研　究　速　報

UDC 624.072.32

円形アーチの解析のための新しい離散化モデル

New Discrete Elements for Circular Arches

都　井　　裕*・川　井　忠　彦*

Yutaka TOI and Tadahiko KAWAI

1. 序

円形アーチの解析のための新しい離散化モデル（曲線要素）を提案する．

数値計算例により，他の曲線要素との比較を行ない，この離散化モデルの線形解の精度が良好であることを示す．また，極限解析への応用例を示す．

2. 新しい離散化モデル

要素座標を Fig. 1 に示す．

円形アーチに蓄えられるひずみエネルギーは，

$$V(u,w)=\frac{1}{2}\int(EA\varepsilon^2+EI\kappa^2)ds \qquad (1)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon&=du/ds-w/R\\ \kappa&=d^2w/ds^2-(du/ds)/R\end{aligned}\right\} \qquad (2a,2b)$$

と表される．

要素内における変位を，次のように仮定する．

$$\left.\begin{aligned}u(s)&=u_i+s(u_{i+1}-u_i)/l_i\\ w(s)&=w_i+s(w_{i+1}-w_i)/l_i\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

すなわち，要素内において線形の変位場を考える．

（3）式を用いて，（2）式のひずみ成分を近似する際，軸方向ひずみ ε は要素内で，また，曲率には節点において評価する．すなわち，

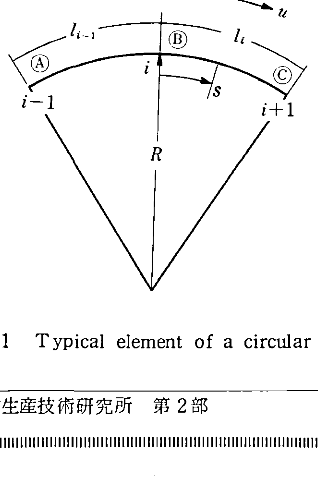

Fig. 1　Typical element of a circular arch

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon&=(u_{i+1}-u_i)/l_i+(w_i+w_{i+1})/2R\\ \kappa&=2\{w_{i-1}/l_{i-1}-(1/l_{i-1}+1/l_i)w_i+w_{i+1}/l_i\}/\cdot\\ &\quad\cdot(l_{i-1}+l_i)-(u_{i+1}-u_{i-1})/R(l_{i-1}+l_i)\end{aligned}\right\}$$

(4a, 4b)

と近似する．（4）式中，ε の第2項の評価は，菊地により用いられたのと同じ部分近似[1]である．また，κ の各項の評価は，差分近似による．

（4）式を，次のようにマトリックス表示しておく．

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon&=\lfloor B_d\rfloor\{u_d\}\\ \{B_d\}^t&=\lfloor -1/l_i\ \ 1/2R\ \ 1/l_i\ \ 1/2R\rfloor\\ \{u_d\}^t&=\lfloor u_i\,w_i\,u_{i+1}\,w_{i+1}\rfloor\end{aligned}\right\} \qquad (5a)$$

$$\left.\begin{aligned}\kappa&=\lfloor B_b\rfloor\{u_b\}\\ \{B_b\}^t&=2/(l_{i-1}+l_i)\lfloor 1/2R\ \ 1/l_{i-1}\ \vdots\ 0\ \ -(1/l_{i-1}\\ &\qquad+1/l_i)\ \ -1/2R\ \ 1/l_i\rfloor\\ \{u_b\}^t&=\lfloor u_{i-1}\,w_{i-1}\,u_i\,w_i\,u_{i+1}\,w_{i+1}\rfloor\end{aligned}\right\}$$

(5b)

（5）式を（1）式に代入し，Castigliano の定理を適用すれば，次の剛性マトリックスを得る．

$$\left.\begin{aligned}[k_d]&=\int_0^{l_i}EA\{B_d\}\lfloor B_d\rfloor ds=EAl_i\{B_d\}\lfloor B_d\rfloor\\ [k_b]&=\int_{-l_{i-1}/2}^{l_i/2}EI\{B_b\}\lfloor B_b\rfloor\\ &=\frac{1}{2}EI(l_{i-1}+l_i)\{B_b\}\lfloor B_b\rfloor\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ここに，$[k_d]$ は軸剛性マトリックスであり，$[k_b]$ は曲げ剛性マトリックスである．これらの具体形を Table 1 に示しておく．

以上に示した離散化モデルは，軸剛性の評価に，部分近似（Partial approximation）を用いており，これを model(P) とする．これに対し，軸剛性を要素内で評価するが，部分近似を用いないモデル，また，軸剛性も曲げ剛性同様，節点上で評価するモデルが考えられる．前者は，（3）式の変位関数に対し等価な（Consistent）軸剛性マトリックスを用いるので，これを model(C)，後者は，軸剛性を節点上に集中化（Lumping）するので，これを model(L) とする．

model(C) および model(L) における軸方向ひずみ ε の近似式を，次に示す．

* 東京大学生産技術研究所　第2部

Table 1（a） Bending stiffness matrix

	u_{i-1}	w_{i-1}	u_i	w_i	u_{i+1}	w_{i+1}
X_{i-1}	$\frac{1}{4R^2}$	sym. $\left(\times \frac{2EI}{l_{i-1}+l_i}\right)$				
Z_{i-1}	$\frac{1}{2Rl_{i-1}}$	$\frac{1}{l_{i-1}^2}$				
X_i	0	0	0			
Z_i	$-\frac{1}{2R}\left(\frac{1}{l_{i-1}}+\frac{1}{l_i}\right)$	$-\frac{1}{l_{i-1}}\left(\frac{1}{l_{i-1}}+\frac{1}{l_i}\right)$	0	$\left(\frac{1}{l_{i-1}}+\frac{1}{l_i}\right)^2$		
X_{i+1}	$-\frac{1}{4R^2}$	$-\frac{1}{2Rl_{i-1}}$	0	$\frac{1}{2R}\left(\frac{1}{l_{i-1}}+\frac{1}{l_i}\right)$	$\frac{1}{4R^2}$	
Z_{i+1}	$\frac{1}{2Rl_i}$	$\frac{1}{l_{i-1}l_i}$	0	$-\frac{1}{l_i}\left(\frac{1}{l_{i-1}}+\frac{1}{l_i}\right)$	$-\frac{1}{2Rl_i}$	$\frac{1}{l_i^2}$

$$\varepsilon=(u_{i+1}-u_i)/l_i+\{w_i+s(w_{i+1}-w_i)/l_i\}/R \qquad (7)$$

$$\varepsilon=(u_{i+1}-u_{i-1})/(l_{i-1}+l_i)+w_i/R \qquad (8)$$

円形アーチの解析における曲線要素の場合，仮定した変位関数が，剛体変形モードを含むか否かが，良好な収束性および精度を確保する上で重要となる．山田は，文献 2）において，円形アーチの有限要素解析に用いられる変位関数の，簡単な評価法を提案している．この評価法を，前述の model(C)，model(P) および model(L) に適用すると，model(P) と model(L) が，剛体モードを含むということがわかる．よって，次節では，model(P) および model(L) による数値計算例を示す．

3. 数値解析例

3.1 弾性解析 線形解の精度を調べるために，開き角 90° の片持円形アーチの解析を行ない，他の曲線要素との比較を行なう．比較に用いた曲線要素を，それぞれの変位関数とともに，以下に示す．

Ⅰ 菊地の部分近似モデル[1]

軸剛性：$u(s)=a_1+a_2s$ （9）

$w(s)=(w_i+w_{i+1})/2$ （10a）

曲げ剛性：（9）式および

$w(s)=a_3+a_4s+a_5s^2+a_6s^3$ （10b）

（β は要素の開き角の 1/2）

Ⅱ 菊地モデルの変形（山田[2]）

（10a)式の代わりに

$w(s)=(w_i+w_{i+1})/2+R\beta(\theta_i-\theta_{i+1})/6$ （11）

Ⅲ 菊地モデルの変形（山田[2]）

（10a)式の代わりに

$w(s)=(w_i+w_{i+1})/2+R\beta(\theta_i-\theta_{i+1})/6$
$+\beta(u_i-u_{i+1})/2$ （12）

Table 1（b） Axial stiffness matrix

	u_i	w_i	u_{i+1}	w_{i+1}
X_i	$\frac{1}{l_i}$	sym. $(\times EA)$		
Z_i	$-\frac{1}{2R}$	$\frac{l_i}{4R^2}$		
X_{i+1}	$-\frac{1}{l_i}$	$\frac{1}{2R}$	$\frac{1}{l_i}$	
Z_{i+1}	$-\frac{1}{2R}$	$\frac{l_i}{4R^2}$	$\frac{1}{2R}$	$\frac{l_i}{4R^2}$

Ⅵ 本報告で提案した新しい離散化モデル（model(P)）

解析は，矩形断面アーチ（深さ t）に対し，$R/t=20$, 180 の場合について行なった．

得られた収束曲線を，曲線要素 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの収束曲線[2]とともに，Fig. 2 と Fig. 3 に示す．本離散化モデルは，1 節点における自由度が 2（他の曲線要素では 3）であるにもかかわらず，同じ要素分割により，かなり良好な精度の解を与えていることがわかる．

3.2 弾塑性解析（極限解析） すでに示したように model(P) の線形解の精度は，きわめて良好であるが，弾塑性解析には，軸剛性と曲げ剛性をともに節点上に集中化した model(L) が，model(P) よりも使いやすい．

Table 2 には，model(P) と model(L) による線形解の誤差の比較を示した．model(L) は，同じ分割数では，model(P) の 2～4倍の誤差を示すものの，変位の収束性に関しては問題がないと見てよい．ところが，境界条件を変えた他の解析例において，軸力の精度が不良となるケースがあった．そこで，弾塑性解析を行なう際，次のように model(L) を若干修正して用いた．すなわち，（7）式および（4b)式の代わりに，

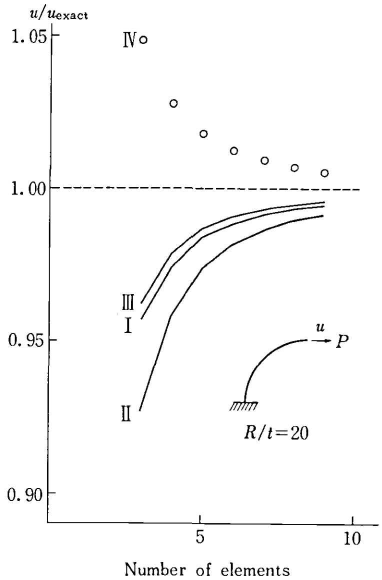

Fig. 2(a)　Convergence curves

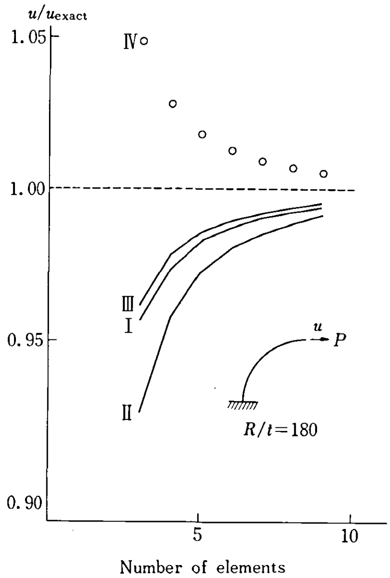

Fig. 2(b)　Convergence curves

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= 2(\tilde{u}_{i+1}-\tilde{u}_i)/(l_{i-1}+l_i)+w_i/R \\ \kappa &= 2\{w_{i-1}/l_{i-1}-(1/l_{i-1}+1/l_i)w_i+w_{i+1}/l_i\}/(l_{i-1} \\ &\quad +l_i)-2(\tilde{u}_{i+1}-\tilde{u}_i)/R(l_{i-1}+l_i) \end{aligned}\right\} \qquad (13a,13b)$$

ここに，$\tilde{u}_i$ と $\tilde{u}_{i+1}$ は，それぞれ Fig. 1 における要素Ⓐ Ⓑおよび Ⓑ Ⓒの中心点の軸方向変位である．model

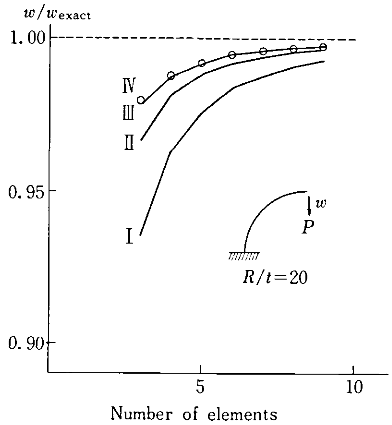

Fig. 3(a)　Convergence curves

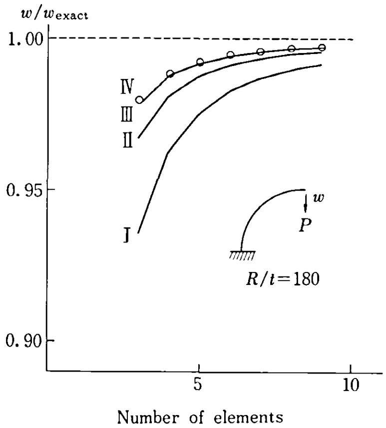

Fig. 3(b)　Convergence curves

(L) を（13a, b）式の形で用いれば，軸力の精度も確保される．

弾塑性解析例として，両端ピン支持で，中央集中荷重を受ける矩形断面アーチ(深さ t)の極限解析を行なう．

解析に先立ち，次の諸無次元量を定義しておく．

合応力：$n=N/N_0$，$m=M/M_0$（ここに，N_0 は全断面塑性軸力，M_0 は全断面塑性モーメント）
形状パラメーター：$h=M_0/2RN_0=t/8R$
荷重：$\bar{P}=PR/2M_0$

Fig. 4 に，降伏曲線を示す．本解析では

$$n^2+m-1=0 \qquad (14)$$

で表される正しい降伏曲線を用いる(図中の実線)　解の比較に用いる Onat と Prager による極限解析では，図中に破線で示す近似曲線を用いている．

Table 2 (a) Comparison of convergence of model (P) and model (L)

Number of elements	Error $(u/u_{exact}-1.0)\times 100$(%) $R/t=20$ model (P)	$R/t=20$ model (L)	$R/t=180$ model (P)	$R/t=180$ model (L)
3	4.83	10.11	4.84	10.01
4	2.77	7.19	2.77	7.08
5	1.79	3.34	1.79	3.24
6	1.25	2.65	1.25	2.56
7	0.92	1.70	0.92	1.61
8	0.70	1.42	0.70	1.33
9	0.56	1.05	0.56	0.96

Table 2 (b) Comparison of convergence of model (P) and model (L)

Number of elements	Error $(w/w_{exact}-1.0)\times 100$(%) $R/t=20$ model (P)	$R/t=20$ model (L)	$R/t=180$ model (P)	$R/t=180$ model (L)
3	−2.04	8.49	−2.04	8.49
4	−1.21	4.65	−1.21	4.65
5	−0.79	2.94	−0.79	2.94
6	−0.56	2.03	−0.56	2.03
7	−0.41	1.48	−0.41	1.48
8	−0.32	1.13	−0.32	1.13
9	−0.25	0.89	−0.25	0.89

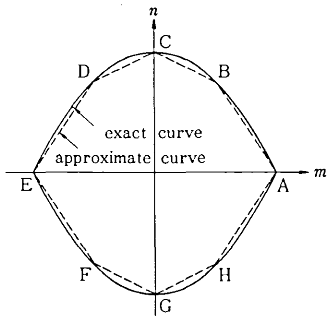

Fig. 4 Yield curves for a circular arch

解析は, 1/2解析とし,要素数は10(等分割)である.

Fig. 5とFig. 6に, 解析結果を示す. Fig. 6では, 本解析結果による最高荷重を, OnatとPragerによる極限解析の結果[3]と比較しているが, アーチの開き角が小さい場合を除いて, 両者は良好に一致している.

4. 結　　論

円形アーチの解析のための新しい離散化モデル(model (P) および model(L))を提案した. その特長は,

(1) 1節点2自由度 (u_i, w_i) の曲線要素である.

(2) model(P)の線形解の精度は, きわめて良好である.

(3) model(L)は, 極限解析への応用が容易である.

(1978年5月1日受理)

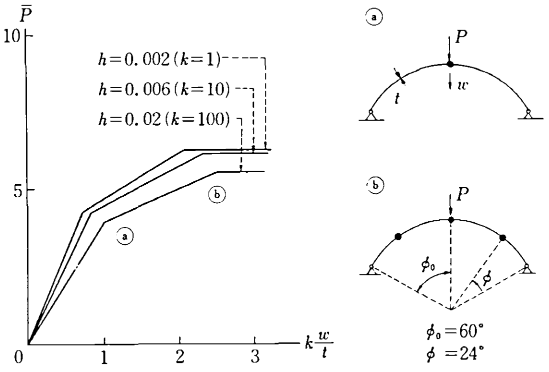

Fig. 5 Elasto-plastic analysis of a pin-supported circular arch subjected to a vertical load at the center (a)

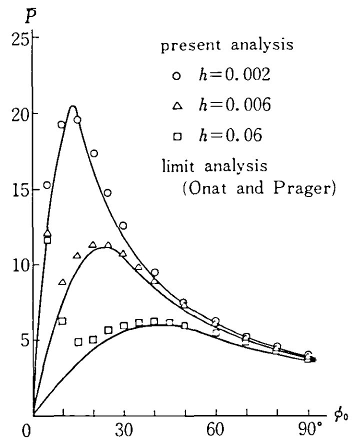

Fig. 6 Collapse load for a pin-supported circular arch subjected to a vertical load at the center

参 考 文 献

1) F. Kikuchi, Theory and Examples of Partial Approximation in the Finite Element Method, Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 10 (1976) 115-122

2) Y. Yamada and Y. Ezawa, On Curved Finite Elements for the Analysis of Circular Arches, Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 11 (1977) 1635-1651

3) P. G. Hodge Jr., Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill (1959)