

面内二軸荷重下の疲労き裂成長の破壊力学的研究 (第2報)

— 十字形試験片中のき裂の応力拡大係数の解析 —

Fracture Mechanics Approach to the Fatigue Crack Growth under Inplane Biaxial Loads (The Second Report)

— Analysis of Stress Intensity Factors for a Crack in the Cruciform Specimen —

北川 英夫*・結城 良治*・東郷 敬一郎*

Hideo KITAGAWA, Ryoji YUUKI and Keiichiro TOHGO

1. まえがき

応力拡大係数 K はき裂先端の応力の特異性の強さを表す破壊力学の重要なパラメータであり、負荷方式・試験片形状・き裂形状の関数として、き裂を含む弾性体の弾性解析により求められる。中央き裂入り帯板やCT試験片など通常良く用いられている単軸荷重方式の試験片については各種の方法で詳細な K の解析が行われている。

¹⁾しかし二軸荷重下の疲労実験に用いる特殊な形状の試験片については、 K の解析例が見当たらず、本研究の目的とする二軸荷重下の疲労き裂成長挙動の定量的評価および単軸荷重下の疲労き裂成長挙動との比較・検討のためには、まずこの試験片の有限形状の影響を含む時々刻々成長するき裂の K の精度の良い解析が必要である。

二軸荷重下の疲労き裂成長に関する本研究に当たり、まず前報²⁾で述べたように高性能の高サイクル二軸荷重疲労試験機の開発を行ったが、これと併行して二次元問題として取扱え、 K の解析が比較的容易となるように考慮した面内二軸荷重を負荷する平板十字形試験片を設計し、この試験片中の貫通直線き裂の K を等角写像法と組み合わせた選点法により解析した。以下にこの K の解析方法の概要と解析結果について述べる。二軸荷重下の疲労き裂成長の実験結果およびその実験結果を本解析で得られた K の解析結果を用いて整理した二軸荷重下の疲労き裂成長特性については次報に報告する予定である。

2. 解析法の概要と問題点

面内二軸荷重を負荷する試験片の解析モデルとして、図1に示すような十字形試験片を設定し、その各軸の端面に一樣応力が働く場合の試験片中央の直線き裂の K の解析を行う。本問題の解析にあたり、従来有限板中の直線き裂の K の解析に成功裏に適用され、計算が比較的簡便で解の精度が良いとされている選点法を拡張し適用した。選点法とは、き裂縁の境界条件を厳密に満たす応力関数を用い、き裂から離れた外周の境界を分割し、各分割点または区間での境界条件を合わせることで、応力関数に含まれる未知係数を定め、 K を求める K の解析

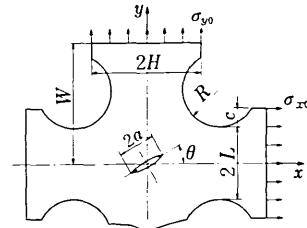


図1 十字形試験片中のき裂 (本解析モデル)

的解法の一つである。この選点法に使用する応力関数としては、各種の応力関数も考えられるが、直線き裂だけでなく今後各種の形状のき裂をこの試験片につき解析する必要もあるかと考えられ、その際にも容易に拡張適用できるように考慮し、本解析では等角写像関数を利用した応力関数を用いた。この等角写像法と組み合わせた選点法 (Modified Mapping Collocation Method) は有限板中の内部直線き裂の K の解析法として Bowie³⁾、⁴⁾により提案された解法であり、著者らはこの解法を直線き裂だけでなく各種の複雑な形状のき裂を有限板中につき解析できるように拡張したものである。^{5), 6)}

長方形板・円板などの単純形状の試験片中のき裂の解析に成功裏に適用できたこの選点法を、図1に示すような複雑な形状の試験片中のき裂の解析に適用するに当たり、そのままでは適用できず、十字形試験片の円弧部の境界条件をうまく合わせるための新たな応力関数の導入などの改良・工夫が必要であった。

3. 解析方法

3.1 基礎式 き裂の解析に際し、等角写像関数を利用しき裂を単位円周上に写像して解析を行う等角写像法は K の解析における有力な解法の一つである。^{7), 8)}以下に等角写像法を用いて解析を進める際に必要な弾性基礎式について概説する。 $Z (= x + iy)$ 平面上の長さ $2a$ の直線き裂を $\zeta (= \xi + i\eta)$ 平面上の単位円周上に写像する写像関数 $\omega(\zeta)$ は次式で与えられる

$$Z = \omega(\zeta) = \frac{a}{2} (\zeta + 1/\zeta) \quad (1)$$

本解析では Airy の応力関数 $U(x, y)$ と次式で関係づけられる複素応力関数 $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$ を用いる⁹⁾

*東京大学生産技術研究所 第1部

研究速報

$$U(x, y) = R_e \{ \overline{\omega(\zeta)} \phi(\zeta) + \int^{\zeta} \psi(\zeta) \omega'(\zeta) d\zeta \} \quad (2)$$

ただし、(2)式の R_e は複素数の実数部を、 $\bar{\cdot}$ は共役を、 ζ に関する微分をそれぞれ表すものとする。この応力関数を用いて、応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 、合力成分 P_x, P_y 、変位成分 u, v は次式で与えられる。⁹⁾

$$\sigma_x + \sigma_y = 4R_e \{ \phi'(\zeta) / \omega'(\zeta) \} \quad (3)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \{ \overline{\omega(\zeta)} \{ \phi'(\zeta) / \omega'(\zeta) \}' + \psi'(\zeta) \} / \omega'(\zeta) \quad (4)$$

$$-P_y + iP_x = \partial U / \partial x + i \partial U / \partial y = \phi(\zeta) + \omega(\zeta) \phi'(\zeta) / \omega'(\zeta) + \psi(\zeta) \quad (5)$$

$$u + iv = \{ \kappa \phi(\zeta) - \overline{\omega(\zeta)} \phi'(\zeta) / \omega'(\zeta) - \overline{\psi(\zeta)} \} / 2G \quad (6)$$

$\kappa = 3 - 4\nu$ (平面ひずみ), $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ (平面応力)

ここで G はせん断弾性係数、 ν はポアソン比である。

3.2 応力関数の定義 図1の十字形試験片は、円弧の部分に応力集中が生じ、解析に際してはその円弧部の境界条件を合わせやすいように工夫する必要がある。本解析では従来長方形板・円板などの単純形状の試験片の解析に使用されてきた応力関数に加え、特に四つの円弧部の境界条件を精度良く合わせるための新たな応力関数を導入した。前者を $\phi_0(\zeta)$ とし、後者を $\phi_1(\zeta)$ として両者の和として応力関数 $\phi(\zeta)$ を次式のごとく定義した。

$$\phi(\zeta) = \phi_0(\zeta) + \phi_1(\zeta) \quad (7)$$

$$\phi_0(\zeta) = \sum_{n=-M}^{M_1} \alpha_n \zeta^{1+2n} \quad (8)$$

$$\phi_1(\zeta) = \sum_{n=1}^{N_2} \left\{ \frac{\beta_{1n} \zeta}{(\zeta^2 - \zeta_{10}^2)^n} + \frac{r_{1n} \zeta}{(\zeta^2 - 1/\zeta_{10}^2)^n} + \frac{\beta_{2n} \zeta}{(\zeta^2 - \zeta_{20}^2)^n} + \frac{r_{2n} \zeta}{(\zeta^2 - 1/\zeta_{20}^2)^n} \right\} \quad (9)$$

(9)式の ζ_{10}, ζ_{20} は図1の円弧部の曲率中心に対応する ζ の平面上の点であり、 $1/\zeta_{10}, 1/\zeta_{20}$ はその点の単位円に関する鏡像点である。(図2参照) (9)式の応力関数はき裂のまわりに点対称に配置された四つの円孔の問題(その写像面上での図形を図2示す)の解析に用いる応力関数であり、この応力関数 $\phi_1(\zeta)$ ともう一つの応力関数 $\phi_0(\zeta)$ の和である(7)式の応力関数 $\phi(\zeta)$ を使うことにより、円弧部と他の境界の境界条件を同時にうまく合わせることができるように工夫した。(8)式および(9)式中の $\alpha_n, \beta_{1n}, \beta_{2n}, r_{1n}, r_{2n}$ は外周の境界条件により決まる応力関数の未知係数であり、一般に複素係数となる。ただしき裂が一荷重軸に平行な場合(図1で θ が0または 90°)は、 α_n は実係数となり、 $\beta_{2n} = \bar{\beta}_{1n}$, $r_{2n} = \bar{r}_{1n}$ および $\zeta_{20} = \bar{\zeta}_{10}$ の関係が成立し、(9)式は次式のごとく簡単な形となる。

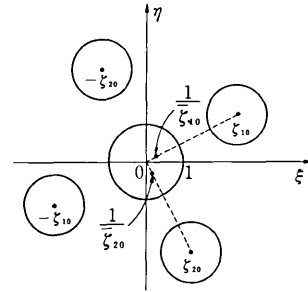


図2 平面上に写像されたき裂と4円孔

$$\phi_1(\zeta) = \sum_{n=1}^{N_2} \left\{ \frac{\beta_{1n} \zeta}{(\zeta^2 - \zeta_{10}^2)^n} + \frac{\bar{\beta}_{1n} \zeta}{(\zeta^2 - \bar{\zeta}_{10}^2)^n} + \frac{r_{1n} \zeta}{(\zeta^2 - 1/\zeta_{10}^2)^n} + \frac{\bar{r}_{1n} \zeta}{(\zeta^2 - 1/\bar{\zeta}_{10}^2)^n} \right\} \quad (10)$$

このように定義された応力関数 $\phi(\zeta)$ を使えば、もう一つの応力関数 $\psi(\zeta)$ はき裂縁自由条件および解析接続により、次式で与えられる。

$$\psi(\xi) = -\bar{\phi}(1/\xi) - \bar{\omega}(1/\xi) \phi'(\zeta) / \omega'(\zeta) \quad (11)$$

この応力関数 $\phi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ を使えば単位円周に対応するき裂縁自由条件および変位一価条件は自動的に満たされる。

3.3 外周境界の分割と写像 本解析法では、き裂を単位円上にまた外周を単位円の外側に写像し、写像面上で外周の境界条件を合わせる。そのために Z 平面上の外周をほぼ等間隔に分割し、各分割点を $Z_k (k=1 \sim N_i+1)$ とし、それに対応する ζ 平面上の点 ζ_k を(1)式を用いて求める。この外周の分割と写像の具体例として、 $\theta = 30^\circ, a/L = 0.5, N_i = 92$ の場合を図3に示す。図3はき裂が傾斜している場合の分割例であるため、上半面の外周を分割しているが、き裂が一荷重軸に平行な場合($\theta = 0$ または 90°)は外周の1/4半面だけを分割すれば良い。

3.4 応力関数の決定 このように分割、写像された外周上で境界条件を合わせ応力関数を決定する。外周の境界条件の合わせ方として、各分割区間の合力成分を合わせる方法を用いる。⁵⁾ 分割区間 $\zeta_k \sim \zeta_{k+1}$ における合力成分は、(5)式および(11)式より次式となる。

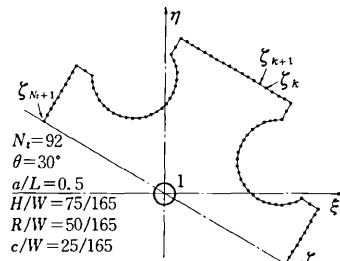


図3 外周の分割と写像の一例

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right]_k^{k+1} = \left[\phi(\zeta) - \phi(1/\bar{\zeta}) + \frac{\omega(\zeta) - \omega(1/\bar{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \phi'(\zeta) \right]_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \quad (12)$$

上式に(7),(8),(9)式で定義された応力関数 $\phi(\zeta)$ および各分割点の ζ_{k+1} および ζ_k の値を代入し、各分割区間ごとに合力の境界条件を与えることにより、応力関数の未知係数 $\alpha_n, \beta_n, \beta_{2n}, \gamma_n, \gamma_{2n}$ に関する連立一次方程式を作成する。本解析では複雑な試験片形状を考慮し、未知係数の数より分割数を多くとり、最小自乗法を用いて方程式を解いた。連立方程式の解法には、適当なスケールを行った後ガウスの消去法を用いた。このようにして応力関数 $\phi(\zeta)$ が求められれば、(11)式より $\psi(\zeta)$ も求まり、したがって、(3),(4)式より応力分布、(6)式より変位分布も計算できる。得られた応力関数を(3),(4)式に代入し、選点法により近似的に合わせた外周の境界条件の充足度を調べた1例を図4に示す。図4から外周に垂直な応力成分は与えた境界条件とAB($\sigma_y/\sigma_{y0}=1$), CD($\sigma_r/\sigma_{y0}=0$)の両区間とも多少の分布があるもののほぼ一致していることが分かる。

3.5 応力拡大係数の決定 応力関数 $\phi(\zeta)$ が求められれば、開口形(モードI)および面内せん断形(モードII)のき裂変形様式に対応する応力拡大係数 K_I, K_{II} は次式で求められる。

$$K_I - i K_{II} = 2\pi^{1/2} \phi'(1) / [\omega'(1)]^{1/2} \quad (13)$$

上式の $\phi'(1), \omega'(1)$ はそれぞれき裂先端 ($\zeta=1$) での応力関数の1階微分値および写像関数の2階微分値である。計算により得られた K 値は次式に示すように無次元化して修正係数 F_I, F_{II} で表した。

$$F_{I,x} = K_I / \sigma_{y0} \sqrt{\pi a}, \quad F_{II,x} = K_{II} / \sigma_{y0} \sqrt{\pi a} \quad (14)$$

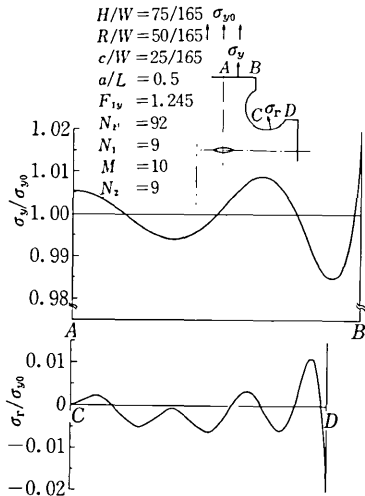


図4 外周上の境界条件の充足度

$$F_{I,y} = K_I / \sigma_{y0} \sqrt{\pi a}, \quad F_{II,y} = K_{II} / \sigma_{y0} \sqrt{\pi a} \quad (15)$$

上式の σ_{x0}, σ_{y0} は図1に示すようにそれぞれ x 軸および y 軸方向に単独に負荷した試験片端面での一様引張力であり、 $F_{I,x}, F_{II,x}$ および $F_{I,y}, F_{II,y}$ はそれに対応する応力拡大係数であり、任意の二軸荷重条件下の K は(14)式および(15)式の修正係数を用い、重ね合わせにより計算できる。

4. 数値結果と考察

本解析法に基づき、図1の十字形試験片中の直線き裂の K を解析し、数値結果を以下に示す。本解析法では、外周の分割数 N_I 、応力関数の項数 M, M, N_2 の選び方により若干解が変化し、それらある程度以上にとると解が収束する。その具体例として、 N_I, N_1, M を一定とし、 N_2 だけを変化させた場合の解の収束状況を表1に示す。表1から N_2 が8以上で解がほぼ収束していることがわかる。同様に N_I, N_1, M を変化させ、解の収束性を調べ解が収束していると思われる条件 ($N_I=92, N_1=9, M=10, N_2=9$ 程度) ですべての解析を行い、解を求めた。

まず、き裂が一荷重軸に平行 ($\theta=0$) な場合について解析した。この場合 K_I のみが生じ、 K_{II} は0となる。本実験に使用する十字型試験片 ($H/W=75/165, R/W=50/165, C/W=25/165$) 中のき裂の K の修正係数 $F_{I,y}, F_{I,x}$ の解析結果を図5に示す。また本解析法による解の正否を検討するため、同一形状試験片を二次の8節点アイソパラメトリック要素を用いた有限要素法 (FEM) で解析し、エネルギー法¹⁰⁾により $F_{I,y}, F_{I,x}$ を求め、図5に併記した。本解析法による解とFEMの解とは良く一致した。図5から、き裂に平行なる方向 (x 方向) に引張応力がかかる場合の $F_{I,x}$ が比較的大きな負の値となることがわかり、この傾向は十字形試験片の大きな特徴として注目される。図5の $F_{I,y}, F_{I,x}$ を多項式近似して式で示すと次式となる。

$$F_{I,y} = 1.1906 + 0.0076 (a/L) + 0.2051 (a/L)^2 - 0.0042 (a/L)^3 \quad (16)$$

$$F_{I,x} = -0.2589 + 0.0253 (a/L) - 0.0459 (a/L)^2 + 0.0665 (a/L)^3 \quad (17)$$

この多項式は、 $0.2 \leq a/L \leq 1.0$ の範囲でもとの数値結果と誤差0.1%以内である。また y 方向応力 σ_{y0}, x 方向応

表1 応力拡大係数の解の収束状況

Nt	N ₁	M	N ₂	$\theta = 0^\circ$		$\theta = 45^\circ$	
				F _{I,y}	F _{II,y}	F _{I,y}	F _{II,y}
92	9	10	5	1.24317	0.0	0.52246	0.74015
			6	1.24470	0.0	0.52372	0.74215
			7	1.24476	0.0	0.52443	0.74240
			8	1.24490	0.0	0.52482	0.74243
			9	1.24496	0.0	0.52490	0.74249
			10	1.24497	0.0	0.52473	0.74249

$H/W=75/165, R/W=50/165, c/W=25/165, a/L=0.5$

表2 各種十字形試験片中のき裂の応力拡大係数 ($\theta = 0$)

試験片の形状	$H/W=7/50$ $R/W=1/4$ $C/W=1/8$		$H/W=1/3$ $R/W=1/3$ $C/W=0$		$H/W=1/3$ $R/W=1/4$ $C/W=0$		$H/W=75/165$ $R/W=50/165$ $C/W=25/165$ (図5参照)	
	F_{1y}	F_{1x}	F_{1y}	F_{1x}	F_{1y}	F_{1x}	F_{1y}	F_{1x}
0.2	1.221	-0.270	0.792	-0.177	0.829	-0.176	1.20	-0.255
0.3	1.225	-0.270	0.799	-0.177	0.838	-0.175	1.212	-0.254
0.4	1.239	-0.269	0.809	-0.176	0.849	-0.174	1.226	-0.252
0.5	1.257	-0.268	0.822	-0.176	0.865	-0.172	1.245	-0.249
0.6	1.278	-0.266	0.837	-0.175	0.883	-0.170	1.268	-0.246
0.7	1.304	-0.263	0.856	-0.173	0.905	-0.167	1.295	-0.241
0.8	1.333	-0.259	0.877	-0.172	0.930	-0.163	1.326	-0.234
0.9	1.366	-0.254	0.902	-0.169	0.959	-0.159	1.361	-0.225
1.0	1.402	-0.247	0.929	-0.165	0.990	-0.153	1.399	-0.213

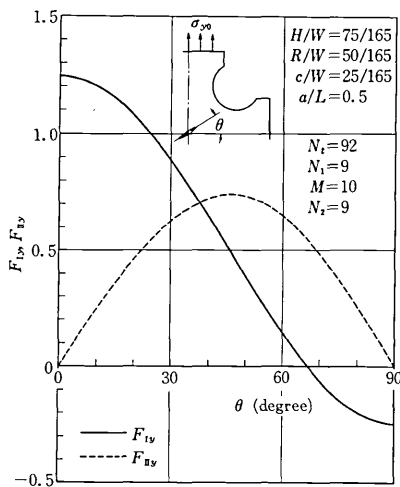


図5 十字形試験片中のき裂の応力拡大係数 ($\theta = 0$)

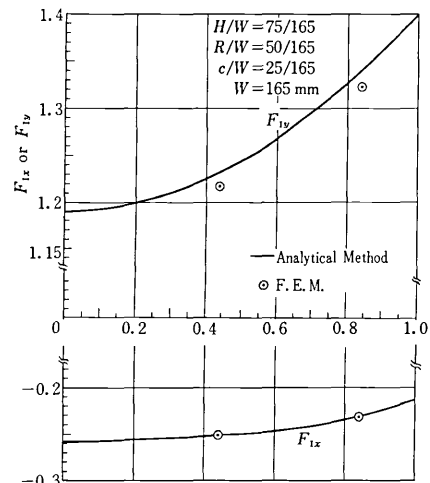


図6 十字形試験片中のき裂の応力拡大係数 ($\theta \neq 0$)

力 σ_{20} が負荷する任意の二軸荷重条件下の K は, (16), (17) 式の F_{1y}, F_{1x} を使って次式で計算できる.

$$K_I = \sigma_{y0} \sqrt{\pi a} F_{1y} + \sigma_{x0} \sqrt{\pi a} F_{1x} \quad (18)$$

参考のため本実験に使用する試験片を含め, 各種形状の十字形試験中のき裂の F_{1y}, F_{1x} の解析結果を表2に示す.

次にき裂が傾斜している場合についても解析した. この場合 K_I が共存する混合モードとなる. 解析結果の一例として, 本試験片中 $a/L=0.5$ とし, 傾斜角 θ が変化するき裂の K の修正係数 F_{1y}, F_{1x} の解析結果を図6に示す.

5. まとめ

二軸荷重下の疲労き裂成長の実験に先立ち, 実験に使用する十字形試験片中の貫通直線き裂の応力拡大係数の解析を行った. この解析に際し, 等角写像法と組み合わせた選点法を応用し, さらに十字形試験片の円弧部の境界条件を合わせるための新たな応力関数を導入することにより, 十字形試験片の外周の複雑な形状の影響を含む有限板中のき裂の応力拡大係数の精度の良い解が得られた.

(1978年8月4日受理)

参考文献

- 1) Sih, G. C.; "Handbook of Stress Intensity Factors" Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh Univ. (1973)
- 2) 北川, 川井, 岡村, 結城, 大平, 松原; 生産研究 30,9 (昭和53年), p. 348
- 3) Bowie, O. L. and Neal, D. M.; Int. J. of Fracture Mechanics, 6-2 (1970), p.199
- 4) Bowie, O. L. and Freese, C. E.; Int. J. of Fracture Mechanics, 8-1 (1973), p. 49
- 5) 北川, 結城; 日本機械学会論文集, 43-376 (昭和52年12月), p. 4354
- 6) 北川, 結城; 日本機械学会講演論文集, 780-3 (昭和53年4月) 164
- 7) 北川, 結城; 日本機械学会論文集, 41-346 (昭和50年6月), p. 1641
- 8) 北川, 結城; 日本機械学会講演論文集, 770-11 (昭和52年10月), p. 10
- 9) Muskhelishvili, N. I.; "Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity" (1953) Noordhoff
- 10) 宮本; 「破壊の力学」精密工学講座3, コロナ社 (昭和47年)