

# 円筒殻の解析のための新しい離散化モデル(その2)

New Discrete Elements for Circular Cylindrical Shells (2nd report)

都井 裕\*・川井 忠彦\*

Yutaka TOI and Tadahiko KAWAI

## 1. 序

円筒殻の解析のための新しい離散化モデル(リング要素)を提案する。

この新しい離散化モデルの特長は、剛性マトリックスが非常に簡略(陽な形で与えられる)であるにもかかわらず、精度がきわめて良好なことである。

二、三の数値計算例を示し、また、前報<sup>1)</sup>における軸対称解析用のモデルとの関連についても触れる。

## 2. 新しい離散化モデル

円筒殻の座標をFig. 1に示す。

ひずみ-変位関係式として、次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \partial u / \partial x \\ \varepsilon_\theta &= (\partial v / \partial \theta + w) / R \\ \varepsilon_{x\theta} &= (\partial u / \partial \theta) / R + \partial v / \partial x \\ \kappa_x &= -\partial^2 w / \partial x^2 \\ \kappa_y &= (\partial v / \partial \theta - \partial^2 w / \partial \theta^2) / R \\ \kappa_{xy} &= 2(\partial v / \partial x - \partial^2 w / \partial x \partial \theta) / R \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

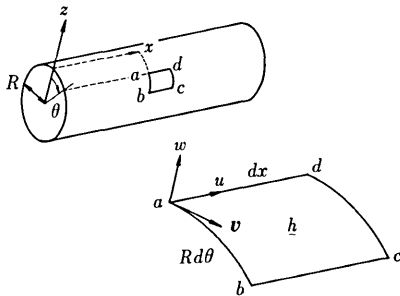


Fig. 1 Coordinate system of a circular cylindrical shell

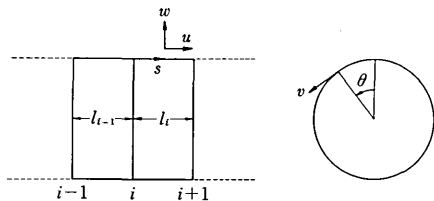


Fig. 2 Typical element of a circular cylindrical shell

\* 東京大学生産技術研究所 第2部

(1)式は、円筒殻の有限要素解析において、一般に用いられている。

要素座標をFig. 2に示す。要素内変位として、次式を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u(s, \theta) &= u_0 + \sum_{n=1}^m u_n(s) \cos n\theta + \sum_{n=1}^m \bar{u}_n(s) \sin n\theta \\ v(s, \theta) &= v_0 + \sum_{n=1}^m v_n(s) \sin n\theta + \sum_{n=1}^m \bar{v}_n(s) \cos n\theta \\ w(s, \theta) &= w_0 + \sum_{n=1}^m w_n(s) \cos n\theta + \sum_{n=1}^m \bar{w}_n(s) \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

以後、 $\theta = 0$ の平面に関し対称な変形のみ考える。すなわち、(2)式の第2項のみ用いて、定式化を行なう。

まず、次の対角マトリックスを定義しておく。

$$\left. \begin{aligned} [t_p] &= \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta & \cos n\theta & \cos n\theta & \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} [I_6] \\ [t_b] &= \begin{bmatrix} \sin n\theta & \cos n\theta & \sin n\theta & \cos n\theta & \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} [I_6] \\ [t] &= \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} [I_3] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに  $[I_n]$  は  $n$  次の単位マトリックスである。

節線変位ベクトルと節線力ベクトルを、次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \{d_p\}^t &= \{d_{pn}\}^t [t_p] = \begin{bmatrix} u_n^i & v_n^i & w_n^i & u_n^{i+1} & v_n^{i+1} & w_n^{i+1} \end{bmatrix} [t_p] \\ \{d_b\}^t &= \{d_{bn}\}^t [t_b] = \begin{bmatrix} v_n^{i-1} & w_n^{i-1} & v_n^i & w_n^i & v_n^{i+1} & w_n^{i+1} \end{bmatrix} [t_b] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \{f_p\}^t &= \{f_{pn}\}^t [t_p] = \begin{bmatrix} X_n^i & Y_n^i & Z_n^i & X_n^{i+1} & Y_n^{i+1} & Z_n^{i+1} \end{bmatrix} [t_p] \\ \{f_b\}^t &= \{f_{bn}\}^t [t_b] = \begin{bmatrix} Y_n^{i-1} & Z_n^{i-1} & Y_n^i & Z_n^i & Y_n^{i+1} & Z_n^{i+1} \end{bmatrix} [t_b] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、添字  $p$  および  $b$  は、それぞれ、面内および面外ひずみに関する剛性方程式を導く際に用いられるベクトルであることを意味する。また、添字  $i-1, i, i+1$  は、節線番号である。

(2)式における  $u_n(s), v_n(s), w_n(s)$  として、次式を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_n(s) &= u_n^i + s(u_n^{i+1} - u_n^i) / l_i \\ v_n(s) &= u_n^i + s(u_n^{i+1} - u_n^i) / l_i \\ w_n(s) &= w_n^i + s(w_n^{i+1} - w_n^i) / l_i \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

すなわち、要素内において  $s$  方向には線形の変位場を考える。

(6)式を用いて、(1)式に示したひずみ成分を近似する際、面内ひずみは要素内で評価し、曲率成分は節線上

で評価する。すなわち、面内ひずみベクトル

$$\{\epsilon_p\}^t = \{\epsilon_{pn}\}^t [t] = [\kappa_{sn} \ \epsilon_{\theta n} \ \epsilon_{s\theta n}] [t] \quad (7)$$

において

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{sn} &= (u_n^{i+1} - u_n^i) / l_i \\ \epsilon_{\theta n} &= n(u_n^i + v_n^{i+1}) / 2R + (w_n^i + w_n^{i+1}) / 2R \\ \epsilon_{s\theta n} &= -n(u_n^i + u_n^{i+1}) / 2R + (v_n^{i+1} - v_n^i) / l_i \end{aligned} \right\} (8)$$

と近似し、曲率成分ベクトル

$$\{\epsilon_b\}^t = \{\epsilon_{bn}\}^t [t] = [\kappa_{sn} \ \kappa_{\theta n} \ \kappa_{s\theta n}] [t] \quad (9)$$

において

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{sn} &= -2\{w_n^{i+1}/l_{i-1} - (1/l_{i-1} + 1/l_i)w_n^{i+1}/l_i + w_n^{i+1}/l_i\} / (l_{i-1} + l_i) \\ \kappa_{\theta n} &= nv_n^i / R^2 + n^2 w_n^i / R^2 \\ \kappa_{s\theta n} &= 2\{(v_n^{i+1} - v_n^{i-1}) + n(w_n^{i+1} - w_n^{i-1})\} / R(l_{i-1} + l_i) \end{aligned} \right\} (10)$$

と近似する。(8)式において、s に関する微分を含まない項の評価に、両節線値の平均値を用いた(部分近似<sup>2)</sup>)を用いたのは、剛性マトリックスをより簡略化するためである。また、(10)式における各項の評価は、差分近似による。(8)式と(10)式をマトリックス表示すると

$$\{\epsilon_{pn}\}^t = [B_p] \{d_{pn}\} \quad (11)$$

$$\{\epsilon_{bn}\}^t = [B_b] \{d_{bn}\} \quad (12)$$

ここに、

$$[B_p] = \begin{bmatrix} -1/l_i & 0 & 0 & 1/l_i & 0 & 0 \\ 0 & n/2R & 1/2R & 0 & 1/2R & 0 \\ -n/2R & -1/l_i & 0 & -n/2R & 1/l_i & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[B_b] = \begin{bmatrix} 0 & -2/l_{i-1}(l_{i-1} + l_i) & 0 \\ 0 & 0 & n/R^2 \\ -2/R(l_{i-1} + l_i) - 2n/R(l_{i-1} + l_i) & 0 & 0 \\ 2/l_{i-1} l_i & 0 & -2/l_i(l_{i-1} + l_i) \\ n^2/R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/R(l_{i-1} + l_i) & 2n/R(l_{i-1} + l_i) \end{bmatrix} \quad (14)$$

である。

応力-ひずみ関係(弾性変形)を応力ベクトルの定義とともに、以下に示す。

$$\{\sigma_p\}^t = \{\sigma_{pn}\}^t [t] = [N_{sn} \ N_{\theta n} \ N_{s\theta n}] [t] \quad (15)$$

$$\{\sigma_{pn}\} = [D_p^s] \{\epsilon_{pn}\} \quad (16)$$

$$[D_p^s] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\{\sigma_b\}^t = \{\sigma_{bn}\}^t [t] = [M_{sn} \ M_{\theta n} \ M_{s\theta n}] [t] \quad (18)$$

$$\{\sigma_{bn}\} = [D_b^s] \{\epsilon_{bn}\} \quad (19)$$

$$\left\{ [D_b^s] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \right. \quad (20)$$

以上の準備のもとに、要素剛性方程式を導く。

面内、面外ひずみに関する仮想仕事式は、それぞれ、

$$\int_0^{l_i} \{\epsilon_p\}^t \{\sigma_p\} R ds \cdot d\theta = \{d_p\}^t \{f_p\} R d\theta \quad (21)$$

$$\int_{-l_{i-1}/2}^{l_i/2} \{\epsilon_b\}^t \{\sigma_b\} R ds \cdot d\theta = \{d_b\}^t \{f_b\} R d\theta \quad (22)$$

と表せる。(21)、(22)式に、(4)、(5)、(7)、(9)、(15)、(18)の諸式を代入し、 $\theta = \pi/4n$  とおき、(11)、(12)、(16)、(19)式を用いれば、次の剛性方程式を得る。

$$\{[k_p]\} \{d_{pn}\} = R \{f_{pn}\} \quad (23)$$

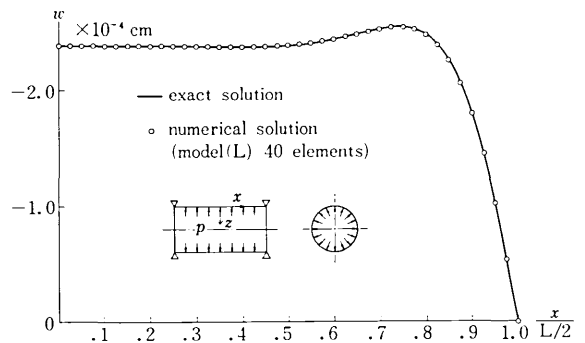
$$\{[k_p]\} = R l_i [B_p]^t [D_p^s] [B_p] \quad (24)$$

$$\{[\kappa_b]\} \{d_{bn}\} = R \{f_{bn}\} \quad (25)$$

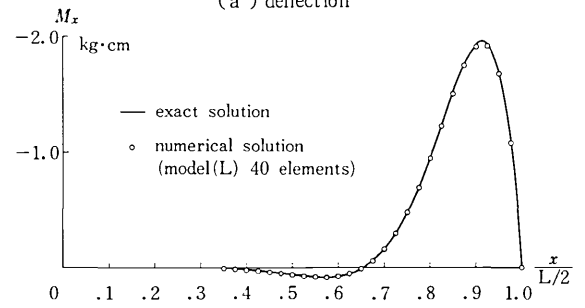
$$[k_b] = R/2 \cdot (l_{i-1} + l_i) [B_b]^t [D_b^s] [B_b] \quad (26)$$

(24)、(26) 式の各剛性マトリックスは、いずれも陽な形で与えられており、それぞれ(6×6)である。

さて、以上の諸式において、 $n=0$  とおけば、軸対称問題の解析のための要素が得られるが、これは、前報<sup>1)</sup>で提案した model(C) および model(L) のいずれとも異なる



(a) deflection

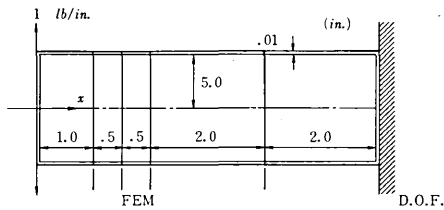


(b) bending moment

Fig.3 Simply supported cylindrical shell under uniform internal pressure

研究速報

っている。すなわち、model(C)は、本報の定式化において、(8)式における面内ひずみの評価に部分近似を用いずに、 $n=0$ とした要素であり、model(L)は、面内ひずみ



Case 1	5	1	1	1	1	18
Case 2	10	1	1	1	1	28
Case 3	20	1	1	1	1	48

Present method

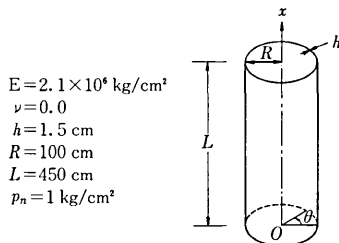
Case 1	10	2	2	2	2	18
Case 2	20	2	2	2	2	28
Case 3	40	2	2	2	2	48

Element division

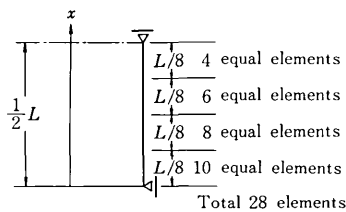
Error (%)

	max. deflection			max. moment		
	FEM	model (C)	model (L)	FEM	model (C)	model (L)
Case 1	31.7	0.4	7.9	28.8	5.3	16.1
Case 2	11.1	0.1	2.0	11.0	0.6	3.7
Case 3	3.1	0.04	0.5	2.5	0.5	1.2

Fig. 4 Comparison with finite element solutions (Grafton and strome)



(a) dimensions and properties



(b) nodal breakdown

Fig. 5 Cylindrical shell subjected to pressure distributed sinusoidally along the circumference direction

Table 1 Analysis of a cylindrical shell subjected to pressure distributed sinusoidally along the circumference direction

— Comparison with conventional finite element and exact solutions —

(a) Lateral displacements

n	x (cm)	Lateral displacements (cm)			
		Finite element solution <sup>5)</sup>	Present solution	Exact solution	
0	0	0	0	0	$\times 10^{-3}$
	56.25	3.167	3.167	3.167	
	112.50	3.175	3.175	3.175	
	168.75	3.176	3.175	3.175	
	225.00	3.175	3.175	3.175	
1	0	0	0	0	$\times 10^{-2}$
	56.25	1.676	1.677	1.678	
	112.50	2.727	2.730	2.731	
	168.75	3.388	3.392	3.393	
	225.00	3.613	3.618	3.620	
2	0	0	0	0	$\times 10^{-1}$
	56.25	1.339	1.342	1.342	
	112.50	2.396	2.401	2.402	
	168.75	3.078	3.087	3.088	
	225.00	3.313	3.323	3.325	
3	0	0	0	0	$\times 10^{-1}$
	56.25	4.010	4.022	4.022	
	112.50	7.233	7.257	7.257	
	168.75	9.306	9.343	9.344	
	225.00	10.018	10.062	10.060	
4	0	0	0	0	$\times 10^{-1}$
	56.25	3.153	3.156	3.156	
	112.50	5.477	5.485	5.484	
	168.75	6.857	6.871	6.870	
	225.00	7.308	7.327	7.325	

(b) Axial forces

n	x (cm)	Axial forces (kg/cm)			
		Finite element solution <sup>5)</sup>	Present solution	Exact solution	
1	0	0	0	0	$\times 10^2$
	56.25	1.107	1.112	1.108	
	112.50	1.894	1.903	1.899	
	168.75	2.372	2.376	2.373	
	225.00	2.530	2.526	2.531	
2	0	0	0	0	$\times 10^2$
	56.25	4.356	4.376	4.356	
	112.50	7.459	7.480	7.460	
	168.75	9.316	9.332	9.319	
	225.00	9.933	9.920	9.938	
3	0	0	0	0	$\times 10^3$
	56.25	0.693	0.695	0.692	
	112.50	1.151	1.152	1.149	
	168.75	1.409	1.409	1.407	
	225.00	1.492	1.488	1.490	
4	0	0	0	0	$\times 10^2$
	56.25	4.149	4.140	4.132	
	112.50	5.555	5.523	5.521	
	168.75	5.779	5.738	5.739	
	225.00	5.751	5.713	5.711	

成分も曲率成分と同様、節線上で評価して、 $n=0$ とした要素である。本報の定式化による要素は、面内ひずみの評価に、部分近似(Partial approximation)を用いているという意味で model(P)と呼ぶことにする。model(C)および model(L)も、非軸対称問題に適用可能であることは、いうまでもない。

### 3. 数値解析例

軸対称問題も含め、二、三の数値計算例を示し、横たわみ  $w_n(s)$  を 3 次多項式に仮定する。通常の有限要素法<sup>3)-5)</sup>による解析結果との比較を行なう。

Fig. 3は、前報<sup>1)</sup>の弾性解析と同じ円筒殻に対する軸対称問題の解析結果であり、理論解は文献<sup>9)</sup>による。

Fig. 4では、一端固定で自由端に線荷重を受ける円筒殻を解析し、通常の有限要素法による解<sup>3)</sup>と精度の比較を行なった。model(C)および、model(L)による解の精度が、きわめて良好であることがわかる。

非軸対称問題の解析例題として、両端で単純支持され、分布荷重として、軸方向には一様、周方向には  $n=0, 1, 3, 4$  の 5 種の正弦波分布をもつ外圧を受ける円筒殻の解析を行なう。この問題は、千葉・塩屋・川股により、通常の円錐台要素を用いて解析されており、また、末岡による解析解がある(いずれも文献<sup>9)</sup>)。千葉らが解析に用いた円筒殻の寸法、材料定数、要素分割を、Fig. 5 に示す。本解析でも、同じデータを用いる。

本解析により得られた横たわみ  $w$  と面内力  $N_x$  の値(いずれも  $\theta=0$  での値)を、千葉らの有限要素解、末岡の理論解とともに、Table 1(a)および(b)に示す。本離散化モデルでは、1節線の自由度が3(通常は4)であり、また、陽な形で与えられる非常に簡単な剛性マトリックスを用いているにもかかわらず、解析精度がきわめて良好なことが了解されるであろう。

なお、model(P)による線形解の精度は、一般に、model(C)と model(L)の中間に位置すると考えられる。また、非軸対称弾塑性問題の解析には、model(L)が便利であろう。

### 4. 結 論

円筒殻の解析のための新しい離散化モデルを提案した。その特長は、

- (1) 1節線 ( $3 \times m$ )自由度 ( $m$ は周方向の Fourier 展開項数)のリング要素である。
- (2) 剛性マトリックスが、きわめて簡略であり、陽な形で与えられる。
- (3) 解析精度が、非常に良好である。

本離散化モデルの安定問題、動的問題などへの応用は、今後の課題であるが、それらの問題に対しても、有力な解析手法となろう。(1978年5月1日受理)

### 参 考 文 献

- 1) 都井・川井, 円筒殻の解析のための新しい離散化モデル(その1), 生産研究, 第30巻, 7号(1978)
- 2) F. Kikuchi, Theory and Examples of partial Approximation in the Finite Element Method, Int. J. for Num. in Eng., Vol. 10(1976)
- 3) P. E. Grafton and D. R. Strome, Analysis of Axisymmetric Shells by the Direct Stiffness Method, AIAA J., Vol. 1, No. 10(1963)
- 4) J. H. Percy et al., Application of Matrix Displacement Method to Linear Elastic Analysis of Shells of Revolution, AIAA J., Vol. 3, No. 11(1965)
- 5) 川股, シェル構造解析, 培風館(1974)
- 6) S. Timoshenko and S. Woinovsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 2nd Edn., McGraw-Hill(1959)

