研究速報

UDC 532.59

規則波中の細長体に作用する流体力について
―前進速度のない場合―

Hydrodynamic Forces and Moments Acting on a Floating Slender Body with Zero Forward Speed

木下　健*

Takeshi KINOSHITA

1. はじめに

波の中を運動する細長体に作用する流体力を，matched asymptotic expansion法を利用して求める．本法は丸尾法[1]の非対称物体をも含む一般の場合への拡張である．波強制力は Haskindの公式[2]により radiation問題より求める事とし直接 diffraction 問題は扱わない．

2. near field potential の表示式

微小運動を仮定すると速度ポテンシャル $\Phi=Re(\phi e^{i\omega t})$ は，自由表面 $z=0$ で次式を満足する．

$$[F]\quad \left(-K+\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi=0,\ \text{where}\ K=\omega^2/g \tag{1}$$

near field で ϕ が

$\phi\sim\beta\phi_1+\beta^2\phi_2+\cdots$，$\beta$: slenderness ratio,

の様に展開できると仮定し，inner variables $\xi=x,\ \eta=y/\beta,\ \zeta=z/\beta$ を導入すると Laplace の式は

$$[L]\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)(\beta\phi_1+\beta^2\phi_2)+O(\beta^3)=0 \tag{2}$$

となる．同様に（1）は次の様になる．

$$[F]\quad \left(-K\beta+\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)(\beta\phi_1+\beta^2\phi_2)+O(\beta^3)=0 \tag{3}$$

丸尾[1]に従い $\phi^*=\beta\phi_1+\beta^2\phi_2$ として，$O(\beta^3)$ を省略する．この時最低次の項のみとしないのは，そうするとつまらない結果しか与えない事が知られているからである．ϕ^* の一般解は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\phi^*=&-a_0\int_0^\infty e^{k\zeta}\frac{\cos k\eta}{k-K\beta}dk+\sum_1^\infty a_{2m}\left(\frac{\partial^{2m}}{\partial\zeta^{2m}}\ln\lambda\right.\\&\left.+K\beta\frac{\partial^{2m-1}}{\partial\zeta^{2m-1}}\ln\lambda\right)+b_0(1+K\beta\zeta)+b_2\{\zeta^2-\eta^2\\&+K\beta\zeta(\zeta^2/3-\eta^2)\}+\cdots+a_1\int_0^\infty e^{k\zeta}\frac{\sin k\eta}{k-K\beta}kdk\\&+\sum_1^\infty a_{2m+1}\left(\frac{\partial^{2m+1}}{\partial\zeta^{2m}\partial\eta}\ln\lambda+K\beta\frac{\partial^{2m}}{\partial\zeta^{2m-1}\partial\eta}\ln\lambda\right)\\&+b_1\eta(1+K\beta\zeta)+b_3\{\eta(\eta^2/3-\zeta^2)\\&+K\beta\eta\zeta(\eta^2-\zeta^2)/3\}+\cdots\end{aligned}\tag{4}$$

where $\zeta=-\lambda\cos\theta$，$\eta=\lambda\sin\theta$，$\lambda=r/\beta$，$r^2=y^2+z^2$，主値をとる積分の項がそれぞれ $a_0\{\ln K\beta\lambda+\gamma+O(\beta)\}$，$a_1\{\eta/\lambda^2+O(\beta)\}$ と展開されるので ϕ^* の最低次の項，すなわち one term inner expansion ($\ln\beta$ は $O(1)$ と考える事にする．) は次の様になる．ここで γ はEuler の定数である．

$$\begin{aligned}&a_0(\ln K\beta\lambda+\gamma)+\sum_1^\infty a_{2m}\frac{\partial^{2m}}{\partial\zeta^{2m}}\ln\lambda+b_0+b_2(\zeta^2-\eta^2)\\&+\cdots+a_1\eta/\lambda^2+\sum_1^\infty a_{2m+1}\frac{\partial^{2m+1}}{\partial\zeta^{2m}\partial\eta}\ln\lambda+b_1\eta\\&+b_3\eta(\eta^2/3-\zeta^2)+\cdots\end{aligned}\tag{5}$$

したがって outer expansion of inner expansion は次の様になる．

$$\begin{aligned}&a_0(\ln Kr+\gamma)+b_0+b_2(z^2-y^2)/\beta^2+\cdots\\&+a_1\beta y/r^2+b_1y/\beta+\cdots\end{aligned}\tag{6}$$

一方 far field 解は

$$\begin{aligned}\phi\sim&-\sum_1^\infty\beta^n\int_{-l}^{l}\left\{\sigma_n(x')+\mu_n(x')\frac{\partial}{\partial y'}\right\}\cdot\\&\cdot G(x,y,z\,;\,x',0,0)dx'\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}\text{where}\quad G=&\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}+2K\int_0^\infty e^{k(z+z')}\\&\cdot J_0\{k\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\}\frac{dk}{k-K}\\&-2\pi iKe^{K(z+z')}J_0\{K\sqrt{(x-x')^2+y-y')^2}\}\end{aligned}\tag{8}$$

$$R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$
$$R'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}$$

と書けるから inner expansion of outer expansion は次式である．

$$\begin{aligned}\phi\sim\sum_1^\infty\beta^n\{&4\sigma_n(\xi)\ln(\beta\lambda/2)\\&-2\int_{-l}^{l}\frac{d}{d\xi'}\sigma_n(\xi')\mathrm{sgn}(\xi-\xi')\ln|\xi-\xi'|d\xi'\end{aligned}$$

*東京大学生産技術研究所　第2部

$$+\pi K\int_{-l}^{l}[\boldsymbol{H}_0(K|\xi-\xi'|)+Y_0(K|\xi-\xi'|)$$
$$+2iJ_0(K|\xi-\xi'|)]\sigma_n(\xi')d\xi'+4\mu_n(\xi)\eta/(\lambda^2\beta)$$
$$+O(\beta)\}\qquad(9)$$

where $\boldsymbol{H}_0$; Struve 関数，Y_0, J_0; Bessel 関数

（6），（9）より two term outer expansion of one term inner expansion と one term inner expansion of two term outer expansion が matching できる事がわかる．すなわち $b_1=o(\beta), b_2=o(\beta^2), \cdots, \mu_1=0$ そして

$$a_0=4\beta\sigma_1(\xi)\qquad(10)$$

$$b_0=-4\beta\sigma_1(\xi)(\ln 2K+\gamma)-2\beta\int_{-l}^{l}\frac{d}{d\xi'}\sigma_1(\xi')\mathrm{sgn}(\xi-\xi')\ln|\xi-\xi'|d\xi'$$
$$+\pi K\beta\int_{-l}^{l}\sigma_1(\xi')[\boldsymbol{H}_0(K|\xi-\xi'|)+Y_0(K|\xi-\xi'|)+2iJ_0(K|\xi-\xi'|)]d\xi'\qquad(11)$$

$$a_1=4\beta\mu_2(\xi)\qquad(12)$$

これらを（5）に代入し $O(\beta^3)$ を省略すると，near field potential が β^3，すなわち $(K\beta)^3$ を省略した形で求まる．しかしそれでは K が大きい時，大きな誤差を生じるので丸尾[1]に従い（10）～（12）を（4）に代入する．

$$\phi^*\sim\phi^{(2D)}-a_0\pi ie^{K\beta\zeta}\cos K\beta\eta-a_0(1+K\beta\zeta)\cdot(\ln 2K+\gamma)-\frac{1}{2}(1+K\beta\zeta)\int_{-l}^{l}a_0'\,\mathrm{sgn}(\xi-\xi')\cdot$$
$$\cdot\ln|\xi-\xi'|d\xi'+\frac{\pi}{4}K(1+K\beta\zeta)\int_{-l}^{l}a_0[\boldsymbol{H}_0+Y_0+2iJ_0]d\xi'+a_1\pi iK\beta e^{K\beta\zeta}\sin K\beta\eta$$
$$\sim\phi^{(2D)}+\phi^{(3D)}+O(\beta^2)\qquad(13)$$

where $$\phi^{(2D)}=-a_0\left(\oint_0^\infty e^{k\zeta}\frac{\cos k\eta}{k-K\beta}dk-\pi ie^{K\beta\zeta}\cos K\beta\eta\right)+\sum_1^\infty a_{2m}\left(\frac{\partial^{2m}}{\partial\zeta^{2m}}\ln\lambda+K\beta\frac{\partial^{2m-1}}{\partial\zeta^{2m-1}}\ln\lambda\right)$$
$$+a_1\left(\oint_0^\infty e^{k\zeta}\frac{\sin k\eta}{k-K\beta}k\,dk-\pi iK\beta e^{K\beta\zeta}\cdot\sin K\beta\eta\right)+\sum_1^\infty a_{2m+1}\left(\frac{\partial^{2m+1}}{\partial\zeta^{2m}\partial\eta}\ln\lambda+K\beta\frac{\partial^{2m}}{\partial\zeta^{2m-1}\partial\eta}\ln\lambda\right)\qquad(14)$$

$$\phi^{(3D)}=\frac{1}{2}(1+K\beta\zeta)\int_{-l}^{l}a_0'(\xi')N(K|\xi-\xi'|)\cdot\mathrm{sgn}(\xi-\xi')d\xi'\qquad(15)$$

$$N(u)=-\gamma-\ln 2u+\frac{\pi}{2}\int_0^u\boldsymbol{H}_0(u')du'+\frac{\pi}{2}\int_0^u Y_0(u')du'-\pi i+\pi i\int_0^u J_0(u')du'$$

この様にすると $K\to\infty$ で $\phi^{(3D)}\to0$ となり ϕ^* は二次元問題のポテンシャル $\phi^{(2D)}$ となる．理論的[3]にも実験的にも $K\to\infty$ の時細長体のまわりのポテンシャルは二次元問題から求めたもの（ストリップ法）に一致する事が知られており，この事は好都合である．もちろん K が小さい時は $\phi^{(3D)}$ は無視できず三次元影響を示す．さらに（13）であると都合好い事に従来の二次元問題の手法が利用できる．その方法を次節で述べる．

3. 境界値問題

ここでは物体表面上の境界条件〔H〕より（13）式中の各係数を求める．これは本来 near field の話であるが以後混乱する恐れもないので far field の変数 (x, y, z) を用いる．今，物体の運動振幅を $X_je^{i\omega t}$ ($j=3, 4, 5$ については角振幅）とすると速度は $i\omega X_je^{i\omega t}$ であるから，$\phi_j=i\omega X_j\varphi_j$ とおけば，

$$[H]\quad\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}=\frac{\partial x_j}{\partial n},\ j=1\sim6\qquad(16)$$

ただし　$x_1\equiv x,\ x_2\equiv y,\ x_3\equiv z$

$$\frac{\partial x_4}{\partial n}\equiv y\frac{\partial z}{\partial n}-z\frac{\partial y}{\partial n},\quad\frac{\partial x_5}{\partial n}\equiv z\frac{\partial x}{\partial n}-x\frac{\partial z}{\partial n},$$
$$\frac{\partial x_6}{\partial n}\equiv x\frac{\partial y}{\partial n}-y\frac{\partial x}{\partial n}$$

細長体の場合は n を断面の外法線として次式を得る．

$$[H]\quad\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}=\frac{\partial x_j}{\partial n};\ j=2\sim4,$$
$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}=(-1)^jx\frac{\partial x_{8-j}}{\partial n};\ j=5, 6\qquad(17)$$

この時，$j=1$（前後揺）は高次の現象として考えない．（17）を書き直すと

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}=U_j(x)\frac{\partial x_k}{\partial n}\qquad(18)$$

$$\text{where}\ \begin{cases}j=2\sim4;\ U_j=1,\ k=j\\ j=5, 6;\ U_j=(-1)^jx,\ k=8-j\end{cases}\qquad(19)$$

（18）の φ_j に（13）の ϕ^* を代入すると次の様になる．

$$\frac{\partial\varphi_j^{(2D)}}{\partial n}=U_j(x)\frac{\partial x_k}{\partial n}-W_j(x)\frac{\partial z}{\partial n}\qquad(20)$$

$$\text{where}\ W_j(x)=\frac{K}{2}\int_{-l}^{l}a_0'(x')N(K|x-x'|)\mathrm{sgn}(x-x')\cdot dx'\qquad(21)$$

すなわち（13）式中の二次元ポテンシャルは元々の運動の二次元ポテンシャルと $-W_i$ の上下揺の二次元ポテンシャルの和である事が分かる．W_i は有限翼幅の翼の

down wash に相当する．二次元問題 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{\partial x_k}{\partial n}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{\partial z}{\partial n}$ の解の係数 a_n をそれぞれ A_n，$A_n^{(3)}$ とすると，

$$a_n=U_j(x)A_n-W_j(x)A_n^{(3)},\ n=0\sim\infty \tag{22}$$

$n=0$ の時，(22) は a_0 を決定する微積分方程式となるが，ここでは a_0 を厳密に求める事をせず，$K\to0, K\to\infty$ で厳密解に一致する近似解を用いる．すなわちまず (21) に

$$a_0(x)=U_j(x)A_0(x) \tag{23}$$

を代入する．$A_0(\pm l)=0$ であるから

$$W_j(x)=\frac{K}{2}U_j(x)A_0(x)\{N(K|l+x|)+N(K|l-x|)\}+\frac{K^2}{2}\int_{-l}^{l}\{U_j(x')A_0(x')-U_j(x)A_0(x)\}N'(K|x-x'|)dx' \tag{24}$$

where $N'(K|x-x'|)=-\frac{1}{|x-x'|}+\frac{\pi}{2}\boldsymbol{H}_0(K|x-x'|)+\frac{\pi}{2}Y_0(K|x-x'|)+\pi iJ_0(K|x-x'|)$

そして (22) に (24) を代入すれば a_n を得る．

4. 力とモーメント

運動 i による j 方向の力またはモーメントを F_{ij} とすると

$$\begin{aligned}F_{ij}&=-\iint p_i\frac{\partial x_j}{\partial n}ds=\rho\iint\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}\frac{\partial x_j}{\partial n}ds\\&=\rho i\omega e^{i\omega t}\iint\phi_i\frac{\partial x_j}{\partial n}ds\\&=-\rho gKe^{i\omega t}X_i\iint\varphi_i\frac{\partial x_j}{\partial n}ds\\&=-\rho gKe^{i\omega t}X_i\iint\varphi_i\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}ds\\&\equiv\rho gKX_ie^{i\omega t}f_{ij}\end{aligned} \tag{25}$$

where $f_{ij}=-\iint\varphi_i\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}ds=-\iint\varphi_i\frac{\partial x_j}{\partial n}ds$ (26)

細長体の場合，(19) の U_j，k を用いて次の様に書ける．

$$f_{ij}=\int_{-l}^{l}U_j(x)h_{ik}(x)dx \tag{27}$$

where $h_{ik}=-\int_c\varphi_i\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}ds=-\int_c\varphi_i\frac{\partial x_k}{\partial n}ds$,

$i=2\sim6,\ k=2\sim4$ (28)

(13) より

$$h_{ik}=h_{ik}^{(2D)}+h_{ik}^{(3D)} \tag{29}$$

where $h_{ik}^{(2D)}=-\int_c\varphi_i^{(2D)}\frac{\partial x_k}{\partial n}ds$ (30)

$$\begin{aligned}h_{ik}^{(3D)}&=-\int_c\varphi_i^{(3D)}\frac{\partial x_k}{\partial n}ds\\&=\frac{W_i(x)}{K}\int_c(1+Kz)\frac{\partial x_k}{\partial n}ds\\&=-\frac{W_i(x)}{K}\left\{\iint\frac{\partial}{\partial x_k}(1+Kz)dydz-\int_{y_2}^{y_2}\frac{\partial x_k}{\partial n}dy\right\}\quad(\because\ \text{Gauss の定理})\\&=-W_i(x)S_k(x)+\frac{g}{\omega^2}W_i(x)B_k(x)\end{aligned} \tag{31}$$

where $S_2=0$，$S_3=S$(断面積)，$S_4=\iint ydydz$ (断面一次モーメント)，$B_2=0$，$B_3=y_1-y_2$(幅)，$B_4=(y_1^2-y_2^2)/2$

$h_{ik}^{(2D)}$ に関しては，二次元問題の付加質量係数（付加慣性モーメント係数），m_{ik}，減衰係数，N_{ik} を用いて表す．(22) より，単位運動について各断面に働く力は，

$$-\rho gKe^{i\omega t}\int_c\varphi_i^{(2D)}\frac{\partial x_k}{\partial n}ds=(-\omega^2m_{ik}+i\omega N_{ik})\cdot U_i(x)e^{i\omega t}-\omega^2m_{3k}+i\omega N_{3k})W_i(x)e^{i\omega t} \tag{32}$$

であるから (30) より次式を得る．

$$h_{ik}^{(2D)}=\frac{1}{iw\rho}(i\omega m_{ik}+N_{ik})U_i(x)-\frac{1}{iw\rho}(i\omega m_{3k}+N_{3k})W_i(x) \tag{33}$$

以上で radiation force F_{ij} が求まった．本来 F_{ij} は Haskind の公式[2]により対称性があるはずであるが，本論で示した定式化はいわゆる inconsistent なものであるので，正確には $F_{ij}=F_{ji}$ とはならない．最後に diffaction 問題，特に波強制力 E_j について述べる．添字 0, 7 がそれぞれ入射波，反射波を示すとすると，

$$\begin{aligned}E_j&=-\iint(p_0+p_7)\frac{\partial x_j}{\partial n}ds\\&=\rho\iint\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_0+\Phi_7)\frac{\partial x_j}{\partial n}ds\\&=\rho i\omega e^{i\omega t}\iint(\phi_0+\phi_7)\frac{\partial x_j}{\partial n}ds\\&=-\rho gae^{i\omega t}\iint(\varphi_0+\varphi_7)\frac{\partial x_j}{\partial n}ds\end{aligned} \tag{34}$$

where $\phi_{0,7}=iga\varphi_{0,7}/\omega$,

$\varphi_0=\exp\{Kz+iK(x\cos\alpha+y\sin\alpha)\}$

$$e_j=-\iint(\varphi_0+\varphi_7)\frac{\partial x_j}{\partial n}ds=-\iint(\varphi_0+\varphi_7)\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}ds \tag{35}$$

とすると(34)は次の様になる.

$$E_j=\rho gae_j \tag{36}$$

ここで

$$\iint\left(\varphi_7\frac{\partial}{\partial n}\varphi_j-\varphi_j\frac{\partial}{\partial n}\varphi_7\right)ds=0 \tag{37}$$

を利用すると,(35)は

$$e_j=-\iint\left(\varphi_0\frac{\partial}{\partial n}\varphi_j+\varphi_j\frac{\partial}{\partial n}\varphi_7\right)ds$$

さらに反射波(diffraction 問題)の境界条件 $\frac{\partial}{\partial n}(\varphi_0+\varphi_7)=0$ より

$$e_j=\iint\left(\varphi_j\frac{\partial}{\partial n}-\frac{\partial}{\partial n}\varphi_j\right)\varphi_0 ds\equiv H_j(K,\alpha) \tag{38}$$

となる.一方運動 j によるポテンシャルは(8)式の G を用いて,Green の定理により

$$\varphi_j=\frac{1}{4\pi}\iint\left(\varphi_j\frac{\partial}{\partial n}-\frac{\partial}{\partial n}\varphi_j\right)G(x,y,z\,;\,x',y',z')\cdot ds(x',y',z')$$

であり

$$G\xrightarrow[Kr\gg1]{}\sqrt{\frac{8\pi K}{iR}}\,e^{K(z+z')-iKr+iK(x'\cos\theta+y'\sin\theta)}$$

を用いると

$$\varphi_j(x,y,z)\xrightarrow[Kr\gg1]{}\sqrt{\frac{K}{2\pi ir}}\,e^{Kz-iKr}H_j(K,\theta) \tag{39}$$

であるから,α 方向の入射波による j 方向の波強制力は運動 j による α 方向の波から求められる.これが有名な波強制力に関するHaskindの公式[2]である.今の場合,far field 解(7),および(10)〜(12)より

$$H_j(K,\alpha)=-\pi\int_{-l}^{l}(a_0+a_1iK\beta\sin\alpha)\exp(iKx\cos\alpha)dx \tag{40}$$

(22)および Appendix より

$$H_j(K,\alpha)=-\int_{-l}^{l}(\gamma_1+\gamma_2\sin\alpha)\exp(iKx\cos\alpha)dx \tag{41}$$

$$\gamma_1=U_j(H^++H^-)/2-W_j(H^{(3)+}+H^{(3)-})/2$$
$$\gamma_2=U_j(H^+-H^-)/2-W_j(H^{(3)+}-H^{(3)-})/2$$

5. おわりに

以上で,左右対称物体の縦揺,上下揺に対して実験値とも良く一致した丸尾法[1,4]を,任意形状物体の一般運動の radiation 問題に拡張できた.波紋や diffraction 問題にも一部言及した.

Appendix

A_0, A_1 は以下示す如く断面の二次元問題の $H^\pm$ 関数で表す事が出来る.

$$H^\pm=\pi(A_0\pm iK\beta A_1)$$
$$A_0=(H^++H^-)/2\pi$$
$$iK\beta A_1=(H^+-H^-)/2\pi$$

(1979年5月29日受理)

参考文献

1) H. Maruo.'An improvement of the slender body theory for oscillating ships with zero forward speed,' Bulletin Faculty of Engineering Yokohama National University 19 (1970)

2) J. N. Newman, 'The exciting forces on a moving body in waves,' J. S. R., Vol. 9, No. 3 (1965)

3) T. F. Ogilvie and E. O. Tuck, 'A rational strip theory of ship motions,' Rep. No. 013, Department of Naval Architecture and Marine Eng. The Univ. of Michigan (1969)

4) H. Maruo and J. Tokura, 'Prediction of hydrodynamic forces and moments acting on ships in heaving and pitching oscillations by means of an improvement of the slender ship theory,' JSNAJ, Vol. 143 (1978)