

新しい離散化モデルによる軸対称問題の解析

An Analysis of Axisymmetric Problems by Means of New Discrete Models

竹内 則雄*・上田 真稔**・川井 忠彦*

Norio TAKEUCHI, Masatoshi UEDA and Tadahiko KAWAI

1. はじめに

軸対称問題は平面問題の場合と同様に2次元状態であり、軸対称荷重が作用したときの軸対称体の応力分布を求めるとき便利に使われる。軸対称問題と平面問題の本質的に異なる点は、平面に垂直な方向の応力成分、あるいは歪み成分の存在である。軸対称状態では半径方向変位があると自動的に円周方向に歪みを生ずるため応力も存在する。従って、円周方向の歪み成分とそれに付随する応力成分を考慮しなければならない。

有限要素法ではこのような軸対称問題に対処するため初期のころから軸対称要素が開発されていた^{1)~3)}。一方、川井によって示された新離散化モデル(以後RBSMと呼ぶ)^{4)~6)}は一般化された極限解析用のモデルであるため変位の信頼性が薄い。従って、円周方向の歪みをうまく表現することができず、軸対称要素の開発が遅れていた。著者らは、変位の精度は多少下がるが、力の釣合を主眼として新しい軸対称要素を開発した。本論文はその定式化と二、三の計算結果を示したものである。

2. 軸対称要素の剛性行列

今、三角形要素を考えると、三角形板上の任意点Pの変位と重心点の剛体変位の間に次のような関係がある。

$$U = Q \cdot U_i \quad (2.1)$$

$$U = [U_1 \ V_1; U_2 \ V_2]^T$$

$$U_i = [u_1 \ v_1 \ \theta_1; u_2 \ v_2 \ \theta_2]^T$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(Z-Z_{G1}) & & & 0 \\ 0 & 1 & (r-r_{G1}) & & & \\ & & & 1 & 0 & -(Z-Z_{G2}) \\ & & & 0 & 1 & (r-r_{G2}) \end{bmatrix}$$

次に、P点の変形後における相対変位成分(δ_d, δ_s)ならびに回転半径方向の平均変位(δ_u)を次のように表す。

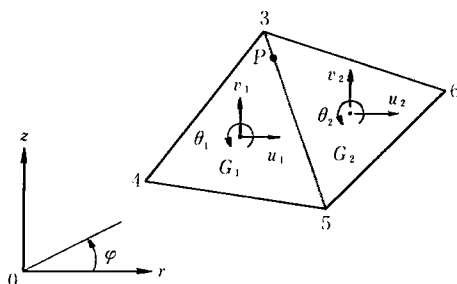


図2.1 新しい軸対称要素

$$\begin{Bmatrix} \delta_d \\ 2\delta_u \\ \delta_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_1 & l_2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{V}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{V}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\delta = M \cdot \bar{U} \quad (2.2)$$

ここで、 l_1, l_2 は方向余弦であり、上付きの $\bar{\quad}$ は局所座標系の成分であることを示している。そこで、座標変換マトリックスRを用いて、全体座標系Uと局所座標系 \bar{U} の間に次の関係を導いておく。

$$\bar{U} = R \cdot U \quad (2.3)$$

$$R = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & & & & 0 \\ l_2 & m_2 & & & & \\ & & & l_1 & m_1 & \\ & & & 0 & & l_2 & m_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} l_1 = \cos(\bar{r}, r) \\ l_2 = \cos(\bar{r}, Z) \\ m_1 = \cos(\bar{Z}, r) \\ m_2 = \cos(\bar{Z}, Z) \end{matrix}$$

以上の式をまとめると、P点の変形後の相対変位ベクトル δ は、重心点の変位 U_i を用いて次のように表される。

$$\delta = M \cdot R \cdot Q \cdot U_i \quad (2.4)$$

次に、便宜上、相対変位 δ に対応する仮想歪み成分 ϵ を定義する。

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_d \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_d / (h_1 + h_2) \\ \delta_u / r \\ \delta_s / (h_1 + h_2) \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

*東京大学生産技術研究所 第2部

**竹中工務店 技術研究所

研究速報
ここに、 h_1, h_2 は三角形板要素の重心 G_1, G_2 から、それぞれの要素境界面上に下ろした垂線の長さである。また r は半径方向の座標を示す。(2・4)式を用いて、(2・5)式の仮想歪みを表すと以下のようになる。

$$\epsilon = \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_i \quad (2 \cdot 6)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -l_1/h & -m_1/h & -l_1(Z-Z_{G1})/h + m_1(r-r_{G1})/h \\ 1/(2r) & 0 & (Z-Z_{G1})/(2r) \\ -l_2/h & m_2/h & -l_2(Z-Z_{G1})/h + m_2(r-r_{G1})/h \\ l_1/h & m_1/h & l_1(Z-Z_{G2})/h - m_1(r-r_{G2})/h \\ 1/(2r) & 0 & (Z-Z_{G2})/(2r) \\ l_2/h & m_2/h & l_2(Z-Z_{G2})/h - m_2(r-r_{G2})/h \end{bmatrix}$$

この結果 \mathbf{B} マトリックスは一般に座標に依存することになる。剛性行列を作る場合、積分を伴うが、このようなときは数値積分を行えば良い。一般的には三角形頂点の r の平均値を用いることが行われている¹⁾。ここでも、計算の手間を省くため次のような平均値を用いて r の代用とする。

$$r = (r_3 + r_5) / 2 \quad (2 \cdot 7)$$

さて、このようにして得られた仮想歪みをバネを媒体として対応する単位面積当たりの表面力と結びつけることを考える。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_\theta \\ \tau \\ \sigma \\ \mathbf{D} \\ \epsilon \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_d \\ \epsilon_\theta \\ r_s \\ \epsilon \end{Bmatrix} \quad (2 \cdot 8)$$

ここで、 \mathbf{D} はバネマトリックスであるが、一般にバネ定数は実験、実測から決定することが望ましい。ここでは平面問題と同様に便宜上次のように仮定する。

$$k_d = 2k_\theta = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad k_s = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

以上の結果、変形後に2要素間に蓄えられるエネルギーは次式で与えられる。

$$V = \pi r \int_{l_{35}} \epsilon^T \mathbf{D} \epsilon ds = \pi r \mathbf{U}_i \int_{l_{35}} (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}) ds \mathbf{U}_i \quad (2 \cdot 9)$$

従って、Castigliano の定理から要素の剛性マトリックス \mathbf{K} を得ることができる。

$$\mathbf{K} = \frac{2\pi r l_{35}}{h} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & & & & K_{55} & K_{56} \\ \text{SYM.} & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \quad (2 \cdot 10)$$

\mathbf{K} の成分を書くと以下のようになる。

$$\begin{cases} K_{11} = k_d y_{35}^2 + k_s x_{35}^2 + k_\theta / (4r^2) \\ K_{12} = -(k_d - k_s) y_{35} \cdot x_{35} \\ K_{13} = k_d y_{35} \Delta_{11} - k_s x_{35} \Delta_{21} + k_\theta (Z - Z_{G1}) / (4r^2) \\ K_{14} = -k_d y_{35}^2 - k_s x_{35}^2 + k_\theta / (4r^2) \\ K_{15} = -K_{12} \\ K_{16} = k_d y_{35} \Delta_{22} - k_s x_{35} \Delta_{12} + k_\theta (Z - Z_{G2}) / (4r^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{22} = k_d x_{35}^2 + k_s y_{35}^2 \\ K_{23} = -(k_d x_{35} \Delta_{11} + k_s y_{35} \Delta_{21}) \\ K_{24} = -K_{12} \\ K_{25} = -K_{22} \\ K_{26} = -(k_d x_{35} \Delta_{22} + k_s y_{35} \Delta_{12}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{33} = k_d \Delta_{11}^2 + k_s \Delta_{21}^2 + k_d l_{35}^4 / 12 + k_\theta (Z - Z_{G2})^2 / (4r^2) \\ K_{34} = -k_d y_{35} \Delta_{11} + k_s x_{35} \Delta_{21} + k_\theta (Z - Z_{G1}) / (4r^2) \\ K_{35} = -K_{23} \\ K_{36} = k_d \Delta_{11} \Delta_{22} + k_s \Delta_{21} \Delta_{12} - k_d l_{35}^4 / 12 + k_\theta (Z - Z_{G2}) / (4r^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{44} = K_{11} \\ K_{45} = K_{12} \\ K_{46} = k_d y_{35} \Delta_{22} - k_s x_{35} \Delta_{12} + k_\theta (Z - Z_{G2}) / (4r^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{55} = K_{22} \\ K_{56} = K_{26} \end{cases}$$

$$K_{66} = k_d \Delta_{22}^2 + k_s \Delta_{12}^2 + k_d l_{35}^4 / 12 + k_\theta (Z - Z_{G2})^2 / (4r^2) \quad (\times 1/l_{35}^2)$$

$$\begin{cases} 2\Delta_{11} = x_{35}(x_{31} + x_{51}) + y_{35}(y_{31} + y_{51}) \\ 2\Delta_{12} = x_{35}(y_{32} + y_{52}) - y_{35}(x_{32} + x_{52}) \\ 2\Delta_{21} = -x_{35}(y_{31} + y_{51}) + y_{35}(x_{31} + x_{51}) \\ 2\Delta_{22} = -x_{35}(x_{32} + x_{52}) - y_{35}(y_{32} + y_{52}) \\ Z - Z_{Gi} = \frac{1}{2}(Z_{3i} + Z_{5i}) \quad (x_i = x_i - y_j) \end{cases}$$

3. 数値計算例

新しい軸対称要素の有効性を確かめるため簡単な数値計算を行った。図3・1、図3・2は内圧の加わる円筒シリンダーの弾性解析結果である。図3・1は、内圧が作用したときの各断面における応力値をプロットしたもので正解と良好な一致を示している。図3・2は要素分割を細かくしたときの各応力の収束性を示したもので、 $n=4$ 程度である程度の答えが得られているものと考えられる。半径方向の座標値に平均値を用いてもある程度の要素分割を行えば、さほど誤差は含まれないと考えられる。

図3・3は円周方向のバネの受け持つ力が許容値を越えたら降伏するとした単純な塑性解析を行った結果である。計算された最高荷重は正解と良好な一致を示している。また、降伏が内側から外へ向かって進んでいく様子が伺える。なお、荷重-変位曲線は内圧の加わった点の値である。

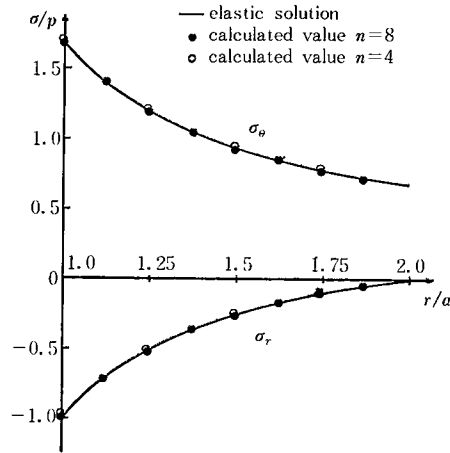
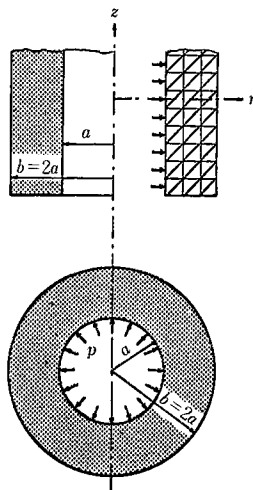


図3・1 内圧の作用する円筒シリンダーの弾性解析結果

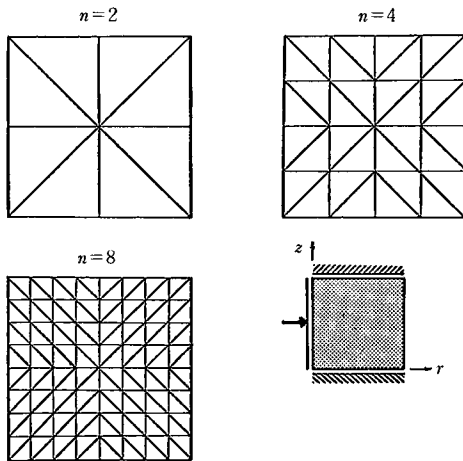
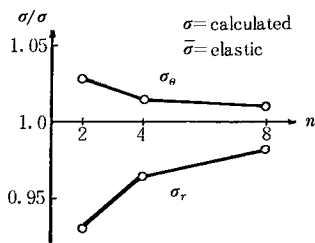


図3・2 載荷面上の応力値の収束性

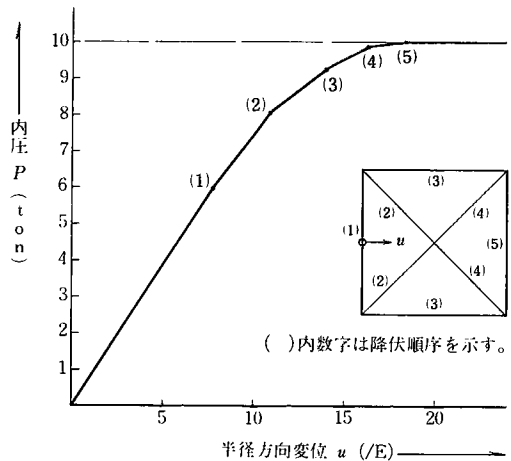
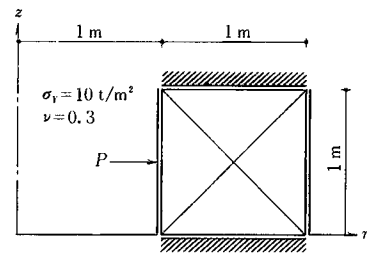


図3・3 内圧の作用する円筒シリンダーの塑性解析結果

図3・4は円形のポンチの押し込みに対する例である。ポンチと円板の間の摩擦係数は零としてある。また、降伏条件は前の図3・3の例題と異なり、せん断力がある一定の値を越えたらこるものとして解析を行った。こり線は図3・4の上図のように表される。下図は荷重一た

わみ曲線を書いたもので、最高荷重は正解と約1%程度異なる程度で良好な一致を示した。

4. む す び

川井によって提案された新しい離散化モデルに軸対称

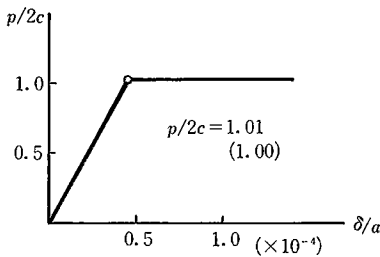
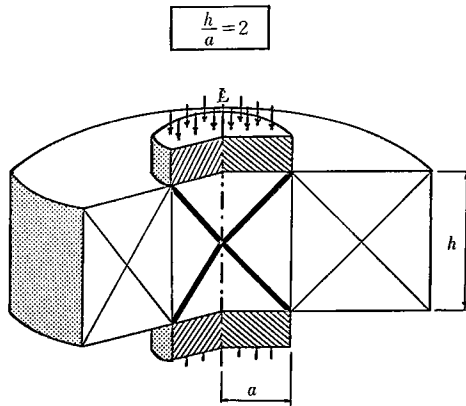


図3・4 円形ポンチの押し込み問題

要素を追加し、二、三の数値計算例を通してその有効性を確かめた。

一般に、RBSMは極限解析用のモデルであり、変位に対する信頼性はあまりないが、図3・1、図3・2に示し

たように応力（単位面積当たりの表面力）についてはある程度満足いく結果が得られたものとする。また、 r に対する近似として、座標値の平均を用いてもある程度誤差は含まれるものの良好な結果が得られる。数値積分等の手間を考えると、平均値を用いた方が簡単であろう。

次に、簡単な塑性条件を与えて塑性解析を行ってみた。その結果、最高荷重は良好な値を示すことがわかった。変位に対する信頼性は薄いとはいえ、極限解析用のモデルとして有効なモデルとなり得るものと考えることができよう。
(1980年3月24日受理)

参考文献

- 1) Zienkiewicz, O. C. : "The Finite Element Method", McGraw-Hill, 3rd ed. (1977)
- 2) 川股 : "有限要素法による回転体の応力解析", 生産研究, Vol. 20, No. 5, pp. 30~36 (1968)
- 3) 梶田, 秋本, 川本 : "円柱せい性材料供試体の一軸圧縮試験における加圧面拘束が変形状態および圧縮強度におよぼす影響", 土木学会論文報告集, Vol. 166, pp. 27~38 (1969)
- 4) 川井 : "生研セミナーテキスト" (1977)
- 5) 川井 : "生研セミナーテキスト" (1979)
- 6) Kawai, T. and Toi, Y. : "A New Element in Discrete Analysis of Plane Strain Problems", J. of 'Seisan Kenkyu', Institute of Industrial Science, Univ. of Tokyo, Vol. 29, No. 4, pp. 204~207

