

# 円筒殻の解析のための新しい離散化モデル (その1)

New Discrete Elements for Circular Cylindrical Shells (1st report)

都井 裕\*・川井 忠彦\*  
Yutaka TOI and Tadahiko KAWAI

## 1. 序

円筒殻の軸対称問題の解析のための新しい離散化モデルを提案し、数値計算例により、その有効性を示す。

本報で提案する新しい離散化モデルは、著者の一人により開発されたはりの曲げ要素(剛棒・ばねモデル)<sup>1)</sup>を円筒殻の軸対称解析用に拡張したものであり、剛性マトリックスの簡略さにもかかわらず、きわめて良好な精度を有することを特長とする。

非軸対称問題への拡張は、次報において行なう。

## 2. 新しい離散化モデル

円筒殻の軸対称変形は、次の微分方程式により支配される<sup>2)</sup>(Fig. 1を参照されたい)。

$$Dd^4w/dx^4 + Ehw/R^2 = Z \quad (1)$$

ここに、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ である。内部合応力成分は、

$$\left. \begin{aligned} N_x &= 0 \\ N_\theta &= -Ehw/R \\ M_x &= -Dd^2w/dx^2 \\ M_\theta &= \nu M_x \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

である。

(1)式は、また、弾性床(床係数  $Eh/R^2$ )上の曲げ剛性  $D$ のはりが、荷重  $Z$ を受ける場合の変形を表す微分方程式である。よって、すでに著者の一人により提案されているはりの曲げ要素<sup>1)</sup>(互いに回転ばねにより結合された剛棒より成る)に、さらに、弾性床に相当する、はりの単位長さ当たり  $Eh/R^2$ の強さをもつばねを付け加えれば、円筒殻の軸対称解析のための新しい離散化モデルが得られる。このモデルは、Fig. 2の(a)に示す。新たに付け加えたばねは、円筒殻の周方向の面内剛性を表わしていると考えられる。このモデルの剛性マトリックスは、Table 1のように与えられる。表中、 $w_{i-1}$ 、 $w_i$ 、 $w_{i+1}$  および  $Z_{i-1}$ 、 $Z_i$ 、 $Z_{i+1}$  は、それぞれ節点  $i-1$ 、 $i$ 、

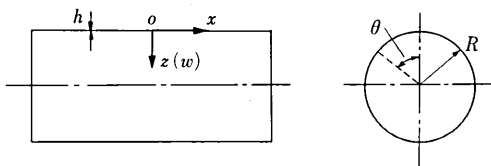


Fig. 1 Coordinate system of a circular cylindrical shell

\* 東京大学生産技術研究所 第2部

$i+1$ における横たわみと節点力である。回転ばねのばね定数  $k_b$  は、軸方向の曲率を差分近似することにより、

$$k_b = 2D/(l_{i-1} + l_i) \quad (3)$$

と定められる。

Fig. 2 (a)のモデルにおいて、面内剛性を表すばねを節点に集中化すれば、Fig. 2 (b)に示す新たなモデルが得られる。面内剛性を表すばねのばね定数  $k_h$  は、

$$k_h = Eh(l_{i-1} + l_i)/2R^2 \quad (4)$$

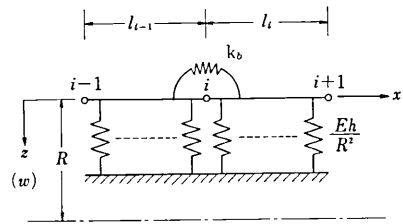
と定められる(剛性マトリックスは、Table 1に示す)。

曲げモーメント  $M_x$  の計算式は、いずれのモデルの場合も、

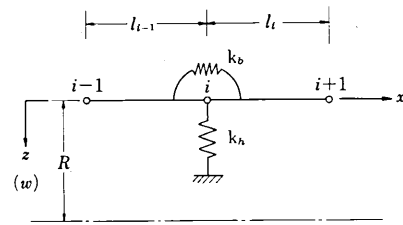
$$M_x = -k_b l / l_{i-1} - (1/l_{i-1} + 1/l_i) 1/l_i \{w\} \quad (5)$$

であり、ここに、 $\{w\}^T = [w_{i-1} \ w_i \ w_{i+1}]$ である。

Fig. 2 (a)のモデルは、剛棒・ばねモデルとして仮定された変位場(要素内線形)に対して、等価な(Consistent)面内剛性マトリックスを用いており、Fig. 2 (b)のモデルは、節点に集中化した(Lumped)面内剛性マトリックスを用いている。この意味で、前者を model(C)、後



(a) model (C)



(b) model (L)

Fig. 2 New discrete elements for axisymmetrical analysis of circular cylindrical shells

Table 1 Stiffness matrices  
(a) bending stiffness matrix

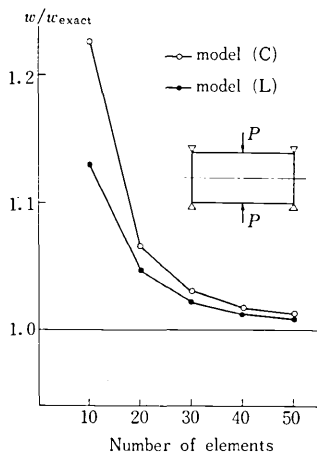
	$w_{i-1}$	$w_i$	$w_{i+1}$
$Z_{i-1}$	$\frac{1}{l_{i-1}^2}$		<i>sym.</i>
$Z_i$	$-\frac{1}{l_{i-1}}\left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right)$	$\left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right)^2$	$(\times k_b)$
$Z_{i+1}$	$\frac{1}{l_{i-1}l_i}$	$-\frac{1}{l_i}\left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right)$	$\frac{1}{l_i^2}$

(b) membrane stiffness matrix  
model (C)                      model (L)

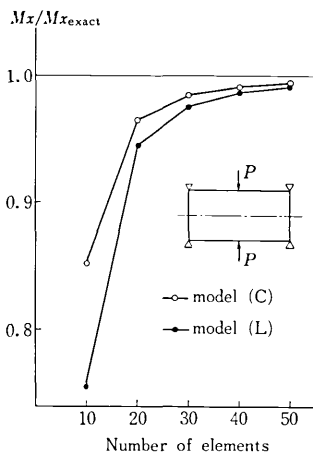
$\frac{Eh l_i}{6R^2}$		$w_i$	$w_{i+1}$
	$Z_i$	2	1
	$Z_{i+1}$	1	2

	$w_i$
$Z_i$	$k_h$



(a) deflection at the loaded point



(b) bending moment at the loaded point

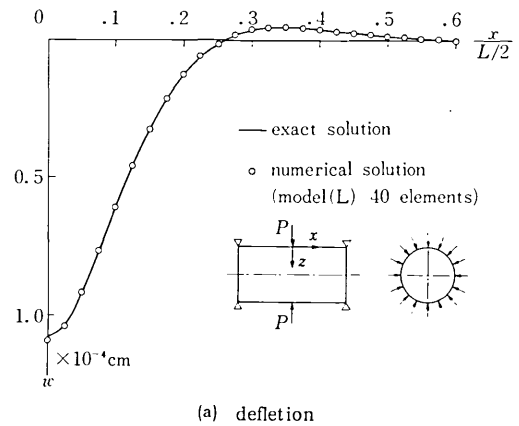
Fig. 3 Convergence of a new discrete model

者を model(L) と呼ぶことにする。

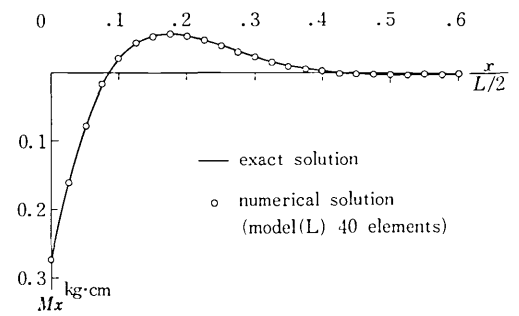
3. 数値解析例

3.1 弾性解析 線形解の精度と収束性を調べるために、いくつかの例題の解析を行なった。解析に用いた値は、 $L=20\text{ cm}$ ,  $R=10\text{ cm}$ ,  $h=0.2\text{ cm}$ ,  $E=2.1 \times 10^6\text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu=0.3$ ,  $P=1\text{ kg/cm}$  (線荷重),  $p=1\text{ kg/cm}^2$  (一様分布荷重) である。問題の対称性より 1/2 解析を行ない、要素数は、等分割で 10, 20, 30, 40, 50 である。

Fig. 3 に、両端単純支持で中央に線荷重を受ける円筒殻につき、たわみと曲げモーメントの収束曲線を示す。Fig. 4 と Fig. 5 には、異なる境界条件と荷重のもとでのたわみ曲線と曲げモーメント分布を、理論解<sup>2)</sup> とともに示す。本離散化モデルは、たわみ、応力ともに良好な解



(a) deflection



(b) bending moment

Fig. 4 Bending of a long circular cylindrical shell by a load uniformly distributed along a circular section

を与えている。

model(C) と model(L) を比較した場合、線形解の精度は、一般には、model(C) の方が良好と考えられるが、Fig. 3 (a) のようなケースもある。

3.2 弾塑性解析(極限解析) 弾塑性解析(特に極限解析)には、曲げ剛性と面内剛性をともに節点に集中化

研究速報

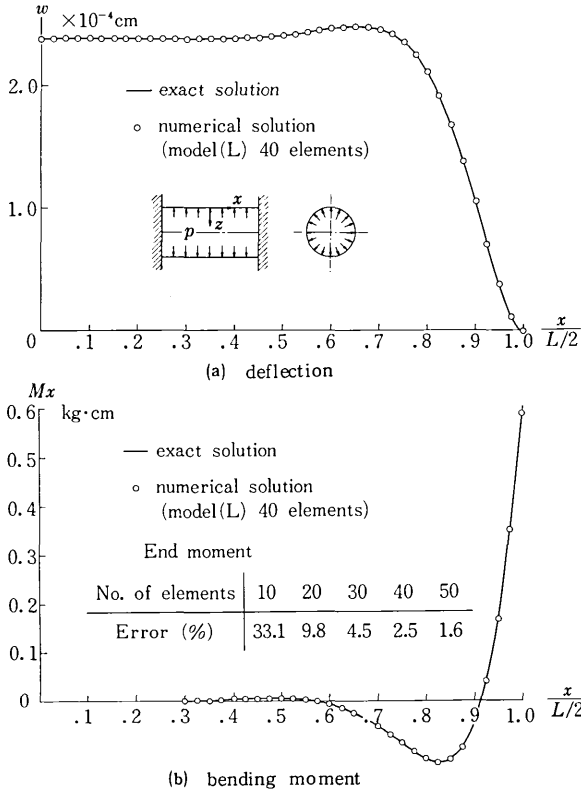


Fig. 5 Clamped cylindrical shell under a uniform internal pressure

した model(L) の方が使いやすい. よって, model(L) を用いて, 二, 三の例題の解析を行なう.

解析に先立ち, 次の諸無次元量を定義しておく.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{円筒殻の形状パラメータ: } \omega^2 = L^2/2Rh \\ \text{合応力: } n_\theta = N_\theta/N_0 (N_0 = \sigma_0 h), m_x = M_x/M_0 (M_0 = \sigma_0 h^2/4) \\ \text{(ここに, } \sigma_0 \text{ は単軸状態での降伏応力)} \\ \text{荷重: } \bar{p} = pR/N_0, \bar{P} = P\sqrt{Rh}/\sqrt{2} M_0 \end{array} \right.$$

Fig. 6 に, 諸降伏曲線を示す. 本解析では

$$n_\theta^2 + m_x^2 - 1 = 0 \quad (6)$$

を用いる (Fig. 6 に実線で示す).

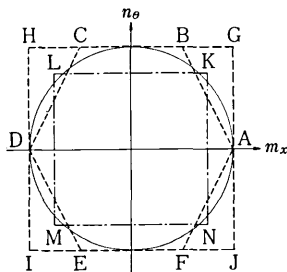


Fig. 6 Yield curves for a circular cylindrical shell

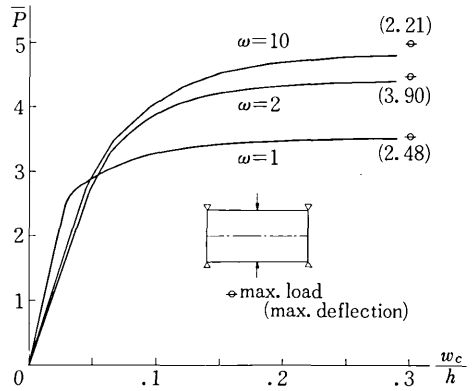


Fig. 7 Load-deflection curves at the central section for a pinched circular cylindrical shell

また, 解析はすべて 1/2 解析であり, 要素数は 40 (等分割) である.

Fig. 7 から Fig. 9 に, 両端支持で中央に線荷重を受ける円筒殻に対する解析結果を示す. Fig. 9 では, 得られた最高荷重値を, Drucker による上界<sup>3)</sup>および下界値と比較しているが, 本解析結果は両者のほぼ中央にあり, 妥当な結果と言えよう.

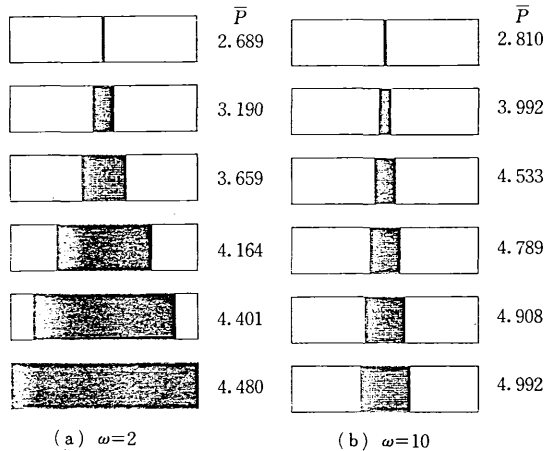


Fig. 8 Development of plastic region of a circular cylindrical shell pinched at the central section

Fig. 10 から Fig. 12 には, 両端固定で一様な内圧を受ける円筒殻に対する解析結果を示す. Fig. 12 には, 得られた最高荷重値を, Hodge による極限解析の結果<sup>3)</sup>とともに示しているが, 両者は良好に一致している.

model(L) の特長のひとつは, ここに示したように, 容易に極限解析に適用しうることにある. なお, 計算時間は, 1 ケースにつき約 6.5 秒 (HITAC 8800/8700) である.

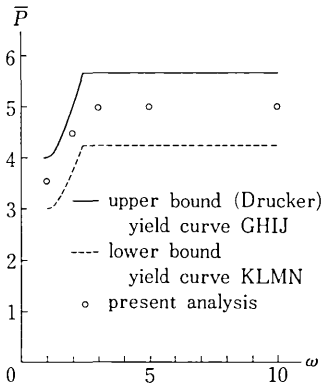


Fig. 9 Collapse load of a pinched circular cylindrical shell

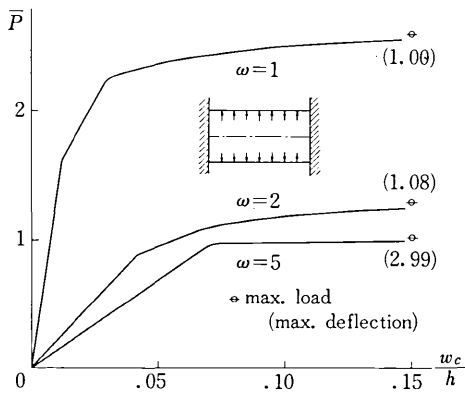


Fig. 10 Load deflection curves at the central section for a circular cylindrical shell under a uniform internal pressure

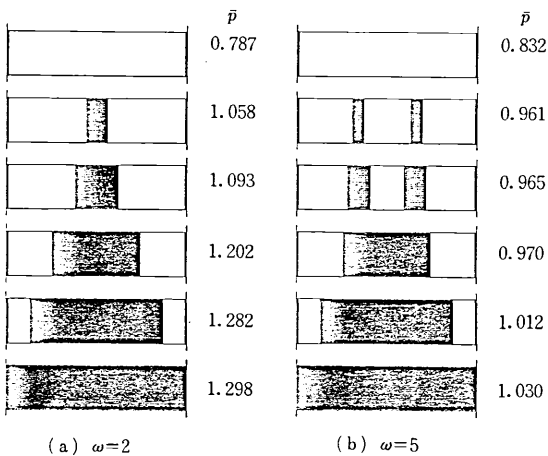


Fig. 11 Development of plastic region of a circular cylindrical shell under a uniform internal pressure

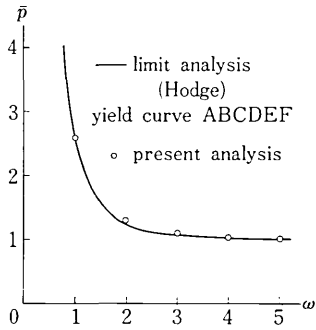


Fig. 12 Collapse load of a circular cylindrical shell under a uniform internal pressure

4. 結 論

円筒殻の軸対称問題の解析のための新しい離散化モデル (model(C) および model(L)) を提案した. その特長は, 以上のとおりである.

- (1) 1 節点 1 自由度 ( $w_i$ ) の要素であり, 剛性マトリックスも簡略である.
- (2) 解析精度は, たわみ, 応力ともきわめて良好である.
- (3) model(L) は, 極限解析への応用が容易である.

(1978年5月1日受理)

参 考 文 献

- 1) T. Kawai, New Element Models in Discrete Structural Analysis, 日本造船学会論文集, 第141号(1977)
- 2) S. Timoshenko and S. Woinovsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 2nd Edn., McGraw-Hill (1959)
- 3) P. G. Hodge Jr., Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill (1959)