研 究 速 報

UDC 624.074.4
512.83

円筒殻の解析のための新しい離散化モデル（その3）

New Discrete Elements for Circular Cylindrical Shells (3rd report)

都 井　裕*・川 井 忠 彦*
Yutaka TOI and Tadahiko KAWAI

序

円筒殻の解析のための新しい離散化モデル（曲面帯板要素）を提案する．

これは，前報[1]で提案したリング要素と同様の手順により導かれる，1節線($3\times m$)自由度(mは軸方向のFourier 展開項数）の曲面帯板要素であり，剛性マトリックスが非常に簡略である．

数値計算例として，自由を受ける円筒屋根の解析を行なう．

2. 新しい曲面帯板要素

要素および要素座標を，Fig. 1 に示す．

シェル理論として，Koiter の理論[2]を用いれば，ひずみ - 変位関係式は，

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \partial u/\partial x\\
\varepsilon_y &= \partial v/\partial y + w/R\\
\varepsilon_{xy} &= \partial v/\partial x + \partial u/\partial y\\
\kappa_x &= \partial^2 w/\partial x^2\\
\kappa_y &= \partial^2 w/\partial y^2 - (\partial v/\partial y)/R\\
\kappa_{xy} &= \partial^2 w/\partial x\partial y + (\partial u/\partial y)/4R\\
&\quad - 3(\partial v/\partial x)/4R
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

と表される．

境界条件を両端単純支持とすれば，要素内変位は，次式のように仮定できる．

$$\left.\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{n=1}^{m} u_n(y)\cos k_n x\\
v(x,y) &= \sum_{n=1}^{m} v_n(y)\sin k_n x\\
w(x,y) &= \sum_{n=1}^{m} w_n(y)\sin k_n x
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

ここに，

$$k_n = n\pi/L$$

である．$u_n(y)$, $v_n(y)$ および $w_n(y)$ は，それぞれ，要素内線形と仮定する．すなわち，

* 東京大学生産技術研究所　第2部

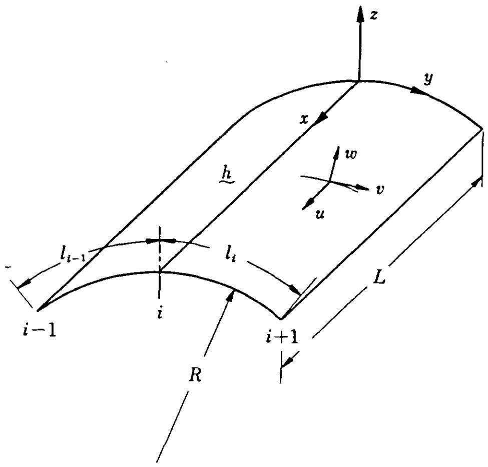


Fig. 1 Typical curved finite strip for a circular cylindrical shell

$$\left.\begin{aligned}
u_n(y) &= u_n^i + y(u_n^{i+1} - u_n^i)/l_i\\
v_n(y) &= v_n^i + y(v_n^{i+1} - v_n^i)/l_i\\
w_n(y) &= w_n^i + y(w_n^{i+1} - w_n^i)/l_i
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

ここで，次の対角マトリックスを定義しておく．

$$\left.\begin{aligned}
[t_d] &= \lfloor \cos k_n x\ \sin k_n x\ \sin k_n x \rfloor [I_3]\\
[t_s] &= \lfloor \sin k_n x\ \sin k_n x\ \cos k_n x \rfloor [I_3]
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

ここに，$[I_3]$ は3次の単位マトリックスである．

節線変位ベクトルと節線力ベクトルを，次のように定義する．

$$\left.\begin{aligned}
&\{d_p\} = \begin{Bmatrix} d^i \\ \hdashline d^{i+1}\end{Bmatrix} \qquad \{f_p\} = \begin{Bmatrix} f^i \\ \hdashline f^{i+1}\end{Bmatrix}\\
&\{d_b\} = \begin{Bmatrix} d^{i-1} \\ \hdashline d^i \\ \hdashline d^{i+1}\end{Bmatrix} \qquad \{f_b\} = \begin{Bmatrix} f^{i-1} \\ \hdashline f^i \\ \hdashline f^{i+1}\end{Bmatrix}\\
&\{d^i\}^t = \{d_n^i\}[t_d] = \lfloor u_n^i\ v_n^i\ w_n^i \rfloor [t_d]\\
&\{f^i\}^t = \{f_n^i\}[t_d] = \lfloor X_n^i\ Y_n^i\ Z_n^i \rfloor [t_d]
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

(2), (3)式を用いて，(1)式における各ひずみ成分を近似する際，面内ひずみ成分は要素内で，また，曲率変化成分は節線上で評価する．すなわち，面内ひずみベクトル

$$\{\varepsilon_p\}^t = \{\varepsilon_{pn}\}^t [t_s] = \lfloor \varepsilon_{xn}\ \varepsilon_{yn}\ \varepsilon_{xyn} \rfloor [t_s] \quad \cdots\cdots(6)$$

において,

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{xn}=-k_n(u_n^i+u_n^{i+1})/2 \\ \varepsilon_{yn}=(v_n^{i+1}-v_n^i)\ /l_i+(w_n^i+w_n^{i+1})/2R \\ \varepsilon_{xyn}=k_n(v_n^i+v_n^{i+1})/2+(u_n^{i+1}-u_n^i)/l_i \end{array}\right\}\cdots\cdots(7)$$

また, 曲率変化成分ベクトル

$$\{\varepsilon_b\}^t=\{\varepsilon_{bn}\}^t[t_s]=\lfloor\kappa_{xn}\ \kappa_{yn}\ \kappa_{xyn}\rfloor[t_s] \qquad \cdots\cdots(8)$$

において,

$$\left.\begin{array}{l} \kappa_{xn}=-k_n^2 w_n^i \\ \kappa_{yn}=2\{w_n^{i-1}/l_{i-1}-(1/l_{i-1}+1/l_i)w_n^i \\ \qquad +w_n^{i+1}/l_i\}/(l_{i-1}+l_i) \\ \qquad -(v_n^{i+1}-v_n^{i-1})/R(l_{i-1}+l_i) \\ \kappa_{xyn}=k_n(w_n^{i+1}-w_n^{i-1})/(l_{i-1}+l_i)+(u_n^{i+1}-u_n^{i-1}) \\ \qquad /4R(l_{i-1}+l_i)-3k_n v_n^i/4R \end{array}\right\}\cdots\cdots(9)$$

と評価する. (7)式において, y に関する微分を含まない項の評価には部分近似を, また(9)式の各項の評価には差分近似を用いているが, これは, すでに提案した円形アーチおよび球殻の解析のための曲線要素[3),4)]を導く方法と同様である. (7)式および(9)式は, それぞれ次のようにマトリックス表示できる.

$$\{\varepsilon_{pn}\}=[B_p]\{d_{pn}\} \qquad \cdots\cdots(10)$$

$$\{\varepsilon_{bn}\}=[B_b]\{d_{bn}\} \qquad \cdots\cdots(11)$$

応力-ひずみ関係式を, 応力ベクトルの定義とともに以下に示す.

$$\left.\begin{array}{l} \{\sigma_p\}^t=\{\sigma_{pn}\}^t[t_s]=\lfloor N_{xn}\ N_{yn}\ N_{xyn}\rfloor[t_s] \\ \{\sigma_{pn}\}=[D_p^e]\{\varepsilon_{pn}\} \\ [D_b^e]=\dfrac{Eh^2}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \end{array}\right\}\cdots\cdots(12)$$

$$\left.\begin{array}{l} \{\sigma_b\}^t=\{\sigma_{bn}\}^t[t_s]=\lfloor M_{xy}\ M_{yn}\ M_{xyn}\rfloor[t_s] \\ \{\sigma_{bn}\}=[D_b^e]\{\varepsilon_{bn}\} \\ [D_b^e]=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \end{array}\right\}\cdots\cdots(13)$$

さて, 面内, 面外ひずみに関する仮想仕事式は, それぞれ,

$$\int_0^{l_i}\int_0^L\{\varepsilon_p\}^t\{\sigma_p\}\,dx\,dy=\int_0^L\{d_p\}^t\{f_p\}\,dx \qquad \cdots\cdots(14)$$

$$\int_{-l_{i-1}/2}^{l_i/2}\int_0^L\{\varepsilon_b\}^t\{\sigma_b\}\,dx\,dy=\int_0^L\{d_b\}^t\{f_b\}dx\cdots(15)$$

と表せる. (14), (15)式に, すでに示した諸式を代入すれば, 次の要素剛性方程式を得る.

$$\left\{\begin{array}{ll} [k_p]\{d_{pn}\}=L/2\cdot\{f_{pn}\} & \cdots\cdots\cdots\cdots(16) \\ [k_p]=L/2\cdot l_i[B_p]^t[D_p^e][B_p] & \cdots\cdots\cdots(17) \end{array}\right.$$

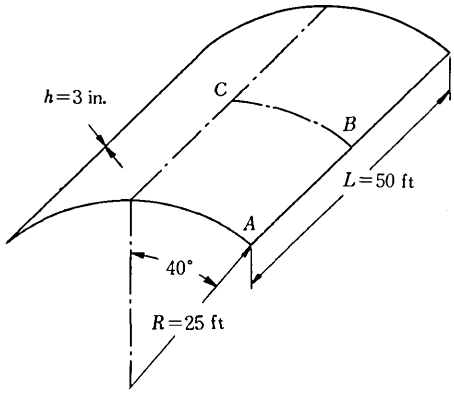
$$\left\{\begin{array}{ll} [k_b]\{d_{bn}\}=L/2\cdot\{f_{bn}\} & \cdots\cdots\cdots\cdots(18) \\ [k_b]=L/2\cdot(l_{i-1}+l_i)/2\cdot[B_b]^t[D_b^e][B_b] & \cdots(19) \end{array}\right.$$

(17), (19)式の各剛性マトリックスは, いずれも陽な形で与えられており, それぞれ, (6×6) および (9×9)である.

Dawe は, 文献 5)において, $u_n(y)$には 3 次, $v_n(y)$と $w_n(y)$には 5 次の多項式を用いた, 16 自由度の曲面帯板要素を提案し, 数値計算例により, 少ない自由度で良好な解を与えることを示しているが, 本離散化モデルは, Dawe の要素に比べ, はるかに簡単な剛性マトリックスを用いて, 同等の精度を確保することを目的に導かれたものである.

3. 数値解析例

Fig. 2 に示す, 自重を受ける浅い円筒屋根の解析を, 本離散化モデルを用いて行なった. 問題の対称性より, Fourier 展開項は奇数次の項のみ用いればよく, また, y 方向には 1/2 解析とする



$E=3\times10^6$ lb/in², $\nu=0$
Weight=90 lb/ft²

Fig. 2 Shallow cylindrical shell roof loaded by its own weight.

数値解の収束の様子を Table 1 に示す. 総自由度で比較した場合, 本離散化モデルは, Dawe の曲面帯板要素と同程度の精度を有する (文献 5)の Table 1 を参照されたい). Fig. 3 には, たわみと応力分布を理論解[6)]と比較して示す. 8 要素・2 項程度で, 充分に良好な解を得られることがわかる.

Fig. 2 の円筒屋根において, 開き角 = 180°, h = 25/320ft, ν=0.3 とした, 深い円筒屋根に対する解析結果を Table 2 および Fig. 4 に示す. Dawe による解[5)]との比較により, 良好な解を得ていることがわかる (Dawe の要素による解の詳細は, 文献 5)の Table 2 にある).

4. 結　　論

円筒殻の解析のための新しい離散化モデルを提案した. その特長は,

Table 1 Convergence for a shallow cylindrical shell roof

No,of strips	No, of odd-series teries	100 u_A (ft)	$-10 w_B$ (ft)	100 v_B (ft)	10^{-1} $(N_x)_B$ (kip/ft)	$(M_y)_C$ (kip ft/ft)
4	1	1.156	3.398	7.125	3.596	2.241
	2	1.192	3.327	7.006	3.374	2.242
	5	1.200	3.335	7.019	3.412	2.236
	10	1.201	3.335	7.018	3.410	2.237
8	1	1.189	3.394	7.264	5.367	2.103
	2	1.224	3.321	7.149	4.991	2.115
	5	1.232	3.330	7.161	5.063	2.112
	10	1.232	3.330	7.161	5.058	2.112
12	1	1.194	3.388	7.279	6.158	2.072
	2	1.229	3.316	7.164	5.700	2.085
	5	1.237	3.325	7.176	5.791	2.082
	10	1.237	3.325	7.176	5.785	2.082
16	1	1.196	3.386	7.283	6.599	2.061
	2	1.230	3.314	7.168	6.090	2.074
	5	1.239	3.323	7.181	6.194	2.071
	10	1.239	3.323	7.181	6.187	2.071
20	1	1.196	3.385	7.285	6.879	2.056
	2	1.231	3.313	7.171	6.337	2.068
	5	1.239	3.322	7.183	6.449	2.066
	10	1.240	3.322	7.183	6.441	2.066
30	10	1.241	3.320	7.185	6.797	2.061
Shallow solution[6]		1.261	3.416	7.301	7.695	2.056
Finite strip solution[5]		1.241	3.321	7.188	7.566	2.063

Table 2 Convergence for a deep cylindrical shell roof

No, of strips	No, of odd-series teries	100 u_A (ft)	$-10w_B$ (ft)	100v_B (ft)	10^{-1} $(N_x)_B$ (kip/ft)	100$(M_x)_B$ (kip ft/ft)
4	1	1.573	0.790	0.681	1.027	0.454
	2	1.584	0.984	0.688	0.988	1.752
	5	1.585	0.961	0.687	0.995	1.359
	10	1.585	0.961	0.687	0.994	1.384
8	1	1.853	4.698	1.038	1.832	3.163
	2	1.889	4.664	1.028	1.757	2.940
	5	1.893	4.664	1.029	1.771	2.944
	10	1.893	4.664	1.029	1.770	2.944
12	1	1.911	5.283	1.102	2.345	3.533
	2	1.948	5.213	1.091	2.242	3.069
	5	1.956	5.219	1.092	2.261	3.171
	10	1.957	5.218	1.092	2.259	3.158
16	1	1.930	5.464	1.122	2.682	3.638
	2	1.968	5.382	1.110	2.557	3.096
	5	1.976	5.390	1.111	2.580	3.235
	10	1.977	5.390	1.111	2.578	3.215
20	1	1.939	5.543	1.131	2.915	3.680
	2	1.977	5.456	1.119	2.773	3.104
	5	1.985	5.465	1.120	2.800	3.260
	10	1.986	5.465	1.120	2.798	3.237
24	1	1.943	5.586	1.136	3.085	3.701
	2	1.982	5.496	1.123	2.931	3.106
	5	1.990	5.505	1.124	2.960	3.272
	10	1.991	5.505	1.124	2.958	3.247
30	10	1.995	5.537	1.128	3.129	3.253
Finite strip solution[5]		2.002	5.592	1.134	3.939	3.385

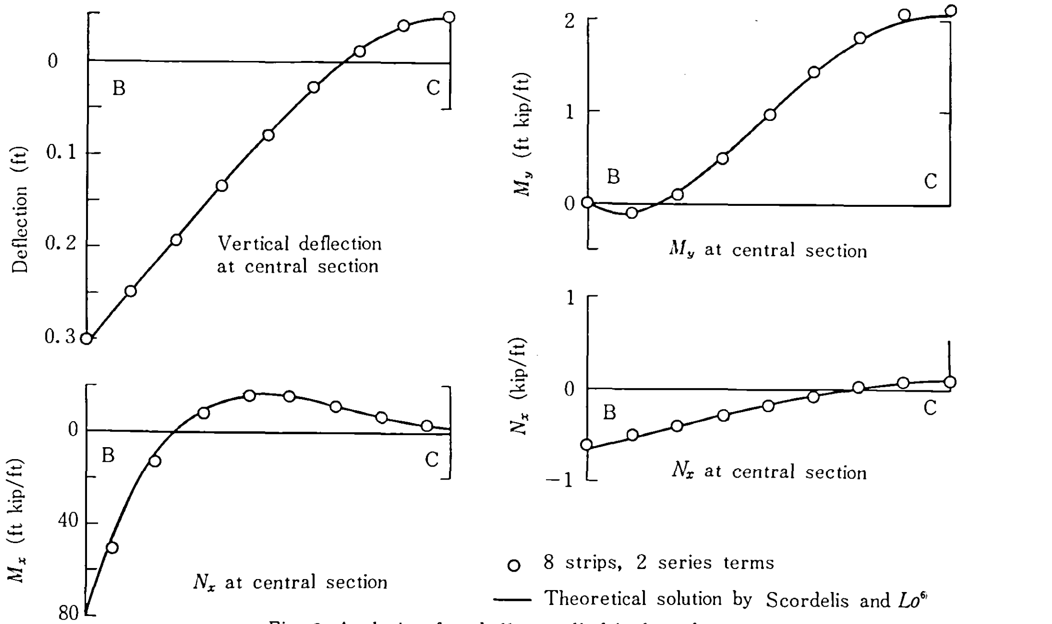


Fig. 3 Analysis of a shallow cylindrical roof.

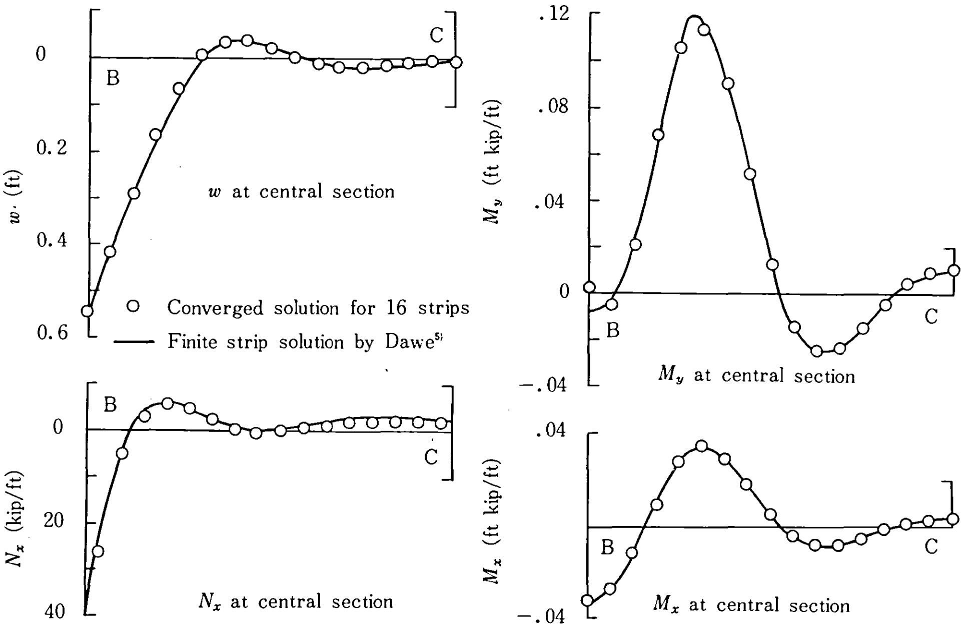


Fig. 4 Analysis of a deep cylindrical roof.

(1)差分法を併用した1節線(3×m)自由度の曲面帯板要素である.

(2)剛性マトリックスが非常に簡略であり，総自由度で比較した場合，精度も良好である.

(1978年7月21日受理)

参 考 文 献

1) 都井・川井，生産研究，第30巻，第8号(1978) 16
2) W. T. Koiter, A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells, Theory of Thin Elastic Shells, North-Holland (1960)
3) 都井・川井，生産研究，第30巻，第7号 (1978) 24
4) 都井・川井，生産研究，第30巻，第8号 (1978) 20
5) D. J. Dawe, Static analysis of diaphram-supported cylindrical shells using a curved finite strip, Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 11 (1977) 1347
6) A. C. Scordelis and K. S. Lo, Computer analysis of cylindrical shells, J. Am. Concrete Inst., 61 (1964) 539