態を示しているが、荷重端面の摩擦力の有無や寸法比によって縦割れを起こしたり、つぶみ状の圧壊を起こす。このような実験的事実は一軸方向の応力-歪関係を基礎とし、変位や応力の連続性を仮定する固体力学理論では十分な説明はできない。

軟鋼はいわゆる完全弾塑性の特性を示す金属材料であるが、軟鋼の丸棒の塑性振り問題を塑性理論に基づいて解析すると図3に示すような結果が得られる。

実際に軟鋼丸棒の振り試験を行ってみると、振りモーメント  $M$  と振り角  $\theta$  の関係は図4または図5のようになつて大筋において理論トルク-振り角曲線と一致する。

しかしながら変形過程を些細に調べるために降伏してしばらく変形が進行したところで、丸棒をその中心を通る縦断面で切断し、腐食して降伏による歪み模様を出してみると図4、5に示すように塑性振り変形に2種類のパターンがあることがわかる。すなわち第一の変形状態では図4のように軸長に沿って或部分のみが全面降伏状態になり、他の部分は弾性変形をするが第二の変形状態では丸棒の全長に亘り図5に示すような歪み模様が得られる。



(a) 引張り破壊モード (b) 剪断破壊モード

図2 コンクリート円柱試験片の圧壊パターン

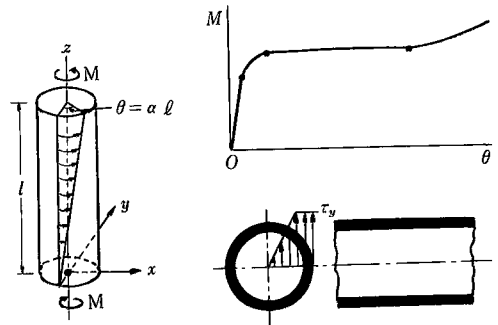


図3 現状の数理塑性学による丸棒の振り解析の結果

これは従来の数理塑性学に基づいて行った解析の結果とは全く一致していない。中西は長年に亘って行った精密かつ広範囲に亘る実験結果を基礎としてこれまでの材料の強さに関する学説はほとんどすべて、連続体の考え方の上に立ち、ある点の破損や破壊がその点の応力状態のみで決まると仮定しているが、これは実験事実と矛盾するとして独創的な材料の破損、破壊の学説を立てている<sup>3)</sup>。

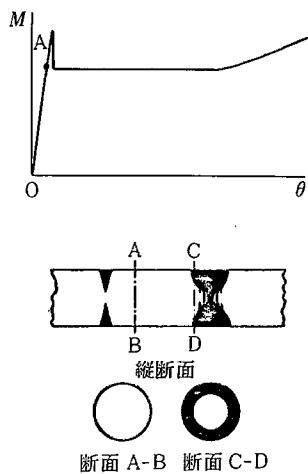
### (b) 切欠材の曲げ強度

近年急激な発展を遂げつつある破壊力学の分野での最大の関心事はクラック先端に発生する弾塑性応力場の問題であることはいうまでもなからう。

一般に切欠材の最終強度を通常の有限要素法による弾塑性解析を行ってみると真の解よりも高目の解を与えることが、Nagtegaalを始め多くの人々により指摘されている<sup>4), 5)</sup>。

この状況を示したのが図6である。図中RBSMとあるのは著者が最近開発を進めている剛体-バネ要素モデル (Rigid Body-Spring Model) を用いた場合の解析結果を表す。

従来の有限要素法 (FEM) は弾性域から弱塑性域 (塑性歪みの小さい非弾性域) まで真の解とよく合うが、それ以上荷重をふやすと求められる解はしだいに真の解か



(a) 横断面降伏の場合

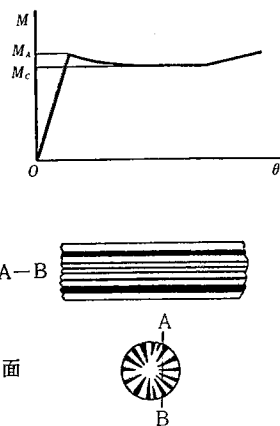
図4 丸棒の振り試験における塑性変形のパターン(その1)  
(中西, 佐藤著: 岩波全書“材料力学” p.13)

ら離れてゆく傾向にあり, 最終荷重は真の値よりもかなり高目に出るのが普通である. このような結果が得られる理由を考えると FEM は塑性域に入っても常に変位の連続性を要求する連続体力学に基づいており, 本来なら $\gamma$  (slip) が発生すべき個所でも変位の連続性が要求され, これによる拘束がしだいに大きく現れて計算される荷重-撓み曲線は真の解から高い方向に向かって離れてゆくことになるからであろう. すなわち従来の有限要素法は弾性域ないしは弱塑性域までには適用できるが, 塑性域が広範囲に広がるような強塑性域まで適用すると真の解とはかなり異なった結果を導く危険性がある. これに対し RBSM は本来極限解析専用モデルとして使用すべきもので, これを弾性や弱塑性域の解析に適用すると真の解とはかなり異なった結果を得る恐れがある(図7).

一般に固体は非常にたくさんの粒子の集合体である. これらの粒子は互いに引張り合う力が働いていてある形を保っている. ここで言う粒子は極めて漠然とした概念であるが金属材料の場合には一つの結晶, 土や粉体, 砂のような物質ではその粒そのものを意味するものとしよう. このような粒子の集合体に外力がかかって変形するものとすれば, その変形状態は

1. 粒子そのものの変形 (粒子内強度)
2. 粒子間の相対変形 (粒子間強度)

の二つの状態によって規定されると考えられる. ところがこの粒一つ一つの変位や変形を追跡することは不可能であるから, 当然のことながら粒子群の平均的挙動を追跡してゆこうという考え方が生まれてくる.



(b) 縦断面降伏の場合

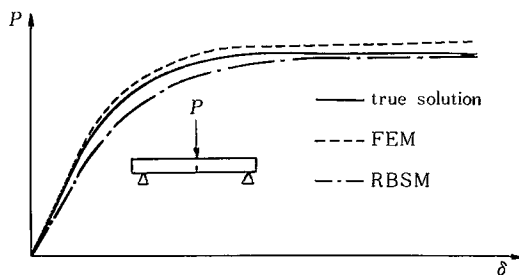
図5 丸棒の振り試験における塑性変形のパターン(その2)  
(同前, p.22)

図6 切欠の入った2次元曲げ部材の荷重-撓み曲線

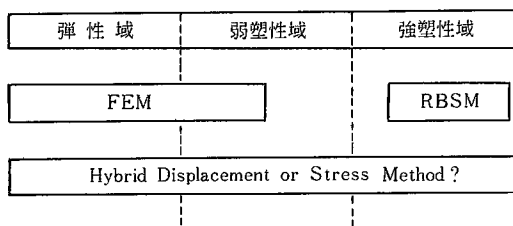


図7 FEM, RBSM, ハイブリット法の塑性問題における適用範囲

これがいわゆる連続体力学 (continuum mechanics) の立場であり, 固体力学 (solid mechanics) はその一分野で連続体という立場から固体の変形や応力分布を求めてゆこうとするものであり, 材料力学, 弾性学や塑性学はそれに属する.

有限要素法はこのような固体力学諸問題を近似的に解こうとする一つの離散化解析法 (discrete method) で有限要素は連続体の占める領域をいくつかのブロックに

分けた場合の一つのブロックを表している。この要素群の集合体にも粒子群の場合と同様次の二つの強度を当然考えるべきであろう。

1. 要素内強度
2. 要素間強度

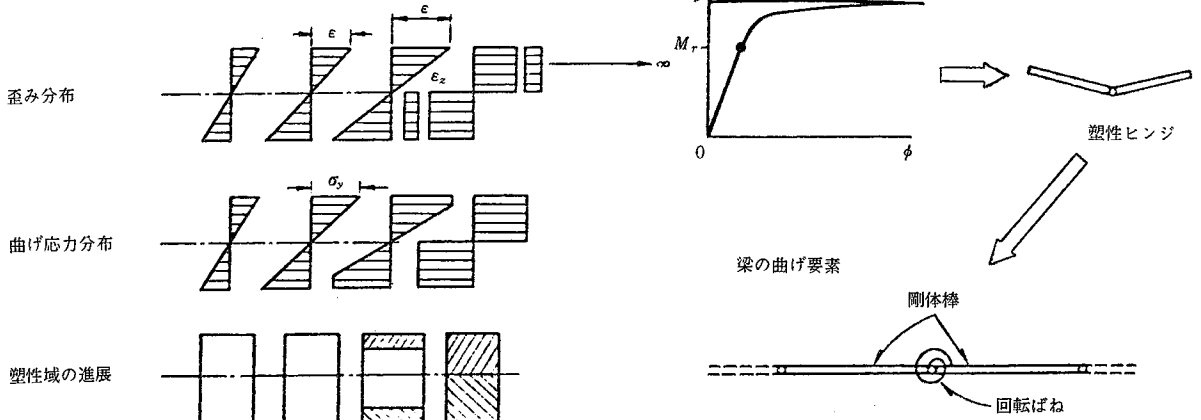
ところがいわゆる連続体力学は要素群の平均的挙動を追跡する“ならされた場”の力学であるために要素間強度という考え方は一般に消失してしまっており、もっぱら要素内強度のみを考慮の対象としてゆく立場をとることになっている。著者はここに数理塑性学の適用限界があると

思っている。

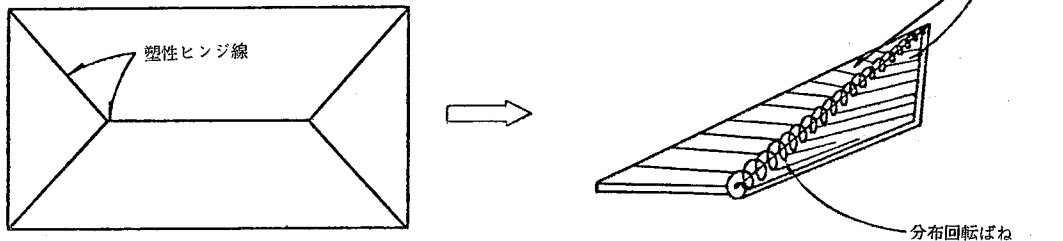
これに反してRBSMモデルの方は要素を剛体と見なしており、したがって要素内強度を無視した立場に立っている。そのためにこの要素を用いた弾性解析の結果は余り信用できないのである。

これを要するに固体の強度は要素内および要素間の2種類の強度に支配されており、FEMモデルは後者を無視しているため弾性から弱塑性域までは適用し得るが、この卓越する強塑性域まで適用するのは無理である。一方RBSMモデルの方は要素内強度を無視しているた

#### 梁の塑性曲げ



#### 板の曲げ崩壊解析



#### すべり理論 (ポンチの押し込み問題)

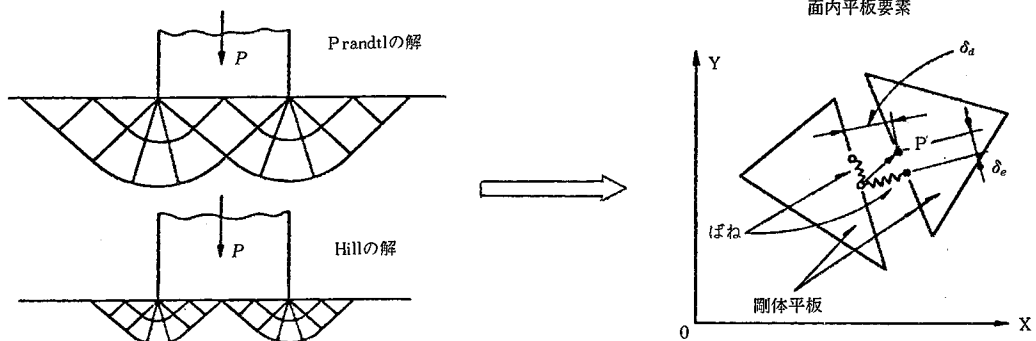


図8 剛体スプリング要素 (Rigid Body-Spring Model) の構想

め強塑性域においてのみ使用が許される要素である。すなわちどちらの要素も弾性から塑性の全域に亘って適用できる要素ではなく、したがって要素内、要素間両方の強度を考えた新しい要素モデルを開発すべきであることが自ずから明らかとなるであろう。

この間の関係をわかり易くまとめたのが表1である。

### (c) 外荷重を受ける固体または構造物の崩壊

一般に固体は、その弾性限を越えて荷重を加えてゆくと、塑性変形を生じ、いくつかのブロックに分かれて互いにすべりながら変形し、亀裂が発生生長してついに破壊する。その代表的な三つの例を示したのが図8である。

一番上の図は集中荷重を受ける梁の塑性曲げ、中の図は一様分布荷重を受けるコンクリートスラブの曲げ崩壊の過程を示したもので、崩壊時に梁は二つの剛体の棒を塑性関節 (plastic hinge) で、またスラブの場合には四つの剛体の三角形平板を塑性関節線 (plastic hinge line) で結合させたリンク機構になる。

また、一番下の図は土質工学や塑性加工学の分野において基本的な問題となっているポンチの押し込み問題を示したのである。いわゆるすべり線場 (slip line field) が発生し、下側の固体はすべり線で細分されたいくつかのブロックが互いにすべりながら剛体運動するリンク機構になっていく。

初めの曲げ崩壊の例で述べた塑性関節ないし塑性関節線は、詳しく調べてみると実は最後の例で述べたすべり線またはすべり面で構成されていることが実験的にわかっている。

したがって、以上三つの例から次のような結論が引き出せる。

- ① 固体の塑性変形の本質はすべりである。
- ② 固体はそれに加わる荷重の極限状態において、すべり線またはすべり面で区切られたたくさんの、しかし有限個のブロックに分かれ、互いに剛体運動を起こしながら不安定破壊する。

このような実験的事実に基づき、図10に示すような任意形状の3次元剛体をその接触面上に分布させた2種類のばね、すなわち接触面の法線方向の相対変位と接線方向の相対変位に基づいて反力を発生するばね系で接合されているモデルを考えた。そして、このばね系に必要な応力 - 歪み関係式、たとえば完全弾塑性体や Mohr - Coulomb の関係式を導入すれば、従来の有限要素法の標準的手法に従って、これらの要素の剛性マトリックスが導けるのである。これが4年前著者が考えた剛体 - バネモデルのあらましである。

### 3. 結 び

今後の技術開発は“非線形現象”と“境界領域問題”との戦いであることを述べ、固体力学非線形問題を例に

表1 FEMとRBSMのモデルの比較

要 素	要素内強度	要素間強度	適用範囲
FEM	○	×	弾 性 域 (弱 塑 性 域)
RBSM	×	○	極限解析専用 (強 塑 性 域)
新離散化要素	○	○	弾性および 塑性 全 域

○: 考えている

×: 考えていない

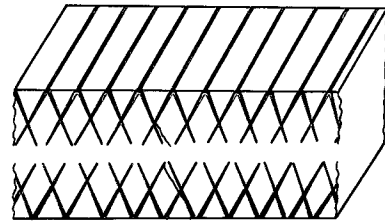


図9 塑性曲げを受ける平板横断面内に生じたりり線 (slip lines) の模様

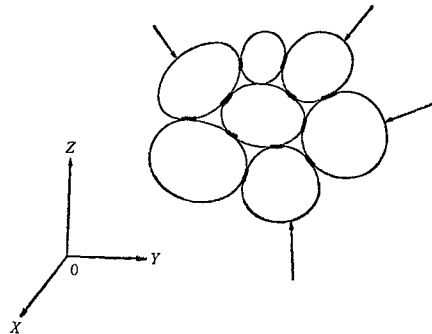


図10 3次元剛体要素の集合モデル

と有限要素法の問題点について考察した。そしてこの問題を解決するために著者の研究室で開発を進めている“剛体 - バネモデル”の思想について述べた。次号では新離散化モデルの数学的基礎について述べ、要素間強度を決定するバネ常数のとり方について論ずるつもりである。著者は本誌3月号にもこのモデルの概要紹介記事を掲載して頂いたが、紙面の制約のため意を尽くせなかった点がいくつかあった。その点を補足する意味で本論説を書いたのであるが、かなりの重複部分があるにも拘らず本誌掲載をご承認下さった出版委員会委員各位に心からお礼申し上げる。

(1980年3月19日受理)

## 参 考 文 献

- 1) 川井忠彦: "技術革新と有限要素法", Engineer, 356, 日科技連, p.1~7, 1978. 5
- 2) 川井忠彦: "新離散モデルで非線形問題を解析", 日経メカニカル, 1980. 1. 21号
- 3) 中西不二夫, 佐藤和郎著: 材料力学, 岩波全書, 273
- 4) J. C. Nagtegaal, D. M. Parks and J. F. Rice, "On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 4, p.153-78, 1974
- 5) 白鳥正樹, 三好俊郎: "切欠材の塑性拘束に関する研究", 日本鋼構造協会第13回大会研究集会, マトリックス解析法研究発表論文集, 昭和54年6月
- 6) 鷲津久一郎: 弾性学の変分原理概論, 日本鋼構造協会編, コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-3㉔, 培風館
- 7) 川井忠彦: 新しい要素モデルによる固体力学諸問題の解析, 生研セミナーテキスト(コース29), 昭和52年7月, 生産技術研究所奨励会
- 8) 川井忠彦: 物理モデルによる連続体力学諸問題の解析, 生研セミナーテキスト(コース39), 昭和53年10月, 生産技術研究所奨励会
- 9) 川井忠彦: 物理モデルによる連続体力学諸問題の解析(第2回), 生研セミナーテキスト(コース48), 昭和54年10月, 生産技術研奨励会
- 10) 山田嘉昭: 塑性力学, 日本工業新聞社

