特　集　19　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　UDC 624.07:624.042:517
681.3.06

有限要素法による応力解析とそのマイクロコンピュータ化

Stress Analysis by the Finite Element Method and a Small Computer System

山　田　嘉　昭*・奥　村　秀　人*・吉　永　　寛**

Yoshiaki YAMADA, Hidehito OKUMURA and Hiroshi YOSHINAGA

新しく迎えた1980年代において，有限要素法の発展と普及を支えるものは，よく組織されたプログラムの開発と，そのマイクロコンピュータ化にあると思う．プログラム開発では，対象として最も一般的な三次元の異方性材料までを包含し，その非線形問題の解析を可能としなければならない．大規模な問題の解析は，将来においても大型計算機にたよる必要のあることに変わりないかもしれない．しかし一方では，小型で能率のよいシステムの開発が進み，数値解析ばかりでなく，論文や手紙の作製などもパーソナル・コンピュータで行われるに至るすう勢は動かし難い．本稿では，このような情勢と見透しのもとで，省資源のための新しい生産技術開発の基礎として行った研究の成果を述べる．

1. ま え が き

近年において数値化により実行される応力解析の技術は，有限要素法を軸として急速な進歩を遂げた．最初は線形弾性の二次元等方性体を対象とした解析も，いまでは三次元の異方性体に及んでいる．とくに，元来，異方性体に属する複合材料の発展が，異方性体を取り扱う理論や計算技術の進歩を促すこととなった．一方では，エネルギ機器の高温化に伴い，塑性や粘弾性などの非線形の材料特性および大変形・大ひずみの幾何学的非線形性を考慮した非線形解析手法の定式化も格段に進むにいたった．こうして，詳細解析の結果や，それを得ようとする努力あるいは決定論的な思考なしに，推論による議論を続け，あるいは反復する時代は終わろうとしているのでないであろうか．

有限要素法の限界が語られ，また将来が危惧されたときがあったことは事実である．しかし，その歴史は，コンピュータの発達と相まち，困難視されあるいは不可能とされた解析を可能とする目覚ましさの連続であった．こうした過程の中で，最初は発見的であった事柄に理論的な基礎が与えられた例も少なくない．逆に，数値解析の結果や経験が，解析理論の発展に貢献し，また力学現象の物理的解釈を適切に行う上に役立った多くの事実も見逃すことはできない．また，当初は異なった立場からのルーチンが一つに統一され，それにより達成された簡単化が次の進歩のステップとなった事例も少なくない．

本稿では，前年度における特異有限要素の開発研究[1,2]に引き続き，本特集号の研究費によって行なった研究の中から，三次元異方性体を対象とした有限要素解析ルーチン，複合積層材について得た局部応力分布の解析結果，および計算システムのマイクロコンピュータ化について報告することにしたい．

*東京大学生産技術研究所　第1部，複合材料技術センター
**住友ゴム工業(株)

2. 三次元異方性体と構成方程式

三次元連続固体を，直交異方性の力学特性までを考慮して取り扱うものとすれば，弾性問題では次の撓み性マトリックス$[C^e]$が関与することとなる．

$$[C^e]=\begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_2 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_3 & -\nu_{32}/E_3 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \tag{1}$$

ただし，対称性から

$$\nu_{21}/E_2=\nu_{12}/E_1,\quad \nu_{31}/E_3=\nu_{13}/E_1,\quad \nu_{32}/E_3=\nu_{23}/E_2 \tag{2}$$

したがって，式(1)の中で9つの弾性定数のみが独立となる．

式(1)は，縦弾性係数$E_1,\cdots$，せん断弾性係数$G_{23},\cdots$，ポアソン比にあたる$\nu_{12},\cdots$など，単軸やせん断の材料試験で得られる工学的定数値を含んだ形となっている．しかし，有限要素法において解析に直接関与するものは，式(1)の$[C^e]$に対し，その逆マトリックスとして定義される次の剛性マトリックス$[D^e]$である．

$$[D^e]=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix},\quad d_{ij}=d_{ji} \tag{3}$$

$[D^e]$の成分の工学的定数値に対する換算式は

$$d_{11}=\frac{1}{\Delta E_2}\left(\frac{1}{E_3}-\frac{\nu_{23}^2}{E_2}\right)=\frac{1}{\Delta E_2E_3}(1-\nu_{23}\nu_{32})$$

$$d_{22}=\frac{1}{\Delta E_1}\left(\frac{1}{E_3}-\frac{\nu_{13}^2}{E_1}\right)=\frac{1}{\Delta E_1E_3}(1-\nu_{13}\nu_{31})$$

$$d_{33}=\frac{1}{\Delta E_1}\left(\frac{1}{E_2}-\frac{\nu_{12}^2}{E_1}\right)=\frac{1}{\Delta E_1E_2}(1-\nu_{12}\nu_{21})$$

$$d_{12}=d_{21}=\frac{1}{\Delta E_1}\left(\frac{\nu_{12}}{E_3}+\frac{\nu_{13}\nu_{23}}{E_2}\right)=\frac{1}{\Delta E_1E_3}(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32})$$

$$=\frac{1}{\Delta E_2E_3}(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23})$$

$$d_{13}=d_{31}=\frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{\Delta E_1E_2}=\frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{\Delta E_2E_3}$$

$$d_{23}=d_{32}=\frac{1}{\Delta E_1}\left(\frac{\nu_{23}}{E_2}+\frac{\nu_{12}\nu_{13}}{E_1}\right)=\frac{1}{\Delta E_1E_2}(\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13})$$

$$=\frac{1}{\Delta E_1E_3}(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31})$$

$$d_{44}=G_{23},\quad d_{55}=G_{31},\quad d_{66}=G_{12}$$

$$\Delta=det|C^e|$$

$$=\frac{1}{E_1E_2E_3}(1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31})$$

線形弾性の Hooke 則は，式(3)の$[D^e]$を用いて次のように表示される．$\{\sigma\}$と$\{\varepsilon\}$を応力およびひずみのそれぞれ6成分からなるベクトルとして

$$\{\sigma\}=[D^e]\{\varepsilon\} \tag{4}$$

弾性の法則を，塑性および粘性を有する非線形材料に拡張する場合，筆者の研究室では，かねてから図1に示す一般化 Voigt モデルにより力学的特性を表現する方法を用いている．モデルの構成方程式は式(4)を拡張した形で，また自然のこととして増分形式あるいは速度形式で次のように表示される[3,4]．

$$\{\dot{\sigma}\}=[D^p_V]\{\dot{\varepsilon}-\dot{\varepsilon}_a\}-[D^c_V]\{\dot{A}\}$$
$$=[D^p_V]\{\dot{\varepsilon}\}-[D^c_V]\{\dot{A}\}-\{\dot{\sigma}_a\} \tag{5}$$

ただし

$$[D^c_V]=[I]-\frac{[D^e_g]\{\partial g/\partial\sigma\}\lfloor\partial f/\partial\sigma\rfloor}{H'_V} \tag{6}$$

$$[D^p_V]=[D^c_V][D^e_g]=[D^e_g]-\frac{[D^e_g]\{\partial g/\partial\sigma\}\lfloor\partial f/\partial\sigma\rfloor[D^e_g]}{H'_V} \tag{7}$$

$$H'_V=H'/c+\lfloor\partial f/\partial\sigma\rfloor[D^e_g]\{\partial g/\partial\sigma\} \tag{8}$$

$$\{\dot{A}\}=[D^e_g]([\eta_g]^{-1}+\sum_i[\eta_i]^{-1})\{\sigma\}$$
$$-[D^e_g]\sum_i[\eta_i]^{-1}[D^e_i]\{\varepsilon_i\} \tag{9}$$

上の式に含まれている記号の多くは図1に示されているとおりであるが，補足すると$[\eta]$はダシュポットの粘性マトリックスを表し，その成分をη_{ij}とすれば式(3)の$[D^e]$と同じ形を有している．$\{\dot{\varepsilon}_a\}$は温度変化や吸湿による伸縮がある場合のひずみ速度を表すが，式(5)の終わりの表示のようにすれば，その$\{\dot{\sigma}_a\}$の中には，この

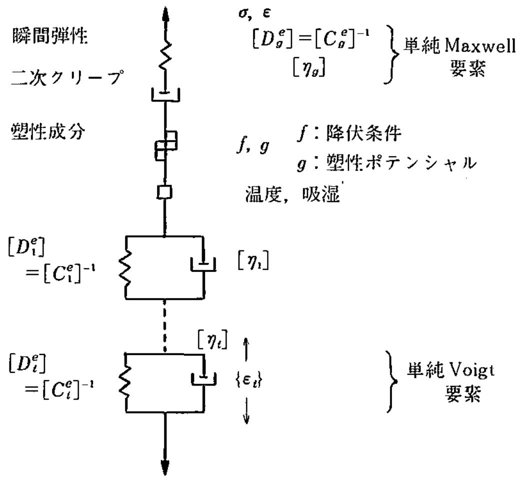


図1　一般化 Voigt (Kelvin) モデル

ような初期ひずみによるもののほかに，降伏応力に及ぼす温度やひずみ速度の影響等が含まれているとしてよい．$[I]$は単位マトリックス，c は等方塑性体の Mises の降伏条件，異方性体の Hill の降伏条件などでは1の値を持つ定数である．

初期の研究で著者の一人は，材料を等方性とする場合について式(5)の具体的な増分形表示を求め[5]，それに精度のよい時間積分のルーチンを組み込んで，非線形解析プログラムの開発を行った．現在，EPIC－Ⅱ の名前で呼んでいるプログラムは，その成果の延長として生まれたものである[6,7]．しかし，理論の定式化やプログラミングの技術が進んだ今日では，異方性を含んだ式(5)のままで計算の実行が可能なようなルーチンを作成し，精度向上のための工夫も，そのことを前提として行うようにするのがよいと思う．同じく，計算ルーチンの一般性を高くする立場から，平面応力問題を取り扱う場合も，解析的な表示式を特別に陽な形に誘導することなく，必要な関係や項を三次元の式から数値的に求めるようにするのがよい．

3. 可変節点数要素による統一化

有限要素解析プログラムの中で，いまではよく用いられているパラメトリック要素の多くは，最初は発見的に見出されたものであった．セレンディピティ族要素はその代表的なものである[8]．ここでは，セレンディピティ族を含み，さらにプログラム構成の際に可変節点数の要素[9]の使用を可能とするような一般的定式化と[2,10,11]，それによって得られる三次元立体要素について述べる．

有限要素に結合した形状関数あるいは内挿関数を求める目的で，ここで使用する方法は階級基底(hierarchy－basis)の概念に基づくものである．この方法では，求めようとする内挿関数をm個の階級に分け，その各々に属する関数 $\boldsymbol{N}_0$，$\boldsymbol{N}_1$，…，$\boldsymbol{N}_m$が次のように基底となる試

行関数(trial function)$\boldsymbol{S}_0$，$\boldsymbol{S}_1$，…$\boldsymbol{S}_m$から導かれるものとする．

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{S}_0 \\ \boldsymbol{S}_1 \\ \boldsymbol{S}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{S}_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_0 & \boldsymbol{S}_0(1) & \boldsymbol{S}_0(2) & \cdots & \boldsymbol{S}_0(m) \\ 0 & \boldsymbol{I}_1 & \boldsymbol{S}_1(2) & \cdots & \boldsymbol{S}_1(m) \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I}_2 & \cdots & \boldsymbol{S}_2(m) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{N}_0 \\ \boldsymbol{N}_1 \\ \boldsymbol{N}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{N}_m \end{Bmatrix} \tag{10}$$

$\boldsymbol{I}_0$，$\boldsymbol{I}_1$，…，$\boldsymbol{I}_m$は適当な大きさの単位マトリックス，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{S}$および$\boldsymbol{I}$につけた添字0，1，…，mはランク(rank)を表す．

27箇の節点を有する立体要素を例にとれば，図2に分解して示したように，隅の8個の節点に関係する$\boldsymbol{S}$と$\boldsymbol{N}$はランク0，辺上の中点に位置する12個の節点に関係する$\boldsymbol{S}$と$\boldsymbol{N}$はランク1，面中心の6個の節点ではランク2，最後に立体中心の節点ではランクが3である．

試行関数$\boldsymbol{S}$は，それぞれのランク内における内挿条件だけを満足していればよいので，その決定は比較的簡単である．ここでは，Lagrange族の内挿式を用いることにすれば，隅の節点に関係するランク0の$\{\boldsymbol{S}_0\}$は

$$\{\boldsymbol{S}_0\} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \end{Bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{Bmatrix} (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ (1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ (1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ (1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ (1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ (1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ (1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ (1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \end{Bmatrix} \tag{11}$$

辺の中点におけるランク1の$\{\boldsymbol{S}_1\}$は

$$\{\boldsymbol{S}_1\} = \begin{Bmatrix} S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{14} \\ S_{15} \\ S_{16} \\ S_{17} \\ S_{18} \\ S_{19} \\ S_{20} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta) \\ (1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta) \\ (1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta) \\ (1-\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta) \\ (1-\xi^2)(1-\eta)(1+\zeta) \\ (1+\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta) \\ (1-\xi^2)(1+\eta)(1+\zeta) \\ (1-\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta) \\ (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2) \\ (1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2) \\ (1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2) \\ (1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2) \end{Bmatrix} \tag{12}$$

六つの面の中点におけるランク2の$\{\boldsymbol{S}_2\}$は

$$\{\boldsymbol{S}_2\} = \begin{Bmatrix} S_{21} \\ S_{22} \\ S_{23} \\ S_{24} \\ S_{25} \\ S_{26} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (1-\xi^2)(1-\eta^2)(1-\zeta) \\ (1-\xi^2)(1-\eta^2)(1+\zeta) \\ (1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta^2) \\ (1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta^2) \\ (1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta^2) \\ (1-\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta^2) \end{Bmatrix} \tag{13}$$

立体中心では

$$\{\boldsymbol{S}_3\} = \{S_{27}\} = (1-\xi^2)(1-\eta^2)(1-\zeta^2) \tag{14}$$

式(11)〜式(14)の基底関数を式(10)に適用すると，次のように各ランクごとの内挿関数$\{\boldsymbol{N}_0\}$，…，$\{\boldsymbol{N}_4\}$の表示式が得られる．

ランク0の内挿関数$\{\boldsymbol{N}_0\}$

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= S_1 - \frac{1}{2}(N_9 + N_{12} + N_{17}) \\ &\quad - \frac{1}{4}(N_{21} + N_{23} + N_{26}) - \frac{1}{8}N_{27} \\ N_2 &= S_2 - \frac{1}{2}(N_9 + N_{10} + N_{18}) \\ &\quad - \frac{1}{4}(N_{21} + N_{23} + N_{24}) - \frac{1}{8}N_{27} \\ N_3 &= S_3 - \frac{1}{2}(N_{10} + N_{11} + N_{19}) \\ &\quad - \frac{1}{4}(N_{21} + N_{24} + N_{25}) - \frac{1}{8}N_{27} \\ N_4 &= S_4 - \frac{1}{2}(N_{11} + N_{12} + N_{20}) \\ &\quad - \frac{1}{4}(N_{21} + N_{25} + N_{26}) - \frac{1}{8}N_{27} \\ N_5 &= S_5 - \frac{1}{2}(N_{13} + N_{16} + N_{17}) \\ &\quad - \frac{1}{4}(N_{22} + N_{23} + N_{26}) - \frac{1}{8}N_{27} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

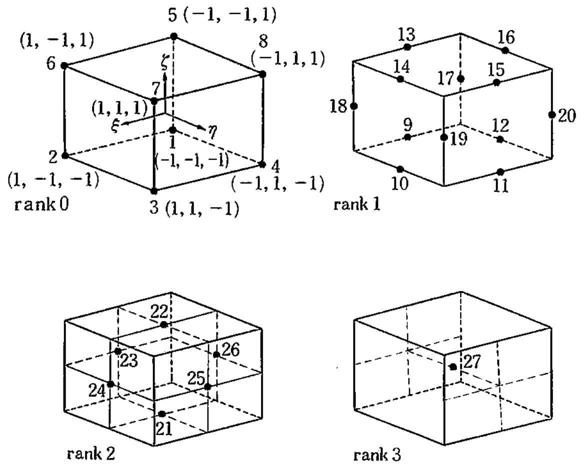


図2　可変節点数8－27の三次元要素と基底節点のランク

$$N_6=S_6-\frac{1}{6}(N_{13}+N_{14}+N_{18})-\frac{1}{4}(N_{22}+N_{23}+N_{24})-\frac{1}{8}N_{27}$$
$$N_7=S_7-\frac{1}{2}(N_{14}+N_{15}+N_{19})-\frac{1}{4}(N_{22}+N_{24}+N_{25})-\frac{1}{8}N_{27}$$
$$N_8=S_8-\frac{1}{2}(N_{15}+N_{16}+N_{20})-\frac{1}{4}(N_{22}+N_{25}+N_{26})-\frac{1}{8}N_{27}$$

ランク1の内挿関数 $\{\boldsymbol{N}_1\}$

$$\left.\begin{aligned}
N_9&=S_9-\frac{1}{2}(N_{21}+N_{23})-\frac{1}{4}N_{27}\\
N_{10}&=S_{10}-\frac{1}{2}(N_{21}+N_{24})-\frac{1}{4}N_{27}\\
N_{11}&=S_{11}-\frac{1}{2}(N_{21}+N_{25})-\frac{1}{4}N_{27}\\
N_{12}&=S_{12}-\frac{1}{2}(N_{21}+N_{26})-\frac{1}{4}N_{27}\\
N_{13}&=S_{13}-\frac{1}{2}(N_{22}+N_{23})-\frac{1}{4}N_{27}\\
N_{14}&=S_{14}-\frac{1}{2}(N_{22}+N_{24})-\frac{1}{4}N_{27}\\
N_{15}&=S_{15}-\frac{1}{2}(N_{22}+N_{25})-\frac{1}{4}N_{27}\\
N_{16}&=S_{16}-\frac{1}{2}(N_{22}+N_{26})-\frac{1}{4}N_{27}\\
N_{17}&=S_{17}-\frac{1}{2}(N_{23}+N_{26})-\frac{1}{4}N_{27}\\
N_{18}&=S_{18}-\frac{1}{2}(N_{23}+N_{24})-\frac{1}{4}N_{27}\\
N_{19}&=S_{19}-\frac{1}{2}(N_{24}+N_{25})-\frac{1}{4}N_{27}\\
N_{20}&=S_{20}-\frac{1}{2}(N_{25}+N_{26})-\frac{1}{4}N_{27}
\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

ランク2の内挿関数 $\{\boldsymbol{N}_2\}$

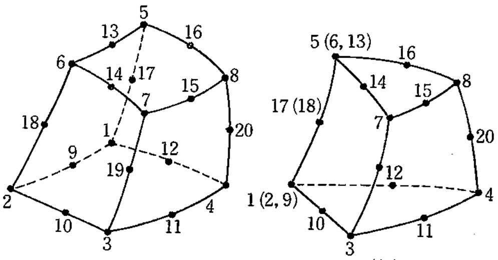
$$\left.\begin{aligned}
N_{21}&=S_{21}-\frac{1}{2}N_{27},\quad N_{24}=S_{24}-\frac{1}{2}N_{27}\\
N_{22}&=S_{22}-\frac{1}{2}N_{27},\quad N_{25}=S_{25}-\frac{1}{2}N_{27}\\
N_{23}&=S_{23}-\frac{1}{2}N_{27},\quad N_{26}=S_{26}-\frac{1}{2}N_{27}
\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

ランク3の内挿関数 $\{\boldsymbol{N}_3\}$

$$N_{27}=S_{27}\qquad(18)$$

上で行った内挿関数の誘導は組織的であり，また式(15)〜式(18)のように得られた内挿関数の表示は，可変節点数の要素を組み込んだプログラムの設計をきわめて容易にしている．すなわち，隅の8個の節点を除くほかは，存在しない節点に結合した内挿関数を0とみなし，それに関係した入力操作あるいは計算を全く行わないようにすればよいのである．たとえば，内部節点27と六つの面中心の節点21〜26が存在しないときは，$N_{21}=\cdots=N_{26}=N_{27}=0$ とおけば，図3(a)に示す20節点の三次要素についてよく知られているセレンディピティ族[8]の内挿関数が得られる．

ここで注目すべきことは，六面体要素の一つの面を線に合併退化させることにより，図3(b)に示すような三角柱要素が得られることである．同じ操作により，平面の問題では四辺形パラメトリック要素から，三角形要素が誘導されることになる．こうして，六面体あるいは四辺形の系列に属する要素群と，三角柱あるいは三角形の系列に属する要素群を単一のルーチンで取り扱うことのできる可能性が生まれてくる．とくに，直辺を有するパラメトリック要素では，合併退化によって得られる三角



(a)　　　　(b)

図3　六面体要素の1面が線に合併することによって得られる三角柱要素

形要素の特性が，最もよく用いられている定応力・定ひずみ三角形要素のそれに完全に一致する．したがって，四辺形要素を基準とするプログラム内に三角形要素を自動的に包含することができ，有限要素ライブラリあるいはプログラム構成の大幅な簡易化が達成されることになる．さらに，要素に，応力やひずみ分布の特異性の表現に適した特性を持たせることも簡単である[2,11]．

4. 複合材料の局所応力とひずみの解析例

複合材料の中で，多く実用に供されている一方向繊維強化材(lamina)は直交異方性を有し，それから製作される積層材(laminate)は層の形成が対称に行われる場合を除くほかは，いっそう複雑な異方性を呈する．したがって，複合体内部の応力は，試料が一つの軸の方向に引張られる場合であっても，決して一様でない．以下では，対称積層材が，図4のように定めた座標系の x 軸方向に引張りを受ける場合について，前節までに述べた三次元異方性体を用いた定式化に従い，応力やひずみの不均一

分布を解析した結果[12,13]の中から，主要な点について示すことにする.

図4の問題を $\sigma_z=0$ の仮定のもとで解き，$[-45/45]_S$ の対称積層材について σ_x，τ_{xy}，τ_{zx} の不均一応力分布を求め，また近似的に $\sigma_y=\tau_{yz}=0$ の条件が成立するという結果を最初に得たのは Puppo と Evensen[14] である．同じ問題に対する厳密解は後に Pipes と Pagano[15] によって与えられ，同じ $[-45/45]_S$ の積層材に対して，値は小さいにしても，非零で不均一の σ_z，σ_y，τ_{yz} の分布が存在することが明らかにされた．Pipes と Pagano は，具体的な数値例題において，図5に示すような試料寸法を用いた．また，炭素繊維によって一方向に強化されたエポキシ複合材を取り扱い，材料定数を次のように仮定している．すなわち，たわみ性マトリックスを定義する式(1)および式(2)に含まれている工学的定数のうち9つの独立な量の値として

$$E_1=20.0\times10^6\ \mathrm{psi}=137.90\ \mathrm{GPa}$$
$$=1.4062\times10^4\ \mathrm{kgf/mm^2}$$
$$E_2=E_3=2.1\times10^6\ \mathrm{psi}=14.48\ \mathrm{GPa}$$
$$=0.1477\times10^4\ \mathrm{kgf/mm^2}$$
$$\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.21$$
$$G_{23}=G_{31}=G_{12}=0.85\times10^6\ \mathrm{psi}=5.86\ \mathrm{GPa}$$
$$=0.5976\times10^3\ \mathrm{kgf/mm^2}$$

以下に述べる数値解析結果も，同じ寸法を有し，同じ力学定数の材料からなる積層板について得たものである．

図6は実際の計算において用いた要素分割を示し，積層の対称面 $z=0$ の上側を64要素に分割している．個々の要素は20節点を有するパラメトリック要素であり，全体としての節点数は453である．要素剛性や応力の評価は $3\times3\times3$ のガウス点における値を使用して行った．計算例において軸方向に与えたひずみ量は 10^{-3} の大きさであり，計算結果の応力値は，いままでに得られている結果との比較を容易にするため，psi 単位で表示している．なお，$x=0$ および $y=0$ の面も幾何学的には対称面であるが，力学的挙動については対称面であり得ないので，等方性材料や x，y，z を主軸とする直交異方材料の場合のように，全体の1/8の部分だけを使用した解析を行うことはできない．

図7は，$[-45/45]_S$ の angle-ply 積層材で得られた対称面 $x=0$ の近傍における軸方向応力 σ_x およびせん断応力 τ_{xy} の分布を示している．σ_x と τ_{xy} のいずれの応力についても y に無関係な一様分布からの乱れがあること，またとくに τ_{xy} については，積層の界面 $z=h_0$ をはさんでその符号が逆になっていることが注目される．図8は，同じ積層材における層間せん断応力 τ_{zx} の分布を描いたものである．自由端面 $y=\pm b$ の近傍で，局所的に不均一な応力分布が認められ，その範囲は試料の全

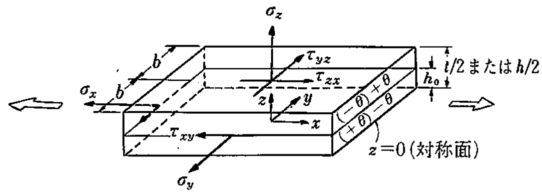


図4　積層材の応力解析における座標系と記号の約束

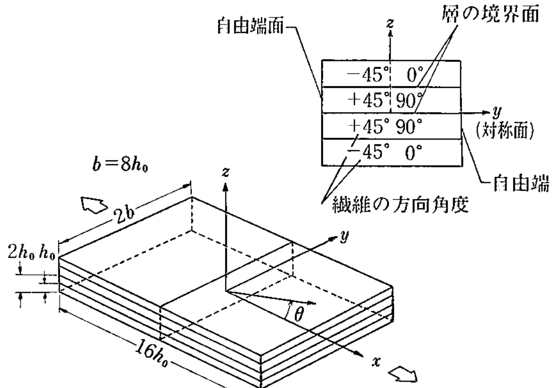


図5　解析した対称積層材の寸法と記号

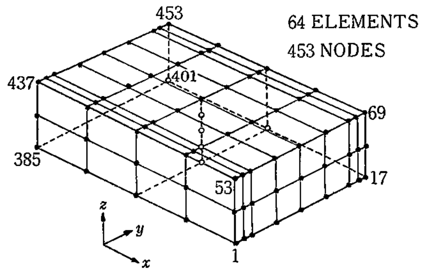


図6　積層材の応力解析に用いた要素分割

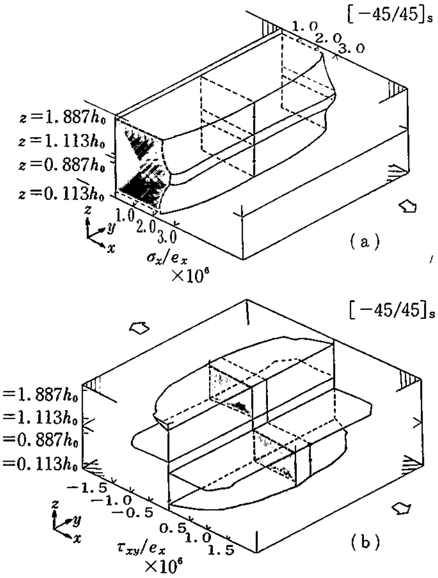


図7　対称面 $x=0$ の近傍における (a) 応力 σ_x および (b) τ_{xy} の分布

厚さ(この場合は $4h_0$) にほぼ等しいところに及んでいる.

上で，$[-45/45]_S$ の angle-ply 積層材で得られた結果と比較する目的で，$[90/0]_S$ の cross-ply 積層材についても計算を行った. 図9は，例として，軸方向応力 σ_x の分布を示す. 図7(a)の分布に比較して，層ごとの応力の分担は異なったものとなる. しかし，幅 y の方向にはほとんど一様な分布が得られている.

次に図10は，$[-45/45]_S$ の angle-ply 積層材にもどって，面 $x=0$ の近傍 ($x/h_0=0.451$ の線上) および引張負荷の点の近傍 ($x/h_0=7.459$ の線上) において，積層の界面に近い z/h_0 の位置に生じている σ_z の分布を示している. 試料の中央部では，σ_z の値が小さく端末効果も微小であるが，負荷の点に近づけば，顕著な端末効果の現れることがわかる.

図11は，比較のため，cross-ply 材における σ_z の計算結果を描いたものである. 図の結果は，いずれも対称面 $x=0$ の近傍 ($x/h_0=0.45/$ の線上)で得られたものであるが，図10の angle-ply 材に比較して，不均一で大きな σ_z を生じている. また積層の順序 $[90/0]_S$ と $[0/90]_S$ によって，分布に違いのあることがわかる. とくに，強化繊維の方向が0度の層を表層とする $[0/90]_S$ の配列では，z 方向に引張りの σ_z を生じていることに注目すべきであろう. なお，図11には，x 方向に一般化平面ひずみの状態が成立するものと仮定して，Wang と Crossman[16] が得た有限要素解も示している.

最後に，図12(a)と(b)は，cross-ply 材における層間せん断応力 τ_{yz} の分布を示す例である. 積層の界面 $z=h_0$ の近傍では，τ_{yz} の値が大きく端末効果も顕著であるが，表面あるいは対称面に近づくと，値の減少が認められる. なお，積層の順序によって，τ_{yz} の符号の変われることは，前に図11に示した σ_x の分布の場合と同じである.

本節で示した数値例は，複合材料をはじめとして異方性体では，等方性体の力学では予測することのできない応力分布を生じることを示している. とくに，局所に集中した不均一応力は，異方性体の破断や破壊に大きな影響を及ぼす. 局所応力は，有限要素法による詳細解析によって初めて明らかにすることが可能なものであり，詳細解析を行うことなしに推測的な議論を繰り返すことは，数値解析の進んだ今日では，正しいアプローチといい難いのである.

5. 解析のマイクロコンピュータシステム

前節までに述べた三次元異方性体を取り扱う手法の一般化と並行して，著者らが進めてきた研究は，有限要素法を含めた数値解析のマイクロコンピュータ化である. 1980年代における動向として，解析システムの小型・パーソナルコンピュータ化は予見されているところであり[17]，著者らの研究もまた同じ方向を指向するものであるといえる.

ここで小型システムというのは，設備に要する費用が僅小であるばかりでなく，管理と保守に必要な経費がほとんど零，したがって独立した一研究室単位でも維持が可能であることを要件としている. また同時に，技術者

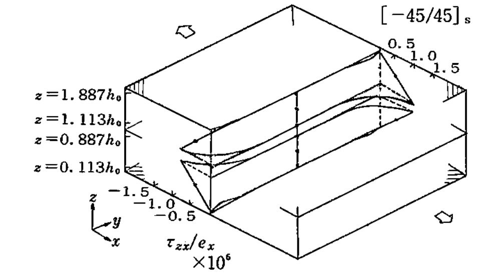


図8 対称面 $x=0$ の近傍における層間せん断力 τ_{zx} の分布

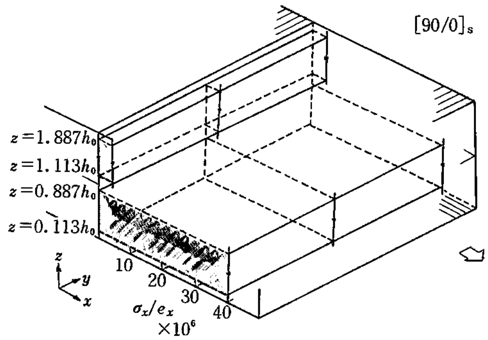


図9 cross-ply 材における軸方向応力 σ_x の分布

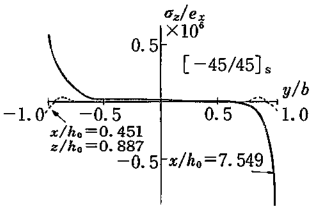


図10 応力 σ_z の分布

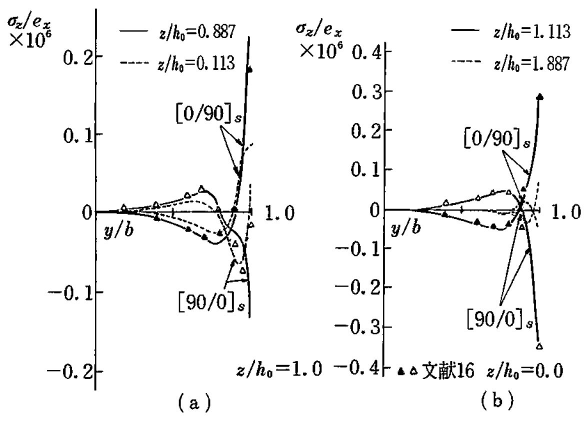


図11 cross-ply 材における応力 σ_z の分布

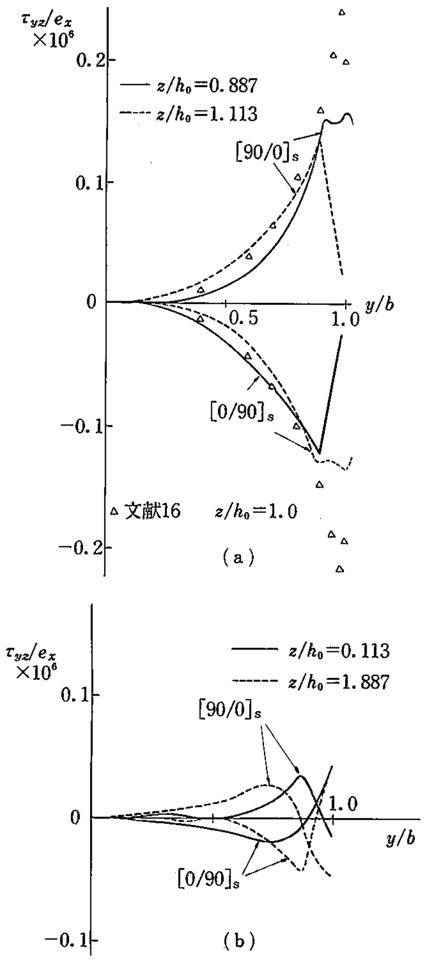


図12 (a), (b) cross-ply 材における応力 τ_{yz} の分布

自身による組立てや拡張を許すものでなければならない. 今後においても, 大きな規模の構造問題の解析, とくに非線形問題のそれを大型計算機にたよる必要のあることに変わりはないかも知れない. しかし, 日常の大部分の計算が小型システムに移行するすう勢は, ほとんど動かし難いものといってよい. 同じシステムは, 構造解析ばかりでなく, 論文や手紙の作製時にタイプライターの代替となることが予測される. また, 実験データの整理や事務の仕事にも利用できるとすれば, システムの価値はますます高いものとなろう.

図13は, 筆者らが組立てているシステムを示し, 構成の主要部は Zilog Z-80 からなるCPU(Central Processor Unit)と 64 K Byte の容量を有する主メモリである. システムの操作に必要なソフトウエアならびに計算実行のためのプログラムは, 外部記憶装置として機能するフロッピ・ディスクに収められている. ディスク・ドライブはフロッピ・デイスクを駆動し, 内部記憶などとの間で指令やデータ I/O (Input/Output) の作業を行う. S-100 Busは, 指令やデータの伝達径路であり, そのほかに, 適当なインターフエイスを通じて, CRT (Cathode Ray Tube)によるデイスプレィ装置, プリンタに接続している. CRTはシステムの操作, プログラムの作成および実行を対話形式(interactive)によって行うためのものである. プリンタは主として, プログラムや計算結果を記録して保存する目的に用いる.

以上が, システムを構成している主要な部分であるが, 筆者らの研究室では, 計算結果出力のために, 4色ペンを有するプロッタを設備し, さらにグラフイックス・ターミナルの設置を進めている. 図13の中で説明を残したハードディスクは, 小型システムにおける記憶容量を拡張するために, 計画中の部分である. また計算速度の向上をはかるために計算の並行処理(parallel operation)についても検討している.

現在, デイスクの操作に用いているシステム(Disc Operating System)はCP/M と呼ばれるもので, 基本的なソフトウエアとしては MBASIC と FORTRAN-80 を備えている. 実行可能なプログラムのうち, 中型規模以上のものは, 現在のところ COMPOSITE MATERIALS COMPUTATION(BASIC), および FEM-4 (FORTRAN) の二つである. 前者は, 元来卓上計算器用に開発された複合材料強度計算用のプログラム[18]を, 本システムに適するように BASIC 言語に書き替えて得られたものである. 後者は, 平面および軸対称問題解析のための有限要素法プログラムで, 弾性問題のほかに, そのリスタート(restart)機能を用いることにより, いろいろな非弾性解析に適応できることを特徴としている.

6. むすびと謝辞

この報告では, 本特集号の研究を分担して, 昭和54年度に行った研究の中から, 異方性体の三次元問題解析のためのプログラム開発および計算結果, また並行して組み立てを行ってきた小型計算機システムについて述べた. 本研究の成果が, 計算技術とソフトウエアの新しい資源となり, 筆者らが最も深い関心を抱いている有限要素法の今後の発展と普及に役立てば幸いと考えている. 終わりに, 数値解析研究所(株)の桜井達美氏には, 筆者に, 小型計算機システムに指向することを示唆していただいたばかりでなく, システム開発の上で援助と協力をいただいていることに感謝したい. (1980年1月28日受理)

参 考 文 献

1) 山田嘉昭, 江沢良孝, 西口磯春, 岡部政之, 特異有限要素とその構造解析への応用, 生産研究, 31, 176-185 (1979)
2) Y. Yamada, Y. Ezawa, I. Nishiguchi and M. Okabe, Reconsiderations on Singularity or Crack Tip Elements, Int. J. Num. Meth. Engng., 14, 1525-1544 (1979)

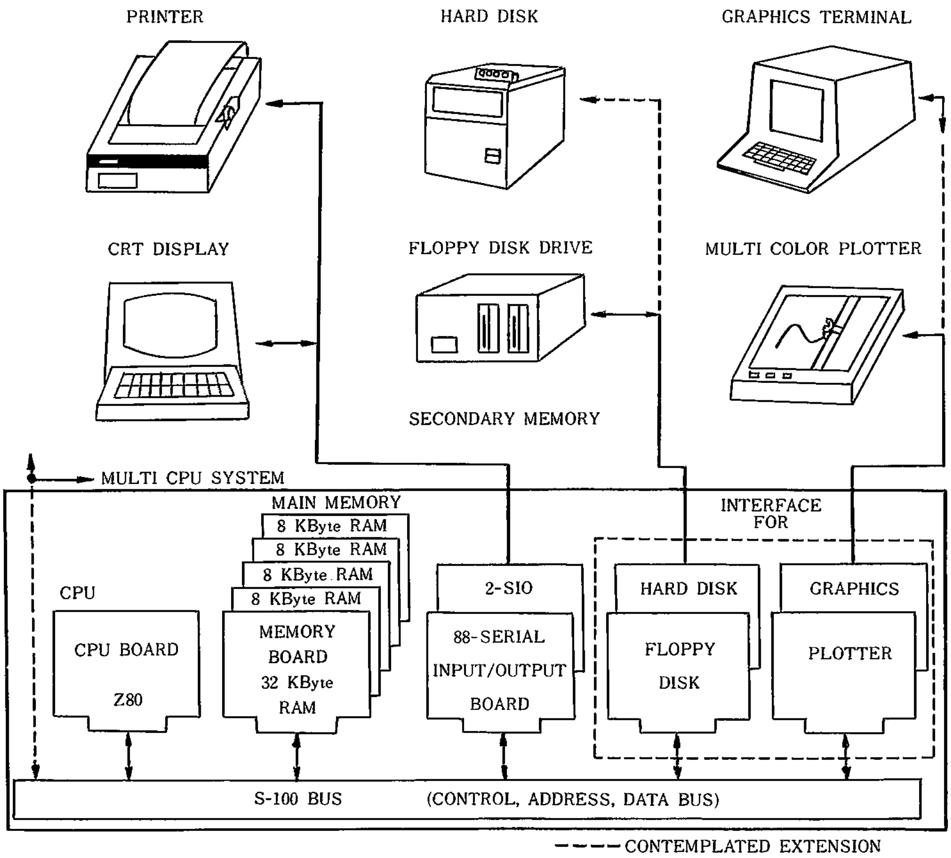


図13　マイクロコンピュータシステム構成の概要，点線は拡張計画中の部分を示す

3) Y. Yamada, Constitutive Modelling of Inelastic Behavior and Numerical Solution of Nonlinear Problems by the Finite Element Method, Computers and Structures, 8, 533-534 (1978)

4) 山田嘉昭，桜井達美，COMPOSITE-III Users Manual，非線形解析プログラム研究会，(July, 1979)

5) 山田嘉昭，塑性・粘弾性，コンピュータによる構造工学講座，II-2-A，培風館，1972

6) 山田嘉昭，山本昌孝，EPIC (Elastic-Plastic Analysis Program)-II Users Manual，非線形解析プログラム研究会 (July, 1979)

7) 東大大型計算機センター，ライブラリープログラム説明書，EPIC (Elastic-Plastic Analysis Program)-II，有限要素法弾塑性解析プログラム，センターニュース，東京大学大型計算機センター，vol. 11，suppliment 2, 152-179 (October, 1979)

8) O. C. ツィエンキーヴィッツ，マトリックス有限要素法，邦訳 培風館 (1975)

9) K.J.Bathe and E.L.Wilson著，有限要素法の数値計算，邦訳 科学技術出版社 (1979)

10) M. Okabe, Y. Yamada and I. Nishiguchi, Reconsiderations on the Rectangular Lagrange Families by Hierarchy Ranking Basis, to appear in Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.

11) 山田嘉昭，マトリックス法材料力学，培風館 (1980)

12) 山田嘉昭，吉永 寛，奥村秀人，有限要素法による積層材の応力解析，第5回複合材料シンポジウム講演要旨集，日本複合材料学会，34-37 (1979)

13) 山田嘉昭，複合材料の強度設計，第19回生研講習会テキスト，1-111 (1979)

14) A. H. Puppo and H. A. Evensen, Interlaminar Shear in Laminated Composites Under Generalized Plane Stress, J. Composite Materials, 4, 204-220 (1970)

15) R. B. Pipe and N. J. Pagano, Interlaminar Stresses in Composite Laminates Uniform Axial Extension, J. Composite Materials, 4, 538-548 (1970)

16) A. S. D. Wang and F. W. Crossman, Some New Results on Edge Effect in Symmetric Compsite Laminates, J. Composite Materials, 11, 92-106 (1977)

17) E. L. Wilson, Role of Small Computer System in Structural Engineering, 論文予稿, 1979

18) S. W. Tsai, Magnetic Card Calculator Solution to Composite Materials, AFML-TR-79-4070 (1979)