

球殻の解析のための新しい離散化モデル

New Discrete Elements for Spherical Shells

都井 裕*・川井 忠彦*

Yutaka TOI and Tadahiko KAWAI

1. 序

球殻の解析のための新しい離散化モデル(曲線リング要素)を提案する。

この離散化モデルは、1節線(3×n)自由度(nは周方向のFourier展開項数)であり、剛性マトリックスは、陽な形で与えられる。

弾塑性解析を含む二、三の数値解析例により、この離散化モデルの有効性を示す。

2. 新しい離散化モデル

球殻の座標系をFig. 1に示す。

ひずみ-変位関係式は、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= \partial u / \partial s + w / R \\ \epsilon_\theta &= (\partial v / \partial \theta) / r + (w \cos \phi + u \sin \phi) / r \\ \epsilon_{s\theta} &= (\partial u / \partial \theta) / r + \partial v / \partial s - (v \sin \phi) / r \\ \kappa_s &= \partial^2 w / \partial s^2 \\ \kappa_\theta &= (\partial^2 w / \partial \theta^2) / r^2 + \sin \phi (\partial w / \partial s) / r \\ \kappa_{s\theta} &= 2 \{ (\partial^2 w / \partial s \partial \theta) / r - \sin \phi (\partial w / \partial \theta) / r^2 \} \end{aligned} \right\} (1)$$

要素および要素座標をFig. 2に示す。ここで提案する新しい離散化モデルは、曲線(円弧)を母線とするリング要素である。

通常のリング要素を作る方法¹⁾に従い、変位および荷重を、円周方向にはFourier級数展開を行なう。θ=0の平面について対称な変形を考えれば、変位の一般項は、

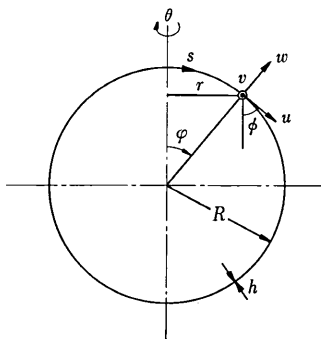


Fig. 1 Coordinate system of a spherical shell.

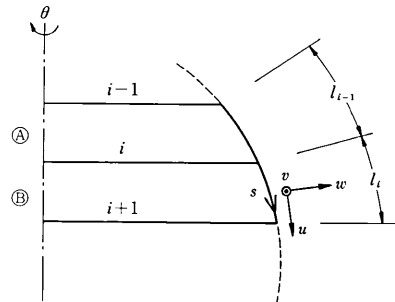


Fig. 2 Typical element of a spherical shell

$$\left. \begin{aligned} u(s, \theta) &= u_n(s) \cos n\theta \\ u(s, \theta) &= v_n(s) \sin n\theta \\ w(s, \theta) &= w_n(s) \cos n\theta \end{aligned} \right\} (2)$$

と表される。

ここで、次の対角マトリックスを定義しておく。

$$\left. \begin{aligned} [t_p] &= \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta & \cos n\theta & \cos n\theta & \sin n\theta \\ & & & & \end{bmatrix} \\ [t_b] &= \begin{bmatrix} \cos n\theta & \cos n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} \\ [t] &= \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} [I_n] \quad (3)$$

ここに、[I_n]はn次の単位マトリックスである。

節線変位および節線力ベクトルの定義を、以下に示す。

$$\left. \begin{aligned} \{d_p\}^t &= \{d_{pn}\}^t [t_p] = [u_n^i \ v_n^i \ w_n^i \ u_n^{i+1} \ v_n^{i+1} \ w_n^{i+1}] \\ & \quad [t_p] \\ \{d_b\}^t &= \{d_{bn}\}^t [t_b] = [w_n^{i-1} \ w_n^i \ w_n^{i+1}] [t_b] \\ \{t_p\}^t &= \{f_{pn}\}^t [t_p] = [X_n^i \ Y_n^i \ Z_n^i \ X_n^{i+1} \ Y_n^{i+1} \ Z_n^{i+1}] \\ & \quad [t_p] \\ \{f_b\}^t &= \{f_{bn}\}^t [t_b] = [Z_n^{i-1} \ Z_n^i \ Z_n^{i+1}] [t_b] \end{aligned} \right\} (4)$$

ここで、添字pおよびbは、それぞれ、面内および面外ひずみに関する剛性方程式を導く際に用いられるベクトルであることを意味する。また、添字i-1, i, i+1は、節線番号である。

(2)式におけるu_n(s), v_n(s), w_n(s)を、次のように、要素内線形と仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_n(s) &= u_n^i + s(u_n^{i+1} - u_n^i) / l_i \\ v_n(s) &= v_n^i + s(v_n^{i+1} - v_n^i) / l_i \\ w_n(s) &= w_n^i + s(w_n^{i+1} - w_n^i) / l_i \end{aligned} \right\} (6)$$

* 東京大学生産技術研究所 第2部

(6)式を用いて、(1)式における各ひずみ成分を、次のように近似する。すなわち、面内ひずみベクトル

$$\{\epsilon_{pn}\}' = \{\epsilon_{pn}\}'[t] = [\epsilon_{sn} \ \epsilon_{\theta n} \ \epsilon_{s\theta n}]'[t] \quad (7)$$

において

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{sn} &= (u_n^{i+1} - u_n^i)/l_i + (w_n^i + w_n^{i+1})/2R \\ \epsilon_{\theta n} &= n(v_n^i/r_i + v_n^{i+1}/r_{i+1})/2 \\ &\quad + \{(w_n^i \cos \phi_i)/r_i + (w_n^{i+1} \cos \phi_{i+1})/r_{i+1}\}/2 \\ &\quad + \{(u_n^i \sin \phi_i)/r_i + (u_n^{i+1} \sin \phi_{i+1})/r_{i+1}\}/2 \\ \epsilon_{s\theta n} &= -n(v_n^i/r_i + v_n^{i+1}/r_{i+1})/2 + (v_n^{i+1} - v_n^i)/l_i \\ &\quad - \{(v_n^i \sin \phi_i)/r_i + (v_n^{i+1} \sin \phi_{i+1})/r_{i+1}\}/2 \end{aligned} \right\} (8)$$

また、曲率成分ベクトル

$$\{\epsilon_{bn}\}' = \{\epsilon_{bn}\}'[t] = [\kappa_{sn} \ \kappa_{\theta n} \ \kappa_{s\theta n}]'[t] \quad (9)$$

において

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{sn} &= 2\{w_n^{i-1}/l_{i-1} - (1/l_{i-1} + 1/l_i)w_n^i + w_{n+1}^i/l_i\} \\ &\quad / (l_{i-1} + l_i) \\ \kappa_{\theta n} &= -n^2 w_n^i/r_i^2 + (\sin \phi_i)(w_n^{i+1} - w_n^i)/r_i \\ &\quad / (l_{i-1} + l_i) \\ \kappa_{s\theta n} &= -2n(w_n^{i+1} - w_n^i)/r_i(l_{i-1} + l_i) + \\ &\quad + (nw_n^i \sin \phi_i)/r_i^2 \end{aligned} \right\} (10)$$

とする。(8)式の面内ひずみ成分の各項は、(6)式を直接使い、部分近似¹⁾を併用して、要素内で評価しており、(10)式の曲率成分の各項は、差分近似を用いて、節線上で評価している。

(8)式と(10)式は、次のようにマトリックス表示できる。

$$\{\epsilon_{pn}\}' = [B_p]\{d_{pn}\} \quad (11)$$

$$\{\epsilon_{bn}\}' = [B_b]\{d_{bn}\} \quad (12)$$

ここで、 $[B_p]$ 、 $[B_b]$ の各マトリックスには、座標成分 s が含まれないことに注意されたい。

応力ベクトルを

$$\{\sigma_p\}' = \{\sigma_{pn}\}'[t] = [N_{sn} \ N_{\theta n} \ N_{s\theta n}]'[t] \quad (13)$$

$$\{\sigma_b\}' = \{\sigma_{bn}\}'[t] = [M_{sn} \ M_{\theta n} \ M_{s\theta n}]'[t] \quad (14)$$

と定義すれば、応力-ひずみ関係式(弾性変形)は、

$$\{\sigma_{pn}\} = [D_p^*]\{\epsilon_{pn}\} \quad (15)$$

$$\{\sigma_{bn}\} = [D_b^*]\{\epsilon_{bn}\} \quad (16)$$

と書ける。

以上の準備のもとに、要素剛性方程式を導く。

面内、面外ひずみに関する仮想仕事式は、それぞれ

$$\int_0^{l_i} \{\epsilon_p\}' \{\sigma_p\} r(s) ds \cdot d\theta = \sum_{m=1}^{i-1} \{d_p^m\}' \{f_p^m\}' \{f_p^m\} r_m d\theta \quad (17)$$

$$\int_{-l_{i-1}/2}^{l_i/2} \{\epsilon_b\}' \{\sigma_b\} r(s) ds \cdot d\theta = \{d_b\}' \{f_b\} r_i d\theta \quad (18)$$

である。(17)式右辺の $\{d_p^m\}$ および $\{f_p^m\}$ は、それぞれ、節

線 m における変位ベクトルと節線力ベクトルである((4)、(5)式を参照)。(17)、(18)式に、(4)、(5)、(7)、(9)、(13)、(14)の諸式を代入し、 $\theta = \pi/4n$ とおく。左辺の被積分項の $r(s)$ に、(17)式では $r(s) = (r_i + r_{i+1})/2$ 、(18)式では $r(s) = r_i$ を代入し、(11)、(12)、(15)、(16)式を用いれば、次の剛性方程式を得る。

$$[k_p]\{d_{pn}\} = \left\{ \begin{matrix} r_i^i f_{pn}^i \\ \dots \\ r_{i+1} f_{pn}^{i+1} \end{matrix} \right\} \quad (19)$$

$$[k_p] = (r_i + r_{i+1})/2 \cdot l_i [B_p]^T [D_p^*] [B_p] \quad (20)$$

$$[k_b]\{d_{bn}\} = r_i \{f_{bn}\} \quad (21)$$

$$[k_b] = r_i (l_{i-1} + l_i)/2 \cdot [B_b]^T [D_b^*] [B_b] \quad (22)$$

(20)、(22)式の各剛性マトリックスは、いずれも陽形で表されており、それぞれ(6×6)および(3×3)である。

以上の定式化による離散化モデルは、面内剛性の評価に部分近似(Partial approximation)を用いているが、弾塑性解析を行なう場合は、面内剛性も節線に集中化(Lumping)する方が望ましい。³⁾ 前者をmodel (P)、後者をmodel (L)と呼ぶことにし、以下にmodel (L)における面内ひずみ成分の近似式を示す。

$$\begin{aligned} \epsilon_{sn} &= 2(\bar{u}_n^{i+1} - \bar{u}_n^i)/(l_{i-1} + l_i) + w_i/R \\ \epsilon_{\theta n} &= n(\bar{v}_n^i + \bar{v}_n^{i+1})/2r_i + (w_i \cos \phi_i)/r_i \\ &\quad + (\bar{u}_n^i + \bar{u}_n^{i+1})(\sin \phi_i)/2r_i \\ \epsilon_{s\theta n} &= -n(\bar{u}_n^i + \bar{u}_n^{i+1})/2r_i + 2(\bar{v}_n^{i+1} - \bar{v}_n^i)/ \\ &\quad / (l_{i-1} + l_i) - (\bar{v}_n^i + \bar{v}_n^{i+1})(\sin \phi_i)/2r_i \end{aligned} \quad (23)$$

ここに、 \bar{u}_n^i と \bar{v}_n^i 、 \bar{u}_n^{i+1} と \bar{v}_n^{i+1} は、それぞれ要素④および⑤における中心線の変位である。

3. 数値解析例

3.1 弾性解析 本離散化モデルによる線形解の精度を調べるため、model (P)を用いて数値計算を行なった。軸対称問題の例として、Fig. 3に示す様な外圧を受ける部分球殻の解析を行ない、Fig. 4で、解析結果を理論解¹⁾と比較した。また、非軸対称問題の例として、Fig. 5に示す地震力を受ける球形シェルの解析を行ない、Fig. 6で、解析結果を理論解²⁾と比較した。これらの解析例より、本離散化モデルは、きわめて簡単な剛性マトリッ

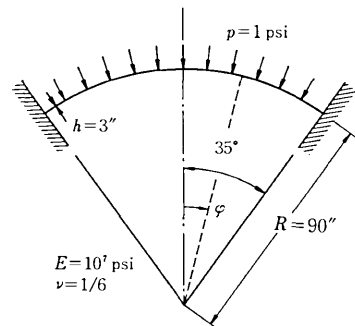


Fig. 3 Spherical cap under external pressure

研究速報

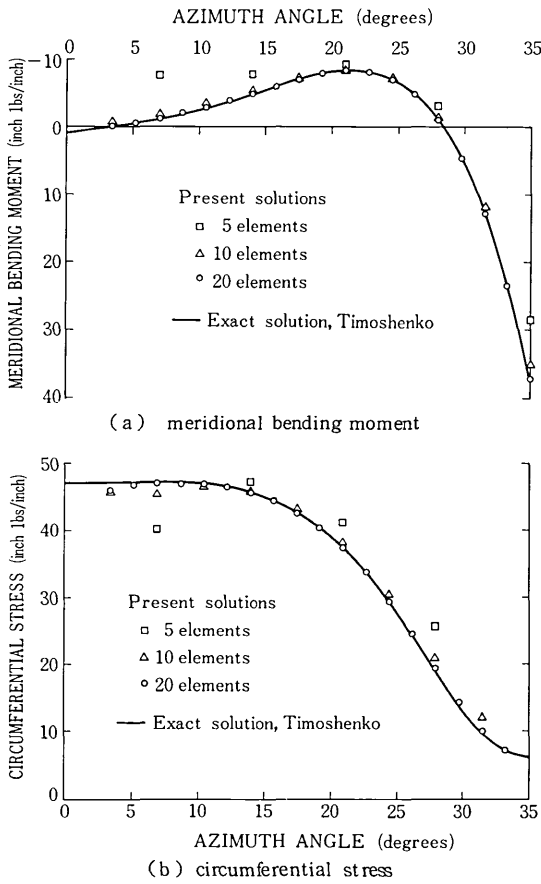


Fig. 4 Comparison of present solution and exact solution for a spherical cap under an external pressure

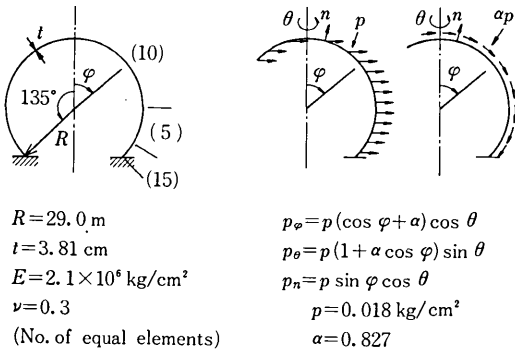


Fig. 5 Spherical shell subjected to distributed load due to earthquake

$R=29.0\text{ m}$
 $t=3.81\text{ cm}$
 $E=2.1 \times 10^6\text{ kg/cm}^2$
 $\nu=0.3$
 (No. of equal elements)

$p_\theta = p(\cos \varphi + a) \cos \theta$
 $p_\phi = p(1 + a \cos \varphi) \sin \theta$
 $p_n = p \sin \varphi \cos \theta$
 $p = 0.018\text{ kg/cm}^2$
 $a = 0.827$

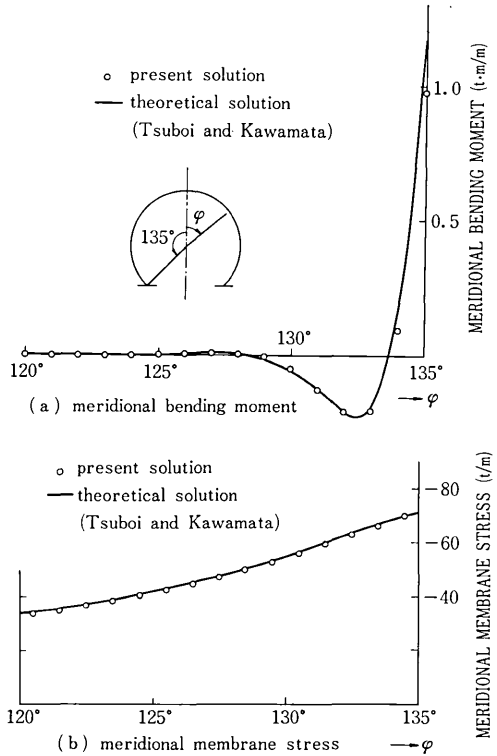


Fig. 6 Analysis of a spherical shell subjected to distributed load due to earthquake

クスを用いているにもかかわらず、比較的少ない分割数で良好な結果を与えていることがわかる。

3.2 弾塑性解析 (極限解析) model (L)を用いて、一様な外圧を受ける部分球殻の極限解析を行なった。諸無次元量の定義を以下に示す。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{合応力: } n_s = N_s / N_0, n_\theta = N_\theta / N_0 (N_0 = \sigma_0 h) \\ m_s = M_s / M_0, M_\theta = M_\theta / M_0 (M_0 = \sigma_0 h^2 / 4) \\ \text{(ここに, } \sigma_0 \text{は単軸状態での降伏応力)} \\ \text{形状パラメータ: } k = M_0 / R N_0 = h / 4R \\ \text{荷重: } \bar{p} = pR / N_0 \end{array} \right.$$

降伏曲面として、次式を用いた。

$$n_s^2 + n_\theta^2 - n_s n_\theta + m_s^2 + m_\theta^2 - m_s m_\theta - 1 = 0 \quad (24)$$

解析は、 $k=1/40$ の場合について行ない、要素数は20(等分割)である。

Fig. 7からFig. 9に、解析結果を示す。Fig. 9では、得られた最高荷重値を、OnatとPragerによる上界および下界値⁹⁾と比較しているが、本解析結果が良好であることがわかる。なお、計算時間は、1ケースにつき約5秒(HITAC 8800/8700)である。

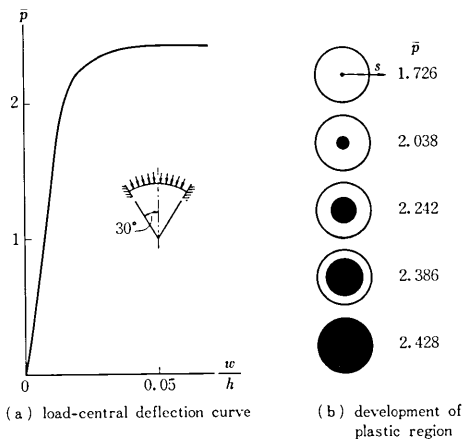


Fig. 7 Elasto-plastic analysis of a spherical cap under an external pressure (1)

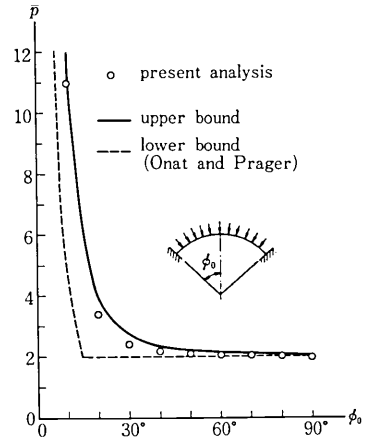


Fig. 9 Collapse load for a spherical cap under an external pressure

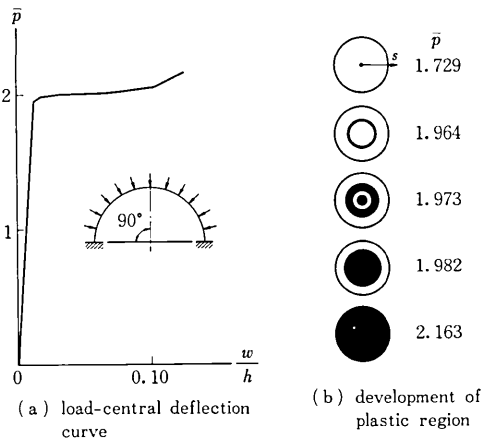


Fig. 8 Elasto-plastic analysis of a spherical cap under an external pressure (2)

4. 結 論

球殻の解析のための新しい離散化モデル(model (P) および model (L)) を提案した。その特長は、

(1) 1節線(3×n)自由度(nは周方向のFourier展開項数)の曲線リング要素である。

(2) 剛性マトリックスは、きわめて簡略であり、陽形式で与えられる。

(3) model (P) の線形解の精度は、非常に良好である。

(4) model (L) は、極限解析への応用が容易であり、計算時間も短い。

本離散化モデルの安定問題、動的問題への応用は、今後の課題であるが、良好な解析結果が期待される。

(1978年5月1日受理)

参 考 文 献

- 1) 川股, シェル構造解析, 培風館 (1974)
- 2) F. Kikuchi, Theory and Examples of partial Approximation in the Finite Element Method, Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 10 (1976)
- 3) 都井・川井, 円形アーチの解析のための新しい離散化モデル, 生産研究, 第30巻, 7号 (1978)
- 4) S. Timoshenko and S. Woinovsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 2nd Edn., McGraw-Hill (1959)
- 5) P. G. Hodge, Jr., Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill (1959)