特集 18　UDC 620.168.3.001.57

新離散化モデルによる複合材料の一極限解析
—マクロとミクロを繋ぐ試み—

Limit Analysis of Composite Materials by Means of the New Discrete Models
—An Attempt to Bridge the Macroscopic and Microscopic Worlds—

川井忠彦*
Tadahiko KAWAI

1. はしがき

巨視的な立場では連続体として取り扱われている金属材料も結晶学のレベルで考えると多結晶体と呼ばれる材料である．また，これまで連続体力学の立場から研究されてきた土質および岩盤力学は近年粒状体として取り扱おうとする新しい試みが行われている．古くて新しい鉄筋コンクリート構造は典型的な複合材料である．このような材料の変形や応力分布を連続体力学を用いて論ずる場合素材間の辷り（slip）や破断を考慮するにはおのずと限界がある．

筆者はこの点を考慮して，不連続性（粒子性）を取り入れた力学モデルを提案し，複合材料の強度解析を一つの新しい立場から試みつつある．この方法は有限要素法の言葉を借りて言うならば簡易要素モデルを用いた一般化極限解析法と言うことができよう．

本小論は筆者の提示した理論の概要とその研究成果および将来への見通しについて述べたものである．

2. マクロとミクロの間

一般に固体は非常にたくさんの粒子の集合体である．これらの粒子は互いに引張り合う力が働いていてある形を保っている．ここで言う粒子は極めて漠然とした概念であるが金属材料の場合には一つの結晶，土や粉体，砂のような物質ではその粒そのものを意味するものとしよう．

このような粒子は小さくてもせいぜい 10^{-2} cm くらいのものであるが，原子物理学や量子論の世界で扱う粒子というのは，これよりはるかに小さい粒子であろう．パレット，ニックスやテテルマンら[1]は取り扱う粒子の大きさによって学問分野を図1のごとく分類しているのは興味深い．

さてこのような粒子の集合体である固体に外力がかかって変形するものとすれば，その変形状態は

1. 粒子そのものの変形（粒子内強度）
2. 粒子間の相対変形　（粒子間強度）

の二つの状態によって規定されると考えられよう．

ところがこの粒一つ一つの変形を追跡することは不可能であるから，当然のことながら粒子群の平均的挙動を追跡してゆこうという考え方が生まれてくる．これがいわゆる連続体力学（continuum mechanics）の立場であり，固体力学（solid mechanics）はその一分科で連続体という立場から固体の変形や応力分布を求めてゆこうとするものであり，材料力学，弾性学や塑性学はそれに属する．

有限要素法はこのような固体の変形問題を近似的に解くための一つの離散化解析法（discrete method）で有限要素は連続的な拡がりのある固体領域をいくつかの小さいが，ある大きさのブロックに分けた場合の一つのブロックを表している．

有限要素はまたそれよりもさらに細かい有限要素の集合体に離散化されるから，このような離散化の手続を数千回，数万回と繰り返してゆけば，その最小の有限要素はかなり実際の粒子のそれに近いものになってゆくであ

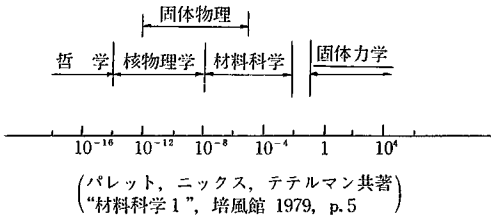


図1　固体力学と他の学問分野との関係

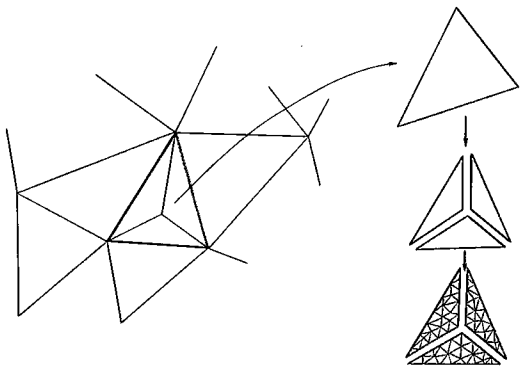


図2　サブストラクチア（Substructure）の概念

* 東京大学生産技術研究所　第2部

ろう.(図2) この考え方が有限要素法の世界，特に大規模な構造物の解析のときに，しばしば使用されるサブストラクチュア (substructure) の考え方であり，もしもこの方法が無限回繰り返せるならば理論的にマクロの世界とミクロの世界(少なくとも結晶レベルの)はつながってゆくはずである.

さて,このような要素群についても当然のことながら粒子群の場合と同様次の二つの強度が考えられるであろう.

1. 要素内強度
2. 要素間強度

ところがいわゆる連続体力学は要素群の平均的挙動を追跡する"ならされた場"の力学のあるために要素間強度という考え方は一般に消失してしまって，もっぱら要素内強度のみを考慮の対象としてゆく立場をとることになっている. 著者はここに連続体力学の適用限界があると思っている. その論拠は次の二つの例をあげるだけで十分であろう.

(a) 丸棒の振り[2)]

軟鋼の丸棒を捩った場合の変形を従来の数理塑性学に基づいて解析してみると図3のような結果になる。

ところが実際に実験を行ってみると，モーメント-振り角曲線は図4(a)，(b)に示すごとく大筋において図3のそれと同じ結果を与えるが，図5(a)，(b)に示したような二種類のまったく異なる塑性崩壊のパターンを示す。これは今日の塑性学理論では説明できない事実である。

これまでの材料の強さに関する学説は，ほとんどすべて，連続体の考え方の上に立ち，ある点の破損や破壊がその点の応力状態のみで決まると仮定している. 中西[2)]は長年に亘って行った精密かつ広範囲に亘る実験結果を基礎として，これは実験事実と矛盾するとして独創的な材料の破損，破壊の学説を立てた.

(b) 切欠材の曲げ強度

また，近年急激な発展を遂げた破壊力学の分野での最大の関心事はクラック先端に発生する弾塑性応力場の問題であることは言うまでもなかろう.

一般に切欠材の最終強度を通常の有限要素法による弾塑性解析を行ってみると真の解よりも高目の解を与えることが,Nagtegaalを始め多くの人々により指摘されている.[3),4)]

この状況を示したのが図6である. 図中RBSMとあるのは著者が最近開発を進めている剛体—バネ要素モデル (Rigid Body-Spring Model) を用いた場合の解析結果を表す.

従来の有限要素法 (FEM) は弾性域から弱塑性域 (塑性歪の小さい非弾性域) までは真の解とよく合うが，それ以上荷重を殖すと求められる解は真の解と次第に離れてゆく傾向にあり，最終荷重は真の値よりもかなり高目

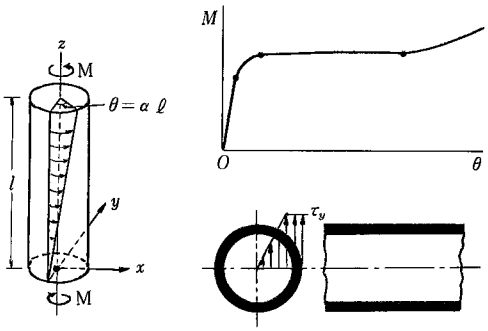
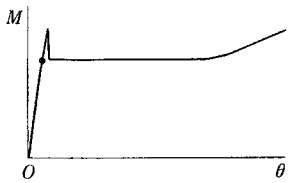
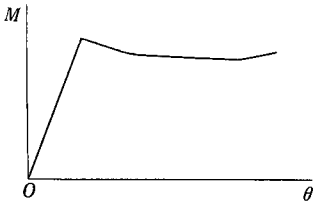


図3　現状の数理塑性学による丸棒の振り解析結果

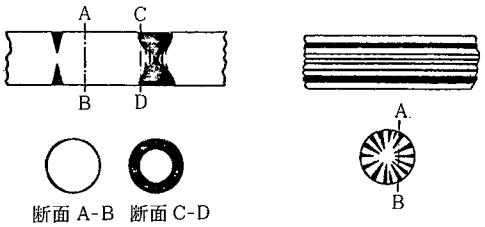


(a) 横断面降伏の場合



(b) 縦断面降伏の場合

図4　丸棒の振り試験におけるモーメント振り角曲線
(中西・佐藤著，材料力学 p. 13 岩波全書 273)



(a) 横断面降伏の場合　　(b) 縦断面降伏の場合

図5　丸棒の振り試験における二つの変形パターン
(中西・佐藤著，材料力学 p. 22 岩波全書 273)

に出るのが普通である. このような結果が得られる理由は何かというと，FEM は塑性域に入っても常に変位の連続性を要求する連続体力学に基づいており，本来なら辷り (slip) が発生すべき個所でも変位の連続性が要求され，これによる拘束が次第に大きく現れて計算される荷重—撓み曲線は真の解から高い方向に向かってしだいに離れてゆくことになるであろう.

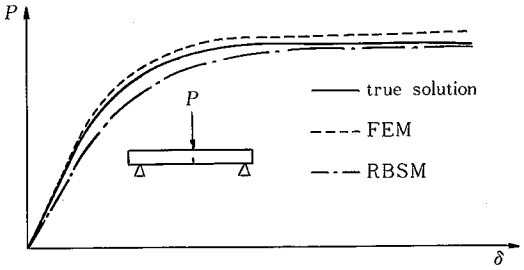


図6　切欠の入った2次元曲げ部材の荷重—撓み曲線

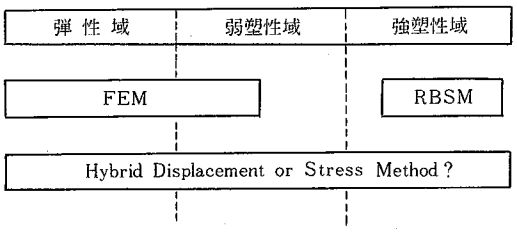


図7　FEM，RBSM，ハイブリッド法の塑性問題における適用範囲

表1　FEMとRBSMモデルの比較

要　素	要素内強度	要素間強度	適用範囲
FEM	○	×	弾 性 域 (弱 塑 性 域)
RBSM	×	○	極限解析専用 (強 塑 性 域)
新離散化要素	○	○	弾性および 塑 性 全 域

すなわち従来の FEM は弾性域ないしは弱塑性域までには適用できるが，塑性域が広範囲に広がるような強塑性域まで適用すると真の解とはかなり異った結果を導く危険性がある．これに対し RBSM は本来極限解析専用モデルとして使用すべきもので，これを弾性や弱塑性域の解析に適用すると真の解とはかなり異なった結果を得る恐れがある．(図7)

また従来の FEM モデルと RBSM モデルの本質的相違をさきに述べた2種の要素内および要素外強度の立場から比較してみると表1のようになり，望ましき新離散モデル像はおのずと明らかになるであろう．

3. 新離散化モデルの開発

前節の議論から望ましき有限要素モデルは要素内剛性と要素間剛性を兼ねそなえたモデルでなければならないことになる．

このようなモデルとして著者は図8に示すように通常

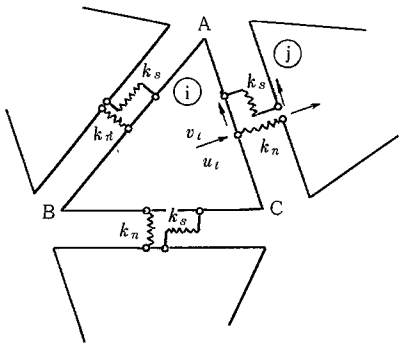


図8　新離散化モデル　—有限要素・バネモデル—

の有限要素モデルを2種類のバネで結合させた複合モデルを考えた．すなわち相隣る要素間に働く直応力 σ_n と剪断応力 τ_s に抵抗する2種類の分布バネ系 k_d, k_s で要素同志を結合させたモデルを考えたのである．

図8においてこの境界辺上のバネは一組のバネ系で代表されているが，これは分布バネ系であると仮定する．

このバネ系をもって前述の要素間強度を表現しようとするのがそのねらいであり，その応力—歪関係式は次式のようなマトリックス方程式で表されるものとする．

$$\begin{Bmatrix} f_n \\ f_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{nn} & k_{ns} \\ k_{sn} & k_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \end{Bmatrix} \tag{1}$$

または　$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{\delta}$　(2)

ここに，$\boldsymbol{f}$ は境界辺上の境界反力ベクトル（単位辺長当たり），$\boldsymbol{\delta}$ は境界辺上の隣接2要素の対応点の相対変位ベクトルを表す．すなわち，

$$\delta_n = u_j - u_i\ ,\ \delta_s = v_j - v_i \tag{3}$$

である．(3)式は Goodman の創始にかかるいわゆるジョイントエレメント (joint element)のバネ系に採用した応力—歪関係式と同じである．[5] 紙面の制約のために新離散化モデルの理論について詳述できないが，その要点を述べれば以下のとおりである．

いま各有限要素の剛性マトリックスを $\boldsymbol{K}_i$，節点変位ベクトルを $\boldsymbol{u}_i$ また等価節点外力ベクトルを $\boldsymbol{F}_i$ で表せば，新離散化モデルの集合体に対する仮想仕事方程式は最終的に次式のごとく与えられよう．

$$\delta\left(\sum_i \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{K}_i \boldsymbol{u}_i\right) + \delta\left(\sum_{ij} \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_{ij}^T \boldsymbol{K}_{ij} \boldsymbol{u}_{ij}\right) - \left(\sum_i \delta \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{F}_i\right) = 0 \tag{4}$$

ここに $\boldsymbol{K}_{ij}$ は要素ⓘとⓙの境界辺間に挿入されたバネの剛性マトリックスでまた $\boldsymbol{u}_{ij} = \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j$ である．
この式で(2)式を参考にしながら

$$\lambda_{ij}=\frac{1}{2}\boldsymbol{K}_{ij}\ \boldsymbol{u}_{ij} \qquad (5)$$

とおくと(4)式は次式のように書き改められる.

$$\delta\left(\sum_i \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_i^T\ \boldsymbol{K}_i\ \boldsymbol{u}_i\right)+\delta\left(\sum_{ij}\lambda_{ij}(\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{u}_j)\right)-$$
$$-\left(\sum_i \delta\boldsymbol{u}_i^T\ \boldsymbol{F}_i\right)=0 \qquad (6)$$

(6)式は鷲津[6]が命名したハイブリッド変位型モデル(Ⅰ)に対するハイブリッドポテンシャルエネルギーの原理である.

このようにして λ_{ij} を導入してゆくと物理的な発想に基づく境界バネの考え方は消えて，純数学的な Lagrange の未定係数法の考え方が導入されたことになる．このことは，もしも境界バネの剛性が要素剛性よりもずっと大きければ，境界バネはほとんど変形せずに一つの要素から他の要素に力を伝えることを意味している．この場合の極限では通常のハイブリッド変位モデル(Ⅰ) (hybrid displacement model (Ⅰ)) に帰着することを物語っている.

さて，この新離散化モデルでその要素変位場が線形の場合には別の新しい簡易要素モデルが導けることを示そう.

著者は[8]はさきに線形変位場 $\boldsymbol{u}$ が要素剛体変位 $\boldsymbol{d}$ と一様歪 $\boldsymbol{\varepsilon}$ に基づく変位の複合場として次式のごとく与えられることを示した.

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{H}_d(\boldsymbol{X})\boldsymbol{d}+\boldsymbol{H}_\varepsilon(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (7)$$

ここに $\boldsymbol{X}$ は位置ベクトルを表し，$\boldsymbol{H}_d(\boldsymbol{X})$ および $\boldsymbol{H}_\varepsilon(\boldsymbol{X})$ は $\boldsymbol{X}$ の一次関数のマトリックスである．したがって(7)式を(4)式に代入して独立変数を $\boldsymbol{u}_i$ から $(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\varepsilon})$ に変換すると最終的には次のような系全体の剛性方程式が導ける.

$$\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{K}_{dd} & \boldsymbol{K}_{d\varepsilon}\\ \hline \boldsymbol{K}_{\varepsilon d} & \boldsymbol{K}_{\varepsilon\varepsilon}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{d}\\ \hline \boldsymbol{\varepsilon}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{F}_d\\ \hline \boldsymbol{F}_\varepsilon\end{array}\right\} \qquad (8)$$

(8)式から $\boldsymbol{\varepsilon}$ を消去すれば容易に次のような剛性方程式が得られる.

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}=\boldsymbol{F} \qquad (9)$$

$$\text{ここに}\quad \left.\begin{array}{l}\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_{dd}-\boldsymbol{K}_{d\varepsilon}\ \boldsymbol{K}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1}\ \boldsymbol{K}_{\varepsilon d}\\ \boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{K}_{d\varepsilon}\ \boldsymbol{K}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1}\ \boldsymbol{F}_\varepsilon\end{array}\right\} \qquad (10)$$

(9)式は要素の剛体変位 $\boldsymbol{d}$ のみを未知量とする平衡方程式である．換言すると要素重心に節点をとり，その剛体変位を節点変位とすると剛性方程式が作られることが明らかになったわけでこれが著者が数年前に物理的な考察から直観的に導いた剛体—バネモデルの理論的基礎を与えたことになろう．(図9)

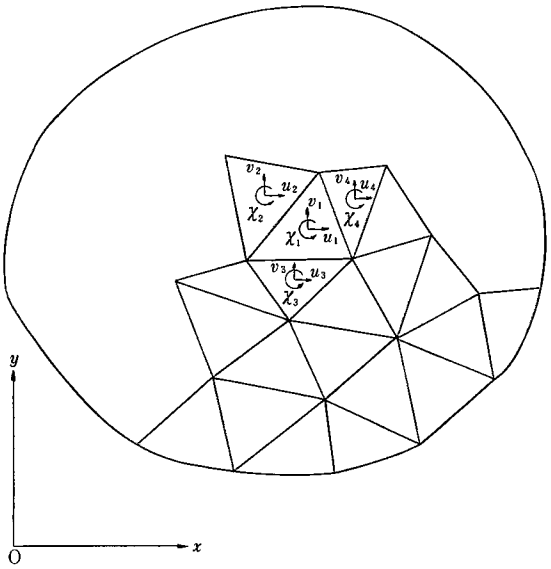


図9　RBSMによる2次元構造物のモデル化

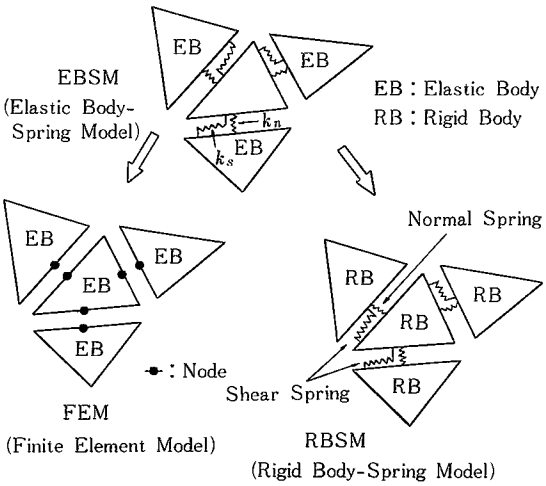


図10　FEMモデルとRBSMモデルの相関性

物理的には要素剛性が境界バネの剛性よりも，はるかに大きくなった極限を考えると要素は変形せず（すなわち剛体で)，要素間バネのみが変形するモデルに帰着するわけで，そこに著者がさきに提案した RBSM モデルのルーツがある！.(図10)

4. 新離散化モデルによる極限解析の一般化とその将来性

第2節において固体力学非線形問題解析における有限

要素法の問題点について触れ，FEM解析の結果は固体の最終状態に近づくに従ってしだいに真の解から離れてゆく傾向にあることを述べた．このことは要するにFEMによる非線形解析結果の精度については，なんら保証されないことを示している．この点は前節で提案した新離散化要素を用いたとしても同じことである．

その理由は極限解析の言葉を借りて言うならばFEMも，RBSMモデルも変位を未知量にとるモデルであるから，それらを用いた解は真の解のいわゆる上界（upper bound）を与えるに過ぎないからである．

したがってこれらの離散化モデルによる近似解の精度を保証しようと思えば，真の解の下界（lower bound）の解を求めることがぜひとも必要となる．

ここに有限要素法の世界ではすっかり忘れられてしまっている応力モデル（stress model）の重要性がクローズアップされてくる．

応力モデルは本来要素内の応力の釣合いを第一に考え要素間での変位の連続性は問題にしないモデルであるから，“辷り”すなわち変位の不連続性が初めから入ってくる弾塑性応力場の解析には本質的に変位モデルにより適しているのである．しかも一般に撓み性マトリックスのサイズは小さく，また最大の利点としてこのモデルで極限解析を行った場合，真の解の下界を与えることである．

しかしながらこのような数々の利点がある応力モデルが，FEMの世界でほとんどかえりみられないのは応力を未知量にとるため，変位モデルのように直観的でなくその解析法は未開発の状態におかれているからである．

しかし何はともあれ以上の観点から著者の研究室では変位型の新離散化モデルの開発と並行して，応力モデルの開発も進めており，すでにいくつかの実用的モデルを得ている.[9] さて現状の有限要素法のもう一つの欠点は計算時間や費用が莫大にかかることである．その原因はおそらく次の三つに起因すると思われる．

（i）大次元逆行列演算が不可避である．

（ii）荷重増分法，時間積分法による解析法が非線形解析法の主流となっている．

（iii）繰返し演算に対し解の計算精度の保持が極めて困難である．

この難点を克服する道の第一は増分計算をどうしてもせざるを得ないような問題（たとえばクラックの伝播解析など）に限り，大部分の問題を極限解析，特に仮想変形法（mechanism method）で解析してしまうことであろう．その論旨を図解して示したのが図11である．

さて以上において新しい離散化モデルを開発して極限解析法を一般化することにより構造解析，したがって設計の合理化の道が開けてゆくであろうと述べた．しかしながら，その発展は今後の課題である．

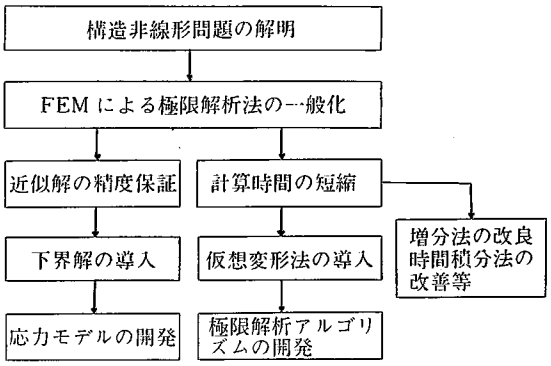


図11　構造非線形問題解明のみち

まず第一に，極限解析理論は完全弾塑性体の微小変形状態を仮定して展開された理論であるから，クラックの発生も考えたより実際的な材料の構成式が使えるよう，また固体の崩壊時には変形も大きくなるので有限歪の影響も考慮した理論にまで拡張する必要があろう．また，動的崩壊に関しては研究が未開拓で基本的な上下界定理も定式化されていない．

このような極限解析理論が確立されたとして次に問題となるのは計算時間の点である．

構造設計においていま一番知りたいのは構造物の最終強度であり，その崩壊のメカニズムである．破壊力学や動的崩壊問題の解析においては荷重過程における変形やクラックの発生，生長の情報が欲しい場合もあろう．しかしながら大部分の構造設計においては弾性解析の結果と最終耐力がわかれば，かなり設計が合理化できるのではなかろうか．

このような観点に立って考えると極限解析法はまさしくお誂え向きの手法ということができる．すなわち図12に示したように，まず解析しようとする対象物の簡単な模型実験を行って，変形や応力分布を計測するのでなく，破壊や崩壊のメカニズムやパターンをできるだけ正確に記録するのである（これは考えているほど容易ではないかもしれない．あるいは，新しい実験技術の開発を必要とするかもしれない）．そして，その情報に基づいて対象物のメッシュ分割を行い，メカニズムを仮定して崩壊解析を行うのである．それも従来のような上界の解だけでなく，下界も計算し，その差が許容誤差の範囲を超えている場合にはメッシュの最適化を行う．そして上界と下界を設定した誤差範囲内に収まるようなところまで近づけられるならば，その解は十分設計に役立つものとなるであろう．

このような計算方式をもし，確立することができれば構造解析および設計合理化の道は見通しがかなり明るくなるものと確信している．

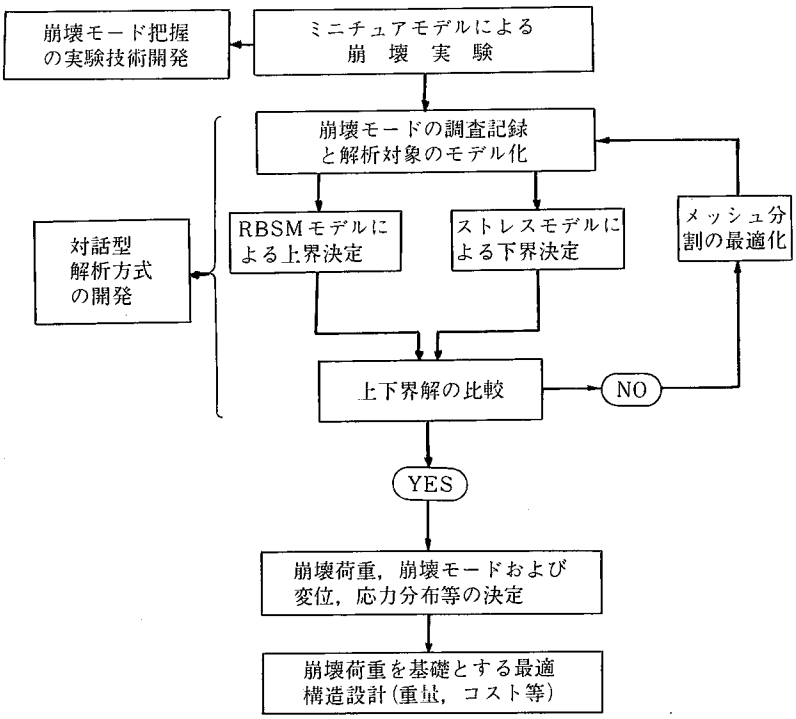


図12　極限解析および設計法の実用化

5. む　す　び

複合材料の最終強度解析は固体力学の非線形問題の中でも最後に残された難問中の難問である．構造非線形問題を本格的に取り扱う有力な手法として開発された有限要素法も解の信頼性や計算時間の点で大きな問題を抱えていることを述べ，その打開策として一連の新離散化モデルによる極限解析法を提案した．

この方法の実用性については，すでに一連の基礎的例題の解析によってかなり実証できたと考えているが，実際の問題への適用例が乏しく将来の研究にまつところ大である．

しかしその見通しも決して暗くはなく，近い将来複合材料を含む固体力学非線形問題の解析へ確実な第一歩が踏み出せるものと信じている．

(1980年1月9日受理)

参 考 文 献

1) C. R. パレット，W. D. ニックス，A. S. テテルマン共著 "材料科学1－材料の微視的構造" 井形直弘，堂山昌男，岡村弘之訳　培風館 (1979)
2) 中西不二夫，佐藤和郎著 "材料力学" 岩波全書 273 (1976)
3) J. C. Nagtegaal, D. M. Parks and J. F. Rice, 'On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range,' Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 4, 153−78, 1974
4) 白鳥正樹，三好俊郎："切欠材の塑性拘束に関する研究" 日本鋼構造協会第13回大会研究集会　マトリックス解析法研究発表論文集 (昭和54年6月)
5) R. E. Goodman, R. L. Taylor, and T. Bekke, 'A model for the mechanics of jointed rock', Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 94 SM 3, 637−59, 1968
6) 鷲津久一郎著 "弾性学の変分原理概論" 培風館　コンピュータによる構造工学講座　11−3 Ⓐ (1972)
7) 川井忠彦：新しい要素モデルによる固体力学諸問題の解析，生研セミナーテキスト (コース29)，昭和52年7月，
8) 川井忠彦：物理モデルによる連続体力学諸問題の解析，生研セミナーテキスト (コース39)，昭和53年10月 生産技術研究所奨励会
9) 川井忠彦：物理モデルによる連続体力学諸問題の解析，生研セミナーテキスト (コース48)，昭和54年10月 生産技術奨励会
10) 川井忠彦 "簡易要素モデルとそれによる極限解析法の一般化—複合材料強度解析の一つの試み" 第19回　生研講習会テキスト "複合材料" 生産技術奨励会 (1979年12月12～14日)