

# 全ひずみ理論構成方程式の増分形式化と その有限要素解析への応用 (I)

## —増分形応力-ひずみ方程式の誘導—

Incremental Formulation of Deformation Theory of Plasticity for a  
Unified Solution of Elastic-Plastic Problems (I)  
— Derivation of Incremental Relations —

山田 嘉昭\*・黄 佑民\*・西 口 磯 春\*  
Yoshiaki YAMADA, You-min HUANG and Isoharu NISHIGUCHI

### 1. ま え が き

有限要素法はますますその適用範囲を広げつつあり、弾塑性破壊力学の分野に関しても例外ではない。一般に塑性変形においては応力とひずみの間に1対1の対応はなく、塑性変形における構成方程式としては、応力と塑性ひずみ増分を対応させた関係式を用いる増分理論が妥当である。これに対して、応力と塑性ひずみを対応させる方程式を用いた全ひずみ理論があるが、この理論ではひずみの最終状態が径路に関係なく、応力の最終状態だけで決定されることになり、物理的な妥当性に欠けている<sup>1)</sup>。このような理由から、有限要素法による弾塑性解析においては、ひずみ増分理論の Reuss の方程式に基礎を置く解析が、等方性材料に対して一般に用いられてきた。しかしながら、弾塑性破壊力学の分野において重要なパラメータとして用いられているいわゆる J 積分<sup>2)</sup>の積分径路独立性は、弾性体および全ひずみ理論に従う弾塑性体について保証されているにすぎない。したがって、J 積分の解析において両理論から得られる解の差を明らかにしておくことは意義のあることと考えられる。

本報では、全ひずみ理論において応力とひずみで記述されている Hencky の方程式を増分形式に表示した場合の構成方程式を示す。この式を用いれば、全ひずみ理論のための特別なプログラムを開発する必要がなく、増分理論による通常の弾塑性有限要素プログラムを用いて、全ひずみ理論の解析を行うことができ、また上記の比較の目的にも適していると考えられる。破壊力学の分野に限らず、全ひずみ理論による解析例も少なくはなく、ここで、詳しく両理論の比較を行っておくことは意義あることと思われる。この速報(I)ではその定式化を、次に(II)では実際の計算例を述べることにしたい。

### 2. Hencky 方程式の増分形

全ひずみ理論における Hencky の応力-ひずみ方程式

は次のように表されている。以下、特別に断らない限り、ひずみあるいはその増分は工学的定義によるものでなくテンソル量として表されていることに注意する。

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon^e_{ij} + \epsilon^p_{ij} = \left( \frac{1}{2G} + \phi \right) \sigma_{ij} \quad (1)$$

$$\phi = (3\bar{\epsilon}^p)/(2\bar{\sigma}) \quad (2)$$

これらの式において  $\epsilon'_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  はそれぞれ偏差ひずみテンソルおよび偏差応力カテンソルを表し、 $G$  はせん断弾性係数、 $\bar{\epsilon}^p$  は相当塑性ひずみ、 $\bar{\sigma}$  は相当応力を表す。添字  $e$  および  $p$  は、それぞれ弾性成分および塑性成分であることを示す。

ここで、式(1)と式(2)を微分すると

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \left( \frac{1}{2G} + \phi \right) \dot{\sigma}_{ij} + \dot{\phi} \sigma_{ij} \quad (3)$$

$$\bar{\sigma} \dot{\phi} = \frac{3}{2} \dot{\bar{\epsilon}}^p - \phi \dot{\bar{\sigma}} = \left( \frac{3}{2} - H' \phi \right) \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (4)$$

ただし、 $H'$  はひずみ硬化率であり、次式で定義される。

$$H' = \dot{\bar{\sigma}}/\dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (5)$$

Hencky の方程式は、次のように表される von Mises の降伏条件式と組み合わせて用いられるのが普通である。総和規約を用いることにすると

$$\bar{\sigma}^2 = f^2 = 3 \sigma_{ij} \sigma_{ij} / 2 \quad (6)$$

式(5)および式(6)から

$$\dot{\bar{\sigma}} = \dot{f} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij}}{\bar{\sigma}} = H' \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (7)$$

式(7)から得られる  $\dot{\bar{\epsilon}}^p$  の表示を式(4)に代入すれば

$$\dot{\phi} = \frac{3}{2\bar{\sigma}^2 H'} \left( \frac{3}{2} - H' \phi \right) \sigma'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} \quad (8)$$

一方において、式(3)を  $\dot{\sigma}'_{ij}$  について解くと

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \frac{2G}{1+2G\phi} \left( \dot{\epsilon}'_{ij} - \dot{\phi} \sigma_{ij} \right) \quad (9)$$

\*東京大学生産技術研究所 第1部, 複合材料技術センター

式(9)を式(8)に代入すると

$$\dot{\phi} = \frac{3}{2\sigma^2} \frac{G(3-2H'\phi)}{H'(1+2G\phi)} \sigma_{ij} (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\phi} \sigma_{ij}) \quad (10)$$

上の式を  $\dot{\phi}$  について解き、式(6)および恒等関係

$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$  を考慮すると

$$\dot{\phi} = \frac{3/2-H'\phi}{[1+H'/(3G)]\sigma^2} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (11)$$

式(11)を式(9)に代入すると

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{2G}{1+2G\phi} \left[ \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{(3/2-H'\phi)\sigma_{ij}\sigma_{kl}}{[1+H'/(3G)]\sigma^2} \dot{\epsilon}_{kl} \right] \quad (12)$$

ひずみおよび応力増分の偏差成分は全体の増分と次のように結ばれる。

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{\sigma}_{ii} = \dot{\sigma}_{ij} - \delta_{ij} \frac{E}{3(1-2\nu)} \dot{\epsilon}_{ii} \quad (13)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ii} \quad (14)$$

ただし、 $E$  と  $\nu$  は縦弾性係数とポアソン比、 $\delta_{ij}$  は Kronecker の delta, また、Hencky の方程式では、体積変化はすべて弾性成分によるものであることに注意する。式(13)と式(14)を用い、等方弾性定数間の換算式  $E=2(1+\nu)G$  を用いると

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{2G}{1+2G\phi} \left[ \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{3\nu+2G(1+\nu)\phi}{3(1-2\nu)} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ii} - \frac{3(1-2/3 \cdot H'\phi)\sigma_{ij}\sigma_{kl}}{2[1+H'/(3G)]\sigma^2} \dot{\epsilon}_{kl} \right] \quad (15)$$

式(15)が全ひずみ理論の Hencky 方程式の増分形表示である。これに対して、元の全ひずみ理論の式(1)からは、その逆関係として次の構成方程式が導かれる。

$$\sigma_{ij} = \frac{2G}{1+2G\phi} \left[ \epsilon_{ij} + \frac{3\nu+2G(1+\nu)\phi}{3(1-2\nu)} \delta_{ij}\epsilon_{ii} \right] \quad (16)$$

式(16)の  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$ , および  $\epsilon_{ii}$  をそれぞれの変化率  $\dot{\sigma}_{ij}$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}$ , および  $\dot{\epsilon}_{ii}$  でおきかえ、さらに  $\phi$  を  $(3\dot{\epsilon}^p)/(2\dot{\sigma})$  でおきかえた式を全ひずみ理論の増分形構成方程式としている文献<sup>3)</sup>もあるが、正しい表示とは考えられない。

一方において、Reuss の方程式に基づくひずみ増分理論の構成方程式<sup>4)</sup>を式(15)と同じ形式に表示すると、次のように表すことができる。

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G \left[ \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ii} - \frac{3\sigma_{ij}\sigma_{kl}}{2(1+H'/(3G))\sigma^2} \dot{\epsilon}_{kl} \right] \quad (17)$$

以上の結果から、ここに示した定式化では、通常の弾塑性有限要素解析プログラムにおいて用いられている式(17)を式(15)に変更するだけで全ひずみ理論による解を得ることができる。ただし、式(2)の  $\phi$  を各変形段階において評価しておく必要があり、それには式(11)によって得られる  $\dot{\phi}$  の積分値として求めるか、あるいは相当応力あるいは相当塑性ひずみの関数としてあらかじめ定められた材料データから求めるようにすればよい。

### 3. 平面応力場における表示式

平面応力場の解析では、前項で3次元の場について、得た構成方程式から、平面応力場( $\sigma_z = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ )の条件を用いて、数値的に必要な増分形の関係式を求めるようにしてもよい。ただし、ここでは平面応力場に対し、前項と同様にして得られる構成方程式の陽表示を記述しておくことにすると、次のようである。ただし、ここでひずみ速度  $\dot{\gamma}_{xy}$  は工学の定義によるもので、テンソルの  $\epsilon_{xy}$  の2倍にあたっている。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_x \\ \dot{\sigma}_y \\ \dot{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = [D_{ep}]_{total} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ただし

$$[D_{ep}]_{total} = \frac{E}{bd} \begin{bmatrix} c+d & b-3e & 0 \\ & c+d & 0 \\ sym. & & b/2 \end{bmatrix} - \frac{3a}{3b-ae(\sigma_x+\sigma_y)^2} \times \begin{bmatrix} (c\sigma_x - e\sigma_y)^2 & (c^2+e^2)\sigma_x\sigma_y - ce(\sigma_x^2+\sigma_y^2) & b\tau_{xy}(c\sigma_x - e\sigma_y) \\ & (e\sigma_x - c\sigma_y)^2 & b\tau_{xy}(c\sigma_y - e\sigma_x) \\ sym. & & b^2\tau_{xy}^2 \end{bmatrix}$$

ここで

$$a = \frac{3G(3/2-H'\phi)}{\sigma^2(H'+3G)}, \quad b = 3-3\nu+E\phi, \\ c = 2-\nu+E\phi, \quad d = 1+\nu+E\phi, \quad e = 1-2\nu$$

また

$$\dot{\phi} = \frac{3a}{3b-ae(\sigma_x+\sigma_y)^2} \left[ (c\sigma_x - e\sigma_y)\dot{\epsilon}_x + (c\sigma_y - e\sigma_x)\dot{\epsilon}_y + b\tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy} \right] \quad (19)$$

(1980年1月16日受理)

## 参 考 文 献

- 1) R. ヒル, 塑性学, 邦訳 培風館, 1954, p. 44.
- 2) Rice, J. R., McMeeking, R. M., Parks, D. M. and Sorensen E. P., 'Recent finite element studies in plasticity and fracture mechanics,' *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 17/18, 1979, pp. 411-442.
- 3) 白鳥正樹, 三好俊郎, '有限要素法によるき裂材の非線形解析,' *日本機械学会論文集*, 42巻, 358号(昭51-6) pp. 1633-1643.
- 4) 山田嘉昭, 塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座, II-2-A, 培風館, 1972, pp. 76-77.

