研究速報
UDC 513.88
62-50

最適問題のための双対法

A Dual Method for an Optimization Problem

小林幹夫*・大島康次郎*
Mikio KOBAYASHI and Yasujiro OSHIMA

1. はじめに

凸はん関数と単一の不等式拘束条件をもったL^pにおける最適問題に対して，双対問題を設定する．この双対問題の等式拘束条件を満たす任意の関数から未定乗数を除いた残りの関数は，最適解に対する一つの近似解とみなすことができる．本研究では，最適解と双対問題の等式拘束条件を満たす上述の関数との距離の上限およびこの関数を用いたときの評価関数値の上下の限界が導出される．さらに，双対問題を利用した最適解導出のためのアルゴリズムが考えられ，収束についての考察がなされる．なお，本研究で述べられるLEMMAおよびPROPOSITIONの証明は，大部分のものが煩雑であるのでそれらの記述は省略される．

2. 問題の記述

実数軸上の任意の区間を(a, b)で表わし，実数p $(1, +\infty)$および空間$B=L^p(0, 1)$を導入する．Bにおける任意のFréchet微分可能な関数をφとし，Bの点xにおけるFréchet微分を$\varphi'(x)$と表わす．任意の二つの要素$x\in B^*$および$y\in B$に関してある実数(x, y)を対応させ，これらの関係を，次式

$$(1)\quad (x, y)=\int_0^1 x(t)\cdot y(t)\,dt$$

によって定義する．ここで，B^*はBの共役空間を表わす．$m(>2)$を任意の正の整数とし，実数$s_i(i=1, 2, \cdots\cdots, m-1)$を区間$(1, +\infty)$の要素とする．$T_0$を$B^*$のある固定された要素とし，$T_i(i=1, 2, \cdots\cdots, m-1)$をBから$L^{s_i}(0, 1)$への有界線形作用素とする．$d_i(i=1, 2, \cdots\cdots, m-1)$を$L^{s_i}(0, 1)$のある固定された要素とする．$B$から$R$へのある関数$f$を導入する．任意の$u\in B$に対して，次式

$$(2)\quad f(u)=\sum_{i=1}^{m-1}\|T_i(u)-d_i\|^{s_i}+(T_0, u)$$

が成立しているものとする．ここで，s_iは不等式

$$\begin{cases} 1<s_i\leq 2, & i=1, 2, \cdots\cdots, j \\ 2<s_i<+\infty, & i=j+1, j+2, \cdots\cdots, m-1 \end{cases}$$

を満たしているものとする．$\bar{m}(\geq 2)$を任意の正の整数とし，Bに関する直積空間$\bar{B}=\prod^{\bar{m}-1}B$を考える．ここで，$\bar{B}$におけるノルムは，次式

$$\|W\|=\left(\sum_{i=1}^{\bar{m}-1}\|W\|^p\right)^{1/p}, W=\{W_1, W_2, \cdots, W_{\bar{m}-1}\}$$

によって定義されるものとする．$\bar{T}_1$をBにおける恒等作用素とし，$\bar{T}_i(i=2, 3, \cdots\cdots, \bar{m}-1)$を$B$から$B$への有界線形作用素とする．$\bar{d}_i(i=1, 2, \cdots\cdots, \bar{m}-1)$を$B$のある固定された要素とする．$B$から$\bar{B}$へのある関数$Z=\{Z_1, Z_2, \cdots\cdots, Z_{\bar{m}-1}\}$を導入する．任意の$u\in B$に対して，次式

$$(Z_i(u))(t)=(\bar{T}_i(u))(t)-\bar{d}_i(t),\ t\in(0, 1),$$
$$i=1, 2, \cdots\cdots, \bar{m}-1$$

が成立しているものとする．BからRへのある関数gを導入する．任意の$u\in B$に対して，次式

$$(3)\quad g(u)=\|Z(u)\|^p-1$$

が成立しているものとする．このとき，Primal Problem (最適問題)は，つぎのようになる．

(P_1) 不等式$g(u)\leq 0$を満たすすべての$u\in B$に関して$f(u)$を最小にするようなu_0を求めよ．

(P_1)に対応するDual Problem (双対問題)は，つぎのようになる．

(P_2) 等式および不等式

$$(4)\quad \begin{cases} \text{(i)} & f'(u)+\lambda\cdot g'(u)=0, \\ \text{(ii)} & \lambda\geq 0 \end{cases}$$

を満たすすべての$u\in B$とすべての$\lambda\in R$に関して，$f(u)+\lambda\cdot g(u)$を最大にする$\{u^*:\lambda^*\}$を求めよ．

3. 諸限界とアルゴリズム

BからRへの関数φ_1およびBからB^*への関数φ_2を導入する．任意の$u\in B$に対して，次式

*東京大学生産技術研究所　第2部

$$(5)\begin{cases}(\mathrm{i})\ \varphi_1(u)=\|u\|^p,\\(\mathrm{ii})\ (\varphi_2(u))(t)=p\cdot|u(t)|^{(p-1)}\cdot\\ \qquad\qquad \mathrm{sgn}(u(t)),\ t\in(0,1)\end{cases}$$

が成立しているものとする．ここで，

$$\mathrm{sgn}(u(t))=\begin{cases}u(t)/|u(t)|,\ u(t)\neq 0,\\ 0,\ \ u(t)=0\end{cases}$$

であるものとする．$B\times B$ から R へのある関数 φ_3 を導入する．任意の $\{u:v\}\in B\times B$ に対して，次式

$$(6)\quad \varphi_3(u,v)=\|u\|^p-\|v\|^p-(\varphi_2(v),u-v)$$

が成立しているものとする．さらに，$p\neq 2$ のとき，実数 $r_1(p)$ および $r_2(p)$ を次のように定義する：

$$(7)\begin{cases}(\mathrm{i})\ r_1(p)=(p-1)^{1/(p-2)},\\(\mathrm{ii})\ r_2(p)=((r_1(p))^{(p-1)}-1)/\\ \qquad\qquad (r_1(p)-1).\end{cases}$$

LEMMA 1. $p=2$ のとき，任意の $\{u:v\}\in B\times B$ に対して

$$(8)\quad \varphi_3(u,v)=\|u-v\|^2$$

が成立する．

LEMMA 2. $2<p<+\infty$ のとき，任意の $\{u:v\}\in B\times B$ に対して

$$\begin{cases}(\mathrm{a})\ \varphi_3(u,v)\geq A_1\cdot\|u-v\|^p,\\(\mathrm{b})\ \varphi_3(u,v)\leq B_1\cdot(\|v\|^{(p-2)}\|u-v\|^2\\ \qquad\qquad +\|u-v\|^p)\end{cases}$$

が成立する．ここで，A_1 および B_1 は，次式

$$(9)\begin{cases}(\mathrm{i})\ A_1=(p-1)/(r_2(p)+1)^{(p-2)},\\(\mathrm{ii})\ B_1=2^{(p-3)}\cdot p(p-1)\end{cases}$$

によって与えられる．

LEMMA 3. $1<p<2$ のとき，すべての $\{u:v\}\in B\times B$ と $0\leq A_2\leq k_0$ を満たすすべての A_2 に対して

$$(\mathrm{a})\quad \varphi_3(u,v)\geq A_2\cdot\|u-v\|^p-A_2^{(p-1)}\cdot A_3^p\cdot\|v\|^p$$

が成立し，すべての $\{u:v\}\in B\times B$ に対して

$$(\mathrm{b})\quad \varphi_3(u,v)\leq B_2\cdot\|u-v\|^p$$

が成立する．ここで，k_0，A_3 および B_2 は，次式

$$(10)\begin{cases}(\mathrm{i})\ k_0=(1/2)^{1/(p-1)}\cdot((p-1)/(p+1)),\\(\mathrm{ii})\ A_3=(p+1)/(p-1),\\(\mathrm{iii})\ B_2=(p-1)/(r_2(p)+1)^{(p-2)}\end{cases}$$

によって与えられる．

最適解と双対問題の等式拘束条件(4)の(i)を満たす関数との距離の上限およびこの関数を代入したときの評価関数値の上下の限界を導出するために，つぎのような定義をする：

$$(11)\begin{cases}(\mathrm{i})\ k_1=\begin{cases}0,\ 2\leq p<+\infty,\\ A_3^p,\ 1<p<2,\end{cases}\\(\mathrm{ii})\ k_2=\begin{cases}\overline{A}_1,\ 2\leq p<+\infty,\\ k_0,\ 1<p<2,\end{cases}\\ \text{ここで，}p=2\text{ のとき }\overline{A}_1=1\text{ であり，他の場合は，}\overline{A}_1=A_1\text{ である．}\\(\mathrm{iii})\ c_i(u)=\begin{cases}\overline{B}_2\cdot\|T_i\|^{s_i},i=1,2,\cdots,j,\\ B_1\cdot\|T_i\|^{s_i},i=j+1,j+2,\cdots,m-1\\ B_1\cdot\left(\sum_{k=j+1}^{m-1}\|T_k(u)-d_k\|^{(p-2)}\cdot\right.\\ \qquad\left.\|T_k\|^2\right),i=m,\end{cases}\\ \text{ここで，}p=2\text{ のとき，}\overline{B}_2=1\text{ であり，他の場合は，}\overline{B}_2=B_2\text{ である．}\\(\mathrm{iv})\ \overline{c}_i(u)=\begin{cases}\overline{B}_2\cdot\|\overline{T}_i\|^p,i=1,2,\cdots,\overline{m}-1,\\ \qquad 1<p\leq 2,\\ 0,\ i=\overline{m},\qquad 1<p\leq 2,\\ B_1\cdot\|T_i\|^p,\ i=1,2,\cdots,\overline{m}-1,\\ \qquad 2<p<+\infty,\\ B_1\cdot\left(\sum_{k=1}^{\overline{m}-1}\|\overline{T}_k(u)-\overline{d}_k\|^{(p-2)}\cdot\right.\\ \qquad\left.\|\overline{T}_k\|^2\right),\ i=\overline{m},\\ \qquad 2<p<+\infty,\end{cases}\\(\mathrm{v})\ e(u,c_0)=((1/(1-2^p\cdot k_1\cdot k_2^p))\cdot(|g(u)|\\ \qquad /c_0+2^p\cdot k_1\cdot c_0^p\cdot\|u\|^p))^{1/p},\ 0<c_0\leq c_2,\\(\mathrm{vi})\ \alpha(u,\lambda)=f(u)+\lambda\cdot g(u),\\(\mathrm{vii})\ \beta(u,\lambda,c_0)=\alpha(u,\lambda)+\sum_{i=1}^{m}c_i(u)\cdot\\ \qquad (e(u,c_0))^{s_i}+\sum_{i=1}^{\overline{m}}\lambda\cdot\overline{c}_i(u)\cdot((e(u,c_0))^{\overline{s}_i},\end{cases}$$

ここで，$s_m=2$ および $s_{\overline{m}}=2$ であり，$i<\overline{m}$ のとき $\overline{s_i}=p$ である．

PROPOSITION 1. つぎのことがら

$$(12)\begin{cases}\text{(i)}\ \{x:\lambda\}\in B\times R\ \text{は (4)を満たし，}\lambda\neq 0\ \text{であり，}\\ \text{(ii)}\ g(u_0)=0\end{cases}$$

が成立しているものとする．このとき，つぎのような不等式

$$\begin{cases}\text{(a)}\quad \|x-u_0\|\leq e(x,c_0),\\ \text{(b)}\quad \alpha(x,\lambda)\leq f(u_0)\leq \beta(x,\lambda,c_0)\end{cases}$$

が成立する．

PROPOSITION 2. つぎのことがら

$$(13)\begin{cases}\text{(i)}\ \{x_n:\lambda_n\}\in B\times R\,(n=1,2,\cdots)\ \text{は (4)を満たし，実数列}\ \{\lambda_n\}\ \text{は有界であり，}\\ \text{(ii)}\ \lim_{n\to+\infty} g(x_n)=0\end{cases}$$

が成立しているものとする．このとき，つぎのことがらが成立する：

(a) 実数列 $\{e_n\}$ をゼロに収束させるような，ある実数列 $\{c_{0,n}\}$ が存在し，

(b) このような $\{c_{0,n}\}$ に対して，実数列 $\{\alpha_n\}$ および $\{\beta_n\}$ は，共に，$f(u_0)$ に収束する．

ここで，e_n,α_n および β_n は，次式

$$\begin{cases}e_n=e(x_n,c_{0,n}),\\ \alpha_n=\alpha(x_n,\lambda_n),\\ \beta_n=\beta(x_n,\lambda_n,c_{0,n})\end{cases}$$

のように定義される．

以下においては，任意の $\lambda_n>0$ が与えられたとき，(4)の(i)を満たすような u_n が求まるものと仮定する．このような仮定のもとにおいては，問題は，(P_2) の解 $\{u_*:\lambda_*\}$ に含まれている u_* を導出させるような λ_* を求めることである．しかしながら，一般に，λ_* を解析的に求めることは困難であるから，ある推定値 λ_1 から出発して，逐次これを修正していくことにより，λ_* を数値的に求めるというアルゴリズムが，実際上，必要となる．そこで，$\lambda_1>0$ が与えられたものとして，$\lambda_{n+1}(n\geq 1)$ を逐次求めていく方法を考える．つぎのような定義をする：

$$(14)\begin{cases}\text{(i)}\ c(n)=(|\,\|Z(x_n)\|-1\,|^p/(k_1\cdot(p+1)\cdot(\|Z(x_n)\|^p+1)))^{1/p},\ k_1\neq 0,\\[2ex] \text{(ii)}\ c_{0,n}=\begin{cases}k_2,\ k_1=0,\\ k_2,\ k_1\neq 0,\ c(n)>k_2,\\ c(n),\ k_1\neq 0,\ c(n)<k_2,\end{cases}\\[2ex] \text{(iii)}\ a(n)=2\lambda_n\cdot c_{0,n}\cdot(|\,\|Z(x_n)\|-1\,|^p-c_{0,n}^p\cdot k_1\cdot(\|Z(x_n)\|^p+1)),\\[2ex] \text{(iv)}\ b(n)=g(x_n)-a(n)/(2\lambda_n),\\[2ex] \text{(v)}\ \delta\lambda_n=\begin{cases}a(n)/b(n),\ g(x_n)\neq 0,\\ 0,\ g(x_n)=0,\end{cases}\\[2ex] \text{(vi)}\ \lambda_{n+1}=\lambda_n+\delta\lambda_n.\end{cases}$$

ここで，$x_n(n\geq 1)$ は，B の要素であり，$\{x_n:\lambda_n\}$ は，(4)の(i)を満たすものとする．

PROPOSITION 3. 任意の $u\in B$ および u_0 に対して

$$(15)\quad f(u)+\lambda_0\cdot g(u)\geq f(u_0)+\lambda_0\cdot g(u_0)$$

を満たすある実数 λ_0 が存在するものとする．このとき，(14)で定義された x_n から構成される数列 $\{x_n\}$ は，u_0 に強収束する．

4. おわりに

本研究で得られた結果は，L^p の直積空間，$l^p,l^p(n)$〔1〕およびこれらの直積空間で定式化された問題に対しても，有効に，利用することができる．不等式拘束条件が多数ある場合の問題に対しては，本研究中のアルゴリズムに関する結果は有効でない．しかしながら，λ_{n+1} を求めるときに，勾配法を用いることにより，PROPOSITION 1〜PROPOSITION 3 における結果と同様な結果を得ることは，可能であると考えられる．この点に関する理論的考察と数値計算による考察は，目下，検討中である．

(1979年3月3日受理)

参考文献

〔1〕 A.E. Taylor: Introduction to Functional Analysis, John Wiley & Sons, Inc., 1958.