研究速報

UDC 681.3.01
518.43:517.43

サブスペース実ベクトル反復法による複素固有値問題解法

Solution of Complex Eigenproblems by Real Vector Iteration in Subspace

山田嘉昭*・岡村知郎**
Yoshiaki YAMADA and Tiro OKAMURA

1. はじめに

構造物等の動的応答解析を離散化した系について行う場合，解法としてモーダルアナリシス法がよく用いられる．この場合，解析しようとする系が非比例減衰を有するときは，系の複素固有ベクトルを求めなければならない．これはちょうど，質量および剛性マトリックス以外の作用素(減衰マトリックスなど)を質量および剛性マトリックスから得られる自然振動モードによって対角化することができないケースに相当している．比例減衰系であるならば，質量および剛性マトリックスのみを含んだ形の実固有値問題をサブスペース法等のベクトル反復法を用いて解き，必要とする次数までの実固有ペアを効率良く求めることができる．これに反して，非比例減衰系では，同様の解法を適用して，複素固有ペアを算出することは不可能である．ここでは，Jennings[1]らのベクトル反復による非エルミートマトリックスの固有値問題解法を，非比例減衰を含む一般固有値問題に適用を試みた結果について報告する．こうして得たアルゴリズムによってはりの横振動モードを計算し，Dong[2] のBlock−Stodola法による結果と比較した．

2. 解法

一般に有限要素法等によって，離散化された系の振動をモーダルアナリシス法によって解析する場合，減衰を含む系では，次の式に示されるような2次の一般固有値問題を解かなければならない．

$$(\lambda^2 M+\lambda C+K)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

ここで，Mは質量マトリックス，Cは減衰マトリックス，Kは剛性マトリックス，$\boldsymbol{X}$は固有ベクトル，そしてλは固有値である．このとき，Cがレーリー・ダンピング(Rayleigh damping)などで与えられる比例減衰を表すものであれば，次の式

$$K\boldsymbol{X}=\omega^2 M\boldsymbol{X} \tag{2}$$

で与えられる実固有値問題の解として得られる実固有ベクトルによってM，K，そしてCがすべて対角化可能である．しかし，非比例減衰の場合にはM，KのみでなくCを含めた系の固有ペアを求めることが必要である．この目的のため，最初に式(1)を次のように1次の一般固有値問題に変換する．

$$\begin{bmatrix} O & -K \\ -K & -C \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{Bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} -K & O \\ O & M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

または

$$\begin{bmatrix} O & I \\ -K & -C \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{Bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} I & O \\ O & M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

ただし $\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \lambda\boldsymbol{x} \end{Bmatrix}$，　I：単位マトリックス

式(3)では，左および右辺のマトリックスがいずれも実対称であるが，非正定値となっている．これに対して，式(4)では右辺のマトリックスが実対称正定値であるが，左辺は実非対称でしかも非正定値のマトリックスを有している．式(3)は右固有ベクトルによって対角化することができ，式(4)は双正規直交系をなす左右の固有ベクトルによって対角化が可能である．しかし，いずれの場合でも固有ペアが実である保証はないため，複素空間上でのベクトルを考えなければならない．ところが，数値計算においては直接複素数を扱うことは避けるべきである．こうして，実数表現によって複素ベクトルを取り扱う目的で提案されたのが，Jennings および Dong の方法である．

いま，Aを非エルミートマトリックスとし，j番目の固有値を$\alpha_j\pm i\beta_j$とし，これに結合する右固有ベクトルを$\boldsymbol{r}_j\pm i\boldsymbol{s}_j$とすると

$$A\lfloor \boldsymbol{r}_j+i\boldsymbol{s}_j,\ \boldsymbol{r}_j-i\boldsymbol{s}_j\rfloor=\lfloor \boldsymbol{r}_j+i\boldsymbol{s}_j,\ \boldsymbol{r}_j-i\boldsymbol{s}_j\rfloor\begin{bmatrix} \alpha_j+i\beta_j & 0 \\ 0 & \alpha_j-i\beta_j \end{bmatrix} \tag{5}$$

である．式(5)の後方から次の$\boldsymbol{q}^J$または$\boldsymbol{q}^D$をかける．

$$\boldsymbol{q}^J=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix},\ \boldsymbol{q}^D=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \tag{6}$$

* 東京大学生産技術研究所 第1部
** 東京芝浦電気株式会社

乗算の結果は，それぞれに対応して次のようである．

$$A\lfloor \boldsymbol{r}_j,\ \boldsymbol{s}_j \rfloor = \lfloor \boldsymbol{r}_j,\ \boldsymbol{s}_j \rfloor \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix} \qquad (5')$$

$$A\lfloor \boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{s}_j,\ \boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{s}_j \rfloor = \lfloor \boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{s}_j,\ \boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{s}_j \rfloor \begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix} \qquad (5'')$$

以上の結果，複素固有値および複素固有ベクトルを有する系であっても,実ベクトルと実マトリックスで表された式(5′)または式(5″)と等価に扱うことができることがわかる．$\boldsymbol{q}^J$ は Jennings ら，$\boldsymbol{q}^D$ は Dong がそれぞれ提案したものであり，いずれもユニタリ・マトリックスである．こうしてここでの一般複素固有値問題について，最低次のものからいくつかの固有ペアを求めるサブスペース(subspace)的な方法を考えると,そのアルゴリズムは下に示すようになる．A および B を $2n$ 次元のマトリックスとし，求めようとする固有ペアを $2r$ 組とするとき，以下において $\boldsymbol{Z}_k$ は $2n\times 2r$ のマトリックスを表すことになる．

1）$A\boldsymbol{Z}_k = B\boldsymbol{Z}_{k-1}$
2）$[a]_k = \boldsymbol{Z}_k^T A\boldsymbol{Z}_k$
3）$[b]_k = \boldsymbol{Z}_k^T B\boldsymbol{Z}_k$
4）$[b]_k^{-1}[a]_k\boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{Q}_k\Lambda_k$
5）$\boldsymbol{V}_k = \boldsymbol{Z}_k\boldsymbol{Q}_k$
6）正規化
7）$\boldsymbol{Z}_{k-1} = \boldsymbol{V}_k\boldsymbol{q}$

以下，アルゴリズムの各ステップについて説明すると，
1) これは逆反復の過程である．つまり

$$\begin{bmatrix} O & -K \\ -K & -C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}_k \\ \boldsymbol{Y}_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -K & O \\ O & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}_{k-1} \\ \boldsymbol{Y}_{k-1} \end{Bmatrix} \qquad (7)$$

を $\boldsymbol{X}_k$ と $\boldsymbol{Y}_k$ について解くことになるが，実際の計算では次式の演算にすぎないものとなる．

$$\left.\begin{aligned} K\boldsymbol{X}_k &= -C\boldsymbol{X}_{k-1} - M\boldsymbol{Y}_{k-1} \\ \boldsymbol{Y}_k &= \boldsymbol{X}_{k-1} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

2)および3)　系を $2r$ 次元に縮小する．Jenningsらは縮小されたマトリックスを interaction matrix と呼んでいる．式(3)で与えられる系を用いた場合は

$$[a]_k = \boldsymbol{Z}_k^T \begin{bmatrix} O & -K \\ -K & -C \end{bmatrix} \boldsymbol{Z}_k = -\boldsymbol{X}_{k-1}^T K\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_k^T K\boldsymbol{X}_{k-1} - \boldsymbol{X}_{k-1}^T C\boldsymbol{X}_{k-1} \qquad (9)$$

または，式(8)の第1行により

$$[a]_k = \boldsymbol{X}_{k-1}^T M\boldsymbol{Y}_{k-1} - \boldsymbol{X}_k^T K\boldsymbol{X}_{k-1} \qquad (10)$$

$$[b]_k = \boldsymbol{Z}_k^T \begin{bmatrix} -K & O \\ O & M \end{bmatrix} \boldsymbol{Z}_k = -\boldsymbol{X}_k^T K\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{X}_{k-1}^T M\boldsymbol{X}_{k-1} \qquad (11)$$

また，式(4)で与えられる系を用いた場合は

$$[a]_k = \boldsymbol{Z}_k^T \begin{bmatrix} O & I \\ -K & -C \end{bmatrix} \boldsymbol{Z}_k = -\boldsymbol{X}_{k-1}^T K\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{X}_k^T\boldsymbol{X}_{k-1} - \boldsymbol{X}_{k-1}^T C\boldsymbol{X}_{k-1} \qquad (12)$$

または，式(8)の第1行により

$$[a]_k = \boldsymbol{X}_k^T\boldsymbol{X}_{k-1} + \boldsymbol{X}_{k-1}^T M\boldsymbol{Y}_{k-1} \qquad (13)$$

$$[b]_k = \boldsymbol{Z}_k^T \begin{bmatrix} I & O \\ O & M \end{bmatrix} \boldsymbol{Z}_k = \boldsymbol{X}_k^T\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{X}_{k-1}^T M\boldsymbol{X}_{k-1} \qquad (14)$$

4) 縮小した系での右固有ベクトル $\boldsymbol{Q}_k$ を求める．本報告では $\boldsymbol{Q}_k$ を求める方法としてダブル QR 法[3] を用いている．
5) ここで元の空間での近似複素固有ベクトル $\boldsymbol{Y}_k$ が得られる．ここでの演算は Rayleigh－Ritz の過程に該当している[4]．
6) $\boldsymbol{V}_k$ の各列ベクトルにおける最大要素を1にする．
7) 式(6)に示した $\boldsymbol{q}^J$ または $\boldsymbol{q}^D$ を用いて反復ベクトルを実ベクトルにする．

以上が，本報告の方法の要旨である．これに対して，Dong の Block－Stodola 法は，1)～3)の過程を式(3)の代りに式(4)で与えられた系に適用したものである．また，4)の過程における縮小された系の固有値問題解法に double diagonalization 法を用い，7)の実数化では $\boldsymbol{q}^D$ を適用している．なお，本報告のアルゴリズムを，$\boldsymbol{q}^J$ を用いて非エルミート行列の標準固有値問題に適用するとJennings が lop－sided iterationと呼んでいる方法となるが，そのときの4) および5) の操作を Stewart[5] は Schur－Rayleigh－Ritz の過程と呼んでいる．ただし，Jennings の場合，2) と 3) の系の縮小過程で $\boldsymbol{Z}_{k-1}$ を用いている．

3. 計算結果

前節で示したアルゴリズムに従ってプログラムを作成し，計算例題として図1に示す両端単純支持はりの問題を取り扱い，その横振動モードを求めた．はりの断面は直径 0.2 cm の円形，長さは 10 cm, ヤング率Eは 2.0 kgf/cm² であって，比重量 0.1×10^{-2} kgf/cm³ の材料からなるものとする．有限要素分割数は10とした．減衰マトリックスは，材料特性が単純 Voigt モデルによって表されその構成式が次のように与えられているものとして導いる．

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \qquad (15)$$

ただし，η は粘性係数を表す．はりの長さ z 方向に，次のように η の変化を仮定することとした．

$$\eta=\alpha z+\beta \tag{16}$$

式(16)において $\alpha=0$ のときは比例減衰であるが，$\alpha\neq0$ であれば非比例減衰である．ここで示す計算結果では，$\beta=0.1\times10^{-3}$ kgf sec/cm^2 とし，非比例減衰の場合は $\alpha=0.1\times10^{-3}$ kgf sec/cm^3 を用いている．また，サブスペースにおいての反復ベクトルの数は $r=4$ とし，15回まで反復したときの固有値の収束状態を観察した．

小さい方からの二つの固有値 λ_1 と λ_2 の計算結果の収束状況を相対誤差で表し，実数部を破線，虚数部を実線として図2〜図5に示している．図2はDongのBlock-Stodola法と同等の算法の場合であって，式(4)をアルゴリズムの1)〜3)の過程に適用し，また q^D を用いている．この場合には，図に示した比例減衰系の結果でも十分な収束は得られなかった．図3は式(3)を用い，ステップ2)，3)では式(9)と式(11)に従っているが，q については q^D を適用した結果で，図2と同じく比例減衰系に対する解を示したもので，実数部については収束状態の改善が認められる．図4は q^I を用いる以外は図3の場合と同じ算法であって，比例減衰において一応 10^{-15} あたりまでの収束が得られている．そして，同じ算法で非比例減衰系について計算した結果が図5である．このときの収束状態は比例減衰系での結果を示した図4に比べて緩慢であるが，図2のDongの方法を用いた場合などと比較すると良好である．また，ここには示していないが，アルゴリズムのステップ2)において，式(9)の代わりに式(10)を用いた場合は収束が遅くなる傾向があった．そのほか，ステップ6)での正規化の過程において，各列ベクトルのノルムを1にする方法を用いると，最大要素を1にする正規化の方法を用いる場合に比べて収束が若干悪化する傾向が認められた．

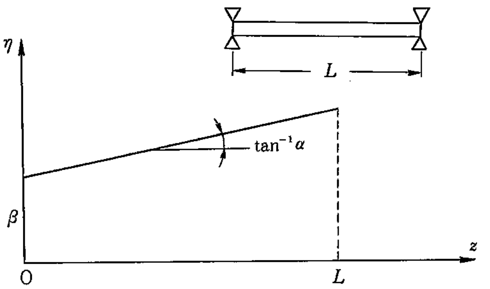

図1　はりと粘性減衰力の分布

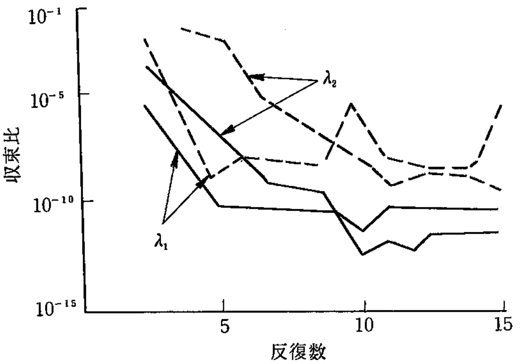

図2　Dong の Block-Stodola 法（比例減衰）

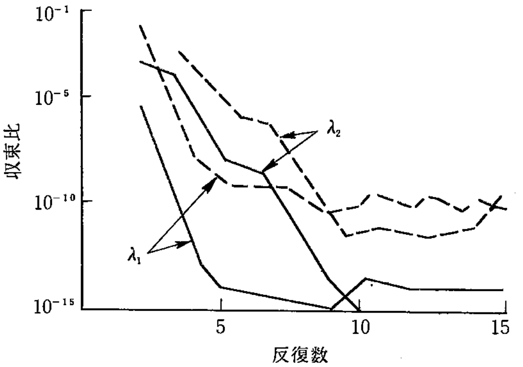

図3　Dong の方法の修正アルゴリズム（比例減衰）

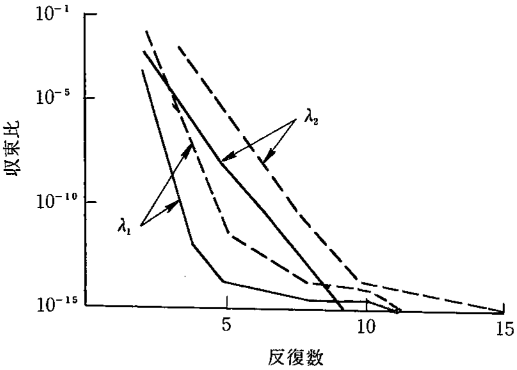

図4　本論文の方法による解（比例減衰）

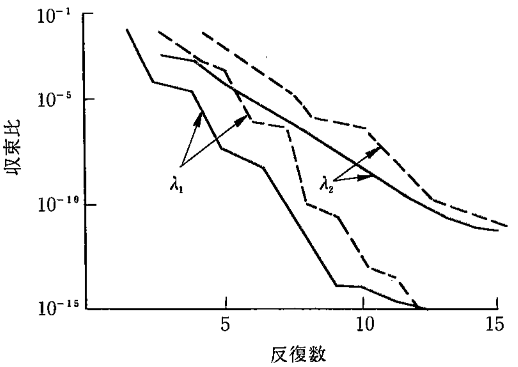

図5　本論文の方法による解（非比例減衰）

研　究　速　報

なお，本報告の計算に用いた出発ベクトルは，次に示すようなものである.

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]_{2n\times 2r} \qquad (17)$$

なお，図2～図5に示している相対誤差あるいは収束比は次式によるものである.

$$\text{実数部}：|(Re(\lambda_{k-1})-Re(\lambda_k))/Re(\lambda_{k-1})| \qquad (18)$$

$$\text{虚数部}：|(Im(\lambda_{k-1})-Im(\lambda_k))/Im(\lambda_{k-1})| \qquad (19)$$

ただし，$Re(\lambda)$, $Im(\lambda)$ はそれぞれ固有値の実数部および虚数部を示す.

4. ま と め

Dong の Block－Stodola 法は計算量が最も少ない利点はあるが，本報告の数値計算例により収束の点で問題のあることがわかった. これに対して，2節に示したアルゴリズムにおいて，実数計算化に q^J，その他において式(7)，式(9)そして式(11)を用いた場合には，例題で最も良好な収束が得られた. 比例減衰系に比べて非比例減衰系においては収束が遅れる. また，比例減衰系の場合であっても，同じ系を実固有値問題として固有ペアを求める場合に比較して多くの反復数を必要とするようであるが，これらは，式(8)～式(14)に見られるマトリックスの加減算を有効桁数が制限されている電算機によって行うことが原因の一つであると考えられる. なお，本報告で取り扱った複素固有値問題の解法では1回の反復に要する計算量が多くなることから，まず質量マトリックスと剛性マトリックスのみから求められる自然振動モードの近似ベクトルを式(17)などに代わる出発ベクトルとし，それから減衰マトリックスを含めた場合について反復計算を行うのが良いと思われる. 以上で述べた複素固有値問題解法における収束性を，このようにしていっそう改善することが今後の課題であろう.

(1979年11月30日受理)

参 考 文 献

1) A. Jennings and W. J. Stewart, "Simultaneous iteration for partial eigensolution of real matrices", J. Inst. Maths. Applicas., 15, 351-361 (1975)
2) S. B. Dong, "A Block-Stodola eigensolution technique for large algebraic system with non-symmetrical matrices", Int. J. num. Meth. Engng., 11, 247-267 (1977)
3) G. Peters and J. H. Wilkinson, "Eigenvectors of real and complex matrices by LR and QR triangularization", Numer. Math., 16, 181-204 (1970)
4) 山田嘉昭，佐藤俊雄，"有限要素法における最近の固有値問題解法"，生産研究，26, 217-225 (1974)
5) G. W. Stewart, "Simultaneous iteration for computing invariant subspace of non-Hermitian matrices", Numer. Math., 25, 123-136 (1976)
6) A. Jennings, Matrix Computation for Engineers and Scientist, John Wiley and Sons, 1977