

有限要素法による多層サンドイッチはりの動的応答解析

Dynamic Finite Element Analysis of Multilayer Sandwich Beams

山田 嘉 昭*・奥 村 秀 人*

Yoshiaki YAMADA and Hidëhito OKUMURA

1. 概 要

ここで取り扱うサンドイッチ材は積層構造の一種で、2枚の薄い表面材(face plate)または層間強化材の間に軽量のコア(core)をはさみ接着加工したものである。高い比剛性を有することを特長とし、このため航空機などの軽量構造材料として注目され、広く使用されている。このようなサンドイッチ構造については、すでに多くの研究があり、単一のコアを有するサンドイッチはりのたわみについては変分原理を用いた Hoff と Mautner¹⁾、有限要素法による Abel と Popov²⁾ の解析などをあげることができる。最近では多層のコアを有するはりについて Kao と Ross³⁾、有限要素法による解析では Khatua と Cheung⁴⁾ の論文などが発表されている。解析の方法として、上記文献 1, 3, および 4 では表面材あるいは層間強化材については曲げ変形と伸び変形、コアについてはせん断変形を考えているが、文献 2 はさらに表面材のせん断変形とコアの曲げ変形についても考慮したものである。

本報告は、以上の論文で主として行われた静的な解析を動的問題に拡張し、積層材をコンポーネントとして有する構造物の有限要素法動的解析プログラムを開発するための第1歩となるものである。

2. 多層サンドイッチはりのたわみ

図1は多層サンドイッチはりの曲げ変形を表し、文献 1, 3, 4 と同じく曲げ変形は表面材または層間強化材、せん断変形はコアによりもっぱら負担されるものとする。断面 $m-n$ に作用する曲げモーメントを M 、せん断力を S 、また横分布荷重を $q(x)$ とし、図2のように分解した力の平衡を仮想仕事の原理を基礎に考えていく。

弾性系の動力学における仮想仕事の原理⁵⁾ は次式で与えられる。

$$\delta U = \delta W - \int_V \rho \delta u^T \ddot{u} dV \quad (1)$$

ただし

$$\delta U = \int_V \delta \epsilon^T \sigma dV, \quad (2)$$

$$\delta W = \int_S \delta u^T \Phi dS + \int_V \delta u^T X dV + \delta v^T P$$

ここで δU は仮想ひずみエネルギー、 δW は仮想変位

δu 、 δv が表面力 Φ 、物体力 X 、および集中外力 P に対してなす仮想仕事である。式(1)の右辺第2項は慣性力による仮想仕事を表している。

ここでの変定のもとで、サンドイッチはりのひずみエネルギー U は次式で与えられる。

$$U = U_{be} + U_s = \sum_{i=1}^n (1/2) \iiint \sigma_{xi} \epsilon_{xi} dx dy dz + \sum_{j=1}^{n-1} (1/2) \iiint \tau_{jz} \gamma_{jz} dx dy dz \quad (3)$$

式(3)において、 U_{be} は曲げと x 軸方向の伸びによる表面材および層間強化材のひずみエネルギー、 U_s はせん断によるコアのひずみエネルギーである。添字 i は i 番目の層間強化材を表し、 $i=1$ と n は表面材に相当する。添字 j は j 番目のコアを表す。 i 番目の層間強化材について、その中心軸から測って y_i に位置する繊維を考えると、そのひずみ ϵ_{xi} と応力 σ_{xi} は

$$\epsilon_{xi} = du_i/dx - y_i(d^2w/dx^2), \quad \sigma_{xi} = E_i \epsilon_{xi} \quad (4)$$

ただし、座標軸の方向は、図1および図2に示す通りとする。式(4)を式(3)の U_{be} の表示に代入すると

$$U_{be} = \sum_{i=1}^n (1/2) \left\{ \int_0^l E_i A_i (du_i/dx)^2 dx + \int_0^l E_i I_i (d^2w/dx^2)^2 dx \right\} \quad (5)$$

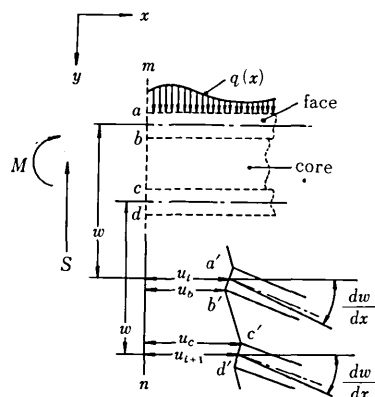


Fig.1 多層サンドイッチはり

*東京大学生産技術研究所付属複合材料技術センター

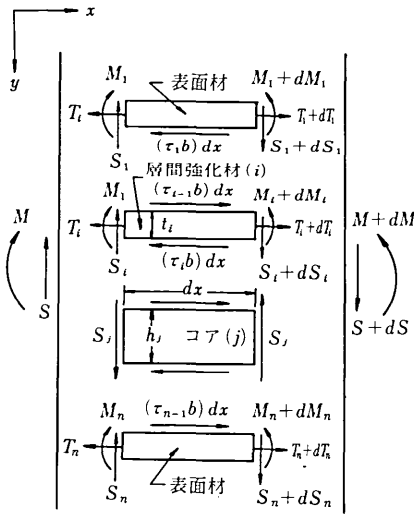


Fig.2 表面材と心材の力の平衡

ここで

$$A_i = \int dydz = bt_i, \quad I_i = \iint y^2 dydz = b \int y^2 dy \quad (6)$$

一方において、 j 番目のコアのせん断ひずみ τ_j とせん断応力 τ_j は

$$\tau_j = (du/dy)_j + (dw/dx) = (u_c - u_b)/h_j + (dw/dx) = (c_j/h_j)\{(u_{j+1} - u_j)/c_j + (dw/dx)\} \quad (7)$$

$$\tau_j = G_j \gamma_j \quad (8)$$

ただし $c_j = h_j + (t_{j+1} + t_j)/2$. 式 (7) および式 (8) を式 (3) の U_s の表示に代入すると

$$U_s = \sum_{j=1}^{n-1} (1/2) \int_0^l A_j G_j (c_j/h_j)^2 \{(u_{j+1} - u_j)/c_j + (dw/dx)\}^2 dx, \quad A_j = bh_j \quad (9)$$

分布荷重を $q(x)$, 両端の境界 $x=0, l$ に働くモーメントと集中横荷重をそれぞれ M_0, M_l, P_0, P_l とし、さらに i 番目の強化材に働く軸力を T_{i0}, T_{il} とすると外力のなす仮想仕事は

$$\delta W = \int_0^l q(x) \delta w dx + M_0 (\partial \delta w / \partial x)_0 + M_l (\partial \delta w / \partial x)_l + P_0 (\delta w)_0 + P_l (\delta w)_l + \sum_{i=1}^n T_{i0} (\delta u_i)_0 + \sum_{i=1}^n T_{il} (\delta u_i)_l \quad (10)$$

慣性力による仮想仕事は

$$-\int_V \rho \delta u^T \ddot{u} dV = -\int_0^l \rho_w b (d^2 w / dt^2) \delta w dx - \int_0^l \sum_{i=1}^n \rho_s b t_i (d^2 u_i / dt^2) \delta u_i dx \quad (11)$$

ここで

$$\rho_w = \sum_{i=1}^n \rho_s t_i + \sum_{j=1}^{n-1} \rho_c j h_j \quad (12)$$

式 (5), 式 (9)~式 (11) を仮想仕事の表示式(1) に代入すると、その左辺は

$$\delta \left\{ (1/2) \sum_{i=1}^n \int_0^l E_i b t_i (du_i/dx)^2 dx \right\} + \delta \left\{ (1/2) \sum_{i=1}^n \int_0^l E_i I_i (d^2 w/dx^2)^2 dx \right\} + \delta \left\{ (1/2) \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^l (b G_j c_j^2 / h_j) \times \{(u_{j+1} - u_j)/c_j + (dw/dx)\}^2 dx \right\} \quad (13)$$

あるいは

$$\sum_{i=1}^n \int_0^l E_i b t_i (du_i/dx) \delta (du_i/dx) dx + \sum_{i=1}^n \int_0^l E_i I_i (d^2 w/dx^2) \delta (d^2 w/dx^2) dx + \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^l (b G_j c_j^2 / h_j) \{(u_{j+1} - u_j)/c_j + (dw/dx)\} \times \delta \{(u_{j+1} - u_j)/c_j + (dw/dx)\} dx$$

部分積分を行うと

$$\sum_{i=1}^n E_i b t_i \left\{ (du_i/dx) \delta u_i \Big|_0^l - \int_0^l (d^2 u_i/dx^2) \delta u_i dx \right\} + \sum_{i=1}^n E_i I_i \left\{ (d^2 w/dx^2) \delta (dw/dx) \Big|_0^l - (d^3 w/dx^3) \delta w \Big|_0^l + \int_0^l (d^4 w/dx^4) \delta w dx \right\} + \sum_{j=1}^{n-1} (b G_j c_j^2 / h_j) \left\{ \int_0^l \{(u_{j+1} - u_j)/c_j + (dw/dx)\} \times \{(\delta u_{j+1} - \delta u_j)/c_j + (dw/dx)\} dx + \{(u_{j+1} - u_j)/c_j + (dw/dx)\} \delta w \Big|_0^l \right.$$

$$\left. - \int_0^l \{(du_{j+1}/dx - du_j/dx)/c_j + d^2 w/dx^2\} \delta w dx \right\} \quad (14)$$

式 (14) を左辺とする仮想仕事の原理の表示式が、仮想変位 $\delta w, \delta u_i (i=1, 2, \dots, n)$ の任意の値に対して成立しなければならないことから、次の平衡方程式と境界条件が求められる。

$$\rho_w b (d^2 w/dt^2) + \left(\sum_{i=1}^n E_i I_i \right) (d^4 w/dx^4) - \sum_{j=1}^{n-1} (b G_j c_j^2 / h_j) \times \{(du_{j+1}/dx - du_j/dx)/c_j + d^2 w/dx^2\} = q(x) \quad (15)$$

$$\rho_{s1} t_1 (d^2 u_1/dt^2) - E_1 t_1 (d^2 u_1/dx^2) - (G_1 c_1 / h_1) (dw/dx) - (G_1 / h_1) (u_2 - u_1) = 0 \quad (i=1, \text{表面材}) \quad (16)$$

$$\rho_{si} t_i (d^2 u_i/dt^2) - E_i t_i (d^2 u_i/dx^2) + (G_{i-1} c_{i-1} / h_{i-1} - G_i c_i / h_i) (dw/dx) - G_{i-1} u_{i-1} / h_{i-1} + (G_{i-1} / h_{i-1} + G_i / h_i) u_i - G_i u_{i+1} / h_i = 0 \quad (i=2, \dots, n-1, \text{層間強化材}) \quad (17)$$

$$\rho_{sn} t_n (d^2 u_n/dt^2) - E_n t_n (d^2 u_n/dx^2) + (G_{n-1} c_{n-1} / h_{n-1}) (dw/dx) + (G_{n-1} / h_{n-1}) (u_n - u_{n-1}) = 0 \quad (i=n, \text{表面材}) \quad (18)$$

は同じく z 方向の単位幅当りの軸荷重およびせん断力を表す。

d) 要素剛性マトリックス 要素剛性マトリックスは次のように与えられる。

$$[K]^e = b \int_0^l [B]^T [D] [B] dx dz$$

$$= b [l ([B_1]^T [D] [B_1]) + (l^2/2) ([B_1]^T [D] [B_2] + [B_2]^T [D] [B_1]) + (l^3/3) ([B_1]^T [D] [B_3] + [B_2]^T [D] [B_2] + [B_3]^T [D] [B_1]) + (l^4/4) ([B_2]^T [D] [B_3] + [B_3]^T [D] [B_2]) + (l^5/5) ([B_3]^T [D] [B_3])]$$
 (36)

e) 要素質量マトリックス ここでは分布質量による解析を行なう場合について述べると、式 (26) によって定義されたマトリックス $[N]$ と、次のように定義される質量マトリックス $[\rho]$

$$[\rho] = \begin{bmatrix} \rho_w \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_i \rho_n \end{bmatrix}$$
 (37)

ただし

$$\rho_w = b \sum_{i=1}^n \rho_{s1} t_i + b \sum_{j=1}^{n-1} \rho_{c1} h_j$$

$$\rho_1 = (\rho_{s1} t_1 + \rho_{c1} h_1 / 2) b$$

$$\rho_i = (\rho_{si} t_i + \rho_{c(i-1)} h_{i-1} + \rho_{ci} h_i / 2) b$$

$$\rho_n = (\rho_{sn} t_n + \rho_{c(n-1)} h_{n-1} / 2) b$$
 (38)

を用いて、要素質量マトリックスを次のように求めることができる。

$$[m]^e = \int_0^l [N]^T [\rho] [N] dx$$
 (39)

f) 節点力 節点力ベクトルは、式 (23) で定義される節点変位ベクトル $\{X\}^e$ に対応して、次のように定義することができる。

$$\{F\}^e = [S_1 M_1 T_{11} \dots T_{n1} : S_2 M_2 T_{12} \dots T_{n2}]^T$$
 (40)

以上の結果、要素の運動方程式は次のように表示されることになる。

$$[m]^e \{\ddot{X}\}^e + [K]^e \{X\}^e = \{F\}^e$$
 (41)

要素剛性方程式を組立てて得られる構造全体の運動方程式は

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{R\}$$
 (42)

式 (42) を増分表示すれば

$$[M] \{\Delta \ddot{U}\} + [K] \{\Delta U\} = \{\Delta R\}$$
 (43)

式 (43) を Newmark- β 法を用いて解いた。

4. 計算例題

両端固定のサンドイッチはりにステップ状の荷重を負荷した場合の動的応答を解析した。要素数 5, 節点数 6 の分割とし、分布質量マトリックスを用いた場合について時間間隔は $\Delta T = 100 \mu\text{sec}$, $\beta = 1/4$ として計算を行った。図 4 は、はりの中央の変位応答を示し、図中の w_s は次式より^{6,7)} 計算した静的変位の値を表す。

$$w_s = Pl^3 / (192DI) + Pl / (4Gbt)$$
 (44)

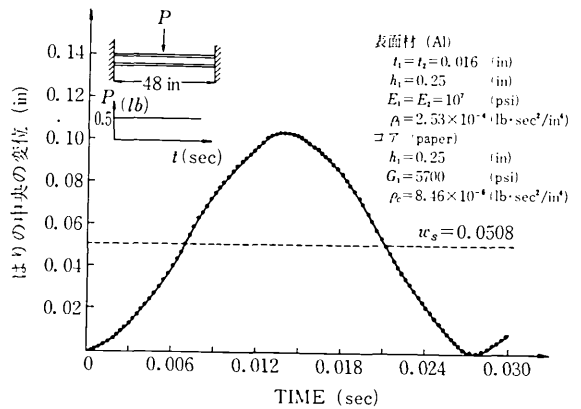


Fig. 4 サンドイッチはりの変位応答

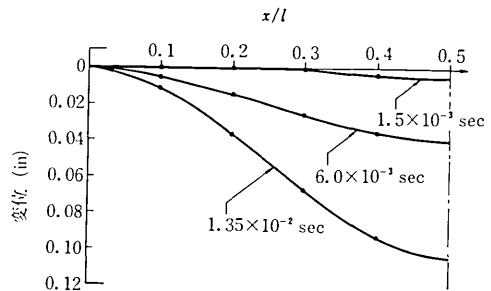


Fig. 5 サンドイッチはりのたわみ形状

ここで $D = E_1 t_1 (h_1 + t_1)^2 b / 2 + E_1 t_1^3 b / 6$ (45)

図 5 ははりのたわみ形状を対称性から左半分の部分について示している。

以上本報告の定式化により、多層のコアを有するサンドイッチはりの動的応答のシミュレーション解析が可能となった。今後の課題としては、最近注目を集めている粘弾性コアを有するサンドイッチはりについて、その減衰特性の解析を可能とするために、解析法やプログラムの開発を進めていく計画である。(1979年1月18日受理)

参考文献

- 1) N. J. Hoff and S. E. Mautner, J. Aeronautical Science, Vol. 15, No. 12, pp 707-720, 1948
- 2) J. F. Abel and E. P. Popov, Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Meth., Wright-Patterson A. F. Base, Ohio, pp 213-245, 1969
- 3) J. S. Kao and R. J. Ross, AIAA J. Vol. 6, No. 8, pp 1583-1585, 1968
- 4) T. P. Khatua and Y. K. Cheung, Int. J. num. Meth. Engng, Vol. 6, pp 11-24, 1973
- 5) J. S. シュムニスキー著, マトリックス構造解析の基礎理論, 邦訳 培風館 1968
- 6) 林毅福, 複合材料工学, 日科技連, pp 565-571, 1975
- 7) 島村昭治, 宮入裕夫, サンドイッチ構造, 日刊工業新聞社, 1974