

# Upper Bound Elemental Technique (UBET) の概要と問題点

— The Basic Concepts of Upper Bound Elemental Technique (UBET) —

木内 学\*

Manabu KIUCHI

塑性加工時の材料の変形にかかわる諸問題を解析する実際的手法として、近年次第に注目を集めつつある Upper Bound Elemental Technique (UBET) について、その基本的な考え方と問題点、および解析モデルの一例を示す。

## 1. ま え が き

塑性加工の諸過程において、材料が与えられた境界条件の下で塑性変形をする場合、境界条件・降伏条件・応力-ひずみ関係式(流動法則)・釣合方程式・適合条件、などの必要条件を満足する、応力・ひずみ・変位の正解を求めることは、通常、極めて困難である。それ故、このような塑性変形に対して従来適用されてきた解析手法は、(1)スラブ法、(2)いり線場法、(3)上界法または上界接近法、(4)有限要素法、など全て、その一部の適用例を除いて、上述の諸条件の一部だけを満足する近似解法としての役割を果たしてきたといえることができる。

このうち上界法または上界接近法は、塑性力学におけるいわゆる第2変分原理あるいは上界定理、すなわち「材料内の任意の動的可容な速度場を仮定した場合、その変形およびすべりの仕事率は、真の外力が材料との接触面においてなす仕事率よりも小さくない」を用いて、加工に要する荷重あるいは消費動力等の上界を求める手法として、種々の加工プロセスへの適用が試みられてきた。この解析手法は、Hillにより基礎となる理論的裏付けがなされた後、工藤・Kobayashi・Avitzur、その他多くの研究者によって理論的な拡張とともに、実際の変形・加工問題への広範な適用が図られ、各種の押出し・引抜き・鍛造加工、等の解析に大きな成果を得たことはよく知られている通りである。(1), (2), (3)

その適用の手順を簡単にまとめると、(1)材料の変形流動状況を近似する適当な動的可容速度場を仮定する、(2)動的可容速度場から、変形に伴う仕事率またはエネルギー消費率を求める、(3)仕事率またはエネルギー消費率を最小にするよう動的可容速度場の修正を図り、可能な範囲内の最適な動的可容速度場を探し出す、(4)最終的に得られた動的可容速度場から、エネルギー消費率と合わせて、加工に要する荷重、その他必要な諸量を算出する、ということになる。エネルギー消費率を最小化する動的可容速度場の検索については、動的可容速度場を仮定する際に、それを規定する主たる因子と考えられるものを可変のパラメータ(準独立変数)として含ませておき、このパラメータの変化を通してエネルギー消費率の最小化を図っていくのが通常採られる方法である。

なお、上述の上界定理について、工藤・高橋による一

般的な数式表示を示すと以下のようになる。<sup>2)</sup>

$$\int_{S_c} \Sigma F_i (\dot{U}_i) dS \leq \int_V \Sigma \Sigma \sigma_{ij}^k \dot{\epsilon}_{ij}^k dV + \int_{\Gamma^k} K \cdot (\Delta \dot{u}_T^k) dS + \int_{S_c} \sigma_f (\Delta \dot{u}_T^k) \cdot dS - \int_{S_F} \Sigma F_i (\dot{u}_i^k) dS \quad (1)$$

ただし、

$\dot{u}_i^k$ : 材料の動的可容速度

$\dot{\epsilon}_{ij}^k, \sigma_{ij}^k$ :  $\dot{u}_i^k$  より求められるひずみ速度、応力

$F_i$ : 外力

$S_F$ : 外力の与えられる境界面

$S_c$ : 外部物体との接触面

$\Gamma^k$ : 動的可容速度場の不連続面

$\dot{U}$ : 外部物体との接触面における速度

$\Delta \dot{u}_T^k$ : 動的可容相対すべり速度

$K$ : 材料のせん断降伏応力

$\sigma_f$ : 相対すべりに要するせん断応力

ところで、上界法または上界接近法の実際加工への適用の面で、近年特に注目されるのは、いわゆる UBET (Upper Bound Elemental Technique) による大規模なシミュレーターの開発である。これは、材料の各領域ごとに仮定した多数の速度場を、コンピューターを用いて連立的・総合的に処理し、複雑な材料の変形流動状況をシミュレートしようとする試みである。この考え方は、工藤による解析モデル<sup>4)</sup>に端を発しているが、其の後しだいに発展をみ、<sup>5)~9)</sup> 現在、Avitzur らは軸対称鍛造を対象とする汎用シミュレーターの開発に成功している。これは、理論的アプローチが非常に難しいと考えられてきた鍛造加工の場において極めて実味的な意味をもつ解析手段の開発と応用という意味から、注目すべき成果と考えることができる。

そこで本稿では、上界接近法の実際加工へのより広範な適用の促進を図るという見地から、この Upper Bound Elemental Technique の基本的概念を、軸対称問題を例にとり、筆者の理解する範囲で、その概略を述べる。

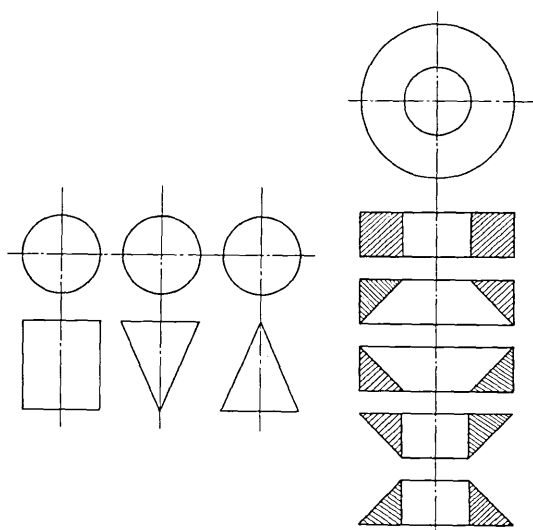
## 2. 要素の分割と境界条件・境界速度

複雑な形状を有する材料の流動状況を適確に把握し、これを動的可容速度場として数式的に表示することは容易ではなく、また仮に可能であったとしても、その動的可容速度場から、解析的な手続きを経て、エネルギー消費率を算出することは、事実上不可能となる場合が多い。

\* 東京大学生産技術研究所 第2部

(ただし、純粋に数値計算のみに頼る場合はこの限りではない。) 工藤は<sup>4)</sup>、このように複雑な変形に関して、材料を解析的に処理しう程度に単純化された動的相容速度場を有するいくつかの要素(Element)に分割し、それらの間の適合を図りつつ連立的に解析を進めることを通して、全体としてのエネルギー消費率の最小化を追求していく考え方を示した。しかしながら、この解析手順そのものも必ずしも簡単ではなく、特に要素の数が増すにしたがって、エネルギー消費率の最小化を図る手続きは急速に複雑化していく。この点については、通常、解析的手法にのみ依存することが期待できないこともあり、いきおい数値計算に頼らざるを得ない面があり、膨大な計算量を必要とするため、当然、コンピュータの導入が考えられるが、その場合にも手法的にはいくつかの可能性を含んでおり、いまだ統一的な考え方は示されていない。

要素に分割する場合、分割方法は種々考えられるが、



(a) 円柱(又は円板), 三角錐 (b) 矩形断面リング, 三角断面リング  
図1 基本的な要素(Element)

実際の意味で取り扱いが容易なのは、図1(a), (b)に示す(1)円柱または円板、(2)三角錐、(3)矩形断面リング、(4)三角断面リング、である。ただし、(1), (2)は(3), (4)の内径=0の場合に相当するので、(3), (4)と特に分離して取り扱う必要はない。もちろん、上記以外にも断面の一部が円弧で構成されるリング、台形断面リング等が考えられるが、解析的処理の複雑化は避け難く、本稿では採り上げない。図2, 3には実際の分割例を示す。図2は前後方押出し、図3は一般化して示した型鍛造の場合である。図3からも推定されるように、上記の要素を用いる場合には、材料または工具の形状は全て直線で近似して置き換える方法が採られる。

分割された要素の境界における速度は、次の条件を満たす必要がある。

- (1) 外部境界に関する速度条件
  - (2) 要素間の境界における垂直速度成分の連続条件
  - (3) 各要素についての体積不変の条件
- (以上、境界速度の適合条件)

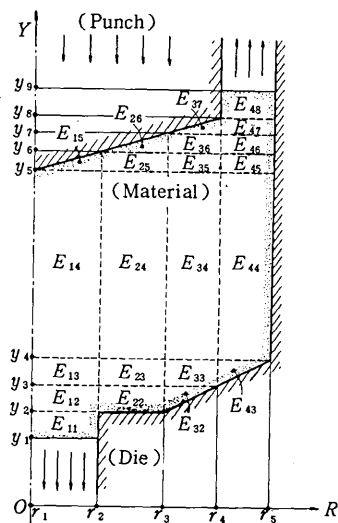


図2 要素への分割の例(要素数=22)

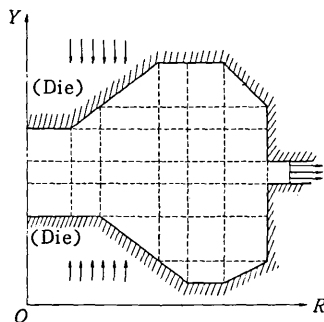


図3 要素への分割の例(要素数=35)

各要素内の動的相容速度場を仮定する場合、その境界速度が出発点となる。分割された要素の境界速度の与え方については種々の可能性があり得るが、問題を複雑化することは、全体的な目的から判断して得策ではない。最も簡便かつ合目的な考え方は、各境界上で垂直速度成分は一樣であるとするものであり、以下の議論はこの仮定に基づいている。

いま、分割された要素の数を $l$ 、外部境界も含めて分割された個々の境界の数を $m$ 、このうち速度が指定されている外部境界の数を $n$ 、とする。材料全体にわたる動的相容速度場を確定するためには、全ての境界における垂直速度成分を定める必要があるが、上記(2)の条件は既に満足されているものとして、 $m$ 個の境界における垂直速度成分のうち、上記(3)の条件を考慮すると、次式で示される数の境界の垂直速度成分が定まらない、言いかえると、任意に与え得ることになる。

$$\text{任意境界(垂直速度成分)の数 } N = m - (l + n) \quad (2)$$

各要素への分割方法を一定とすると、この任意境界における垂直速度成分が、先に述べた可変パラメータ(準独立変数)に相当し、この場合、 $N$ 個の境界とそこでの垂直速度成分の値の組合せを変化させることにより、全体的なエネルギー消費率の最小化を図ることが可能となる。

### 3. 要素の動的相容速度場

矩形断面リングの動的相容速度場の一例を以下に示す

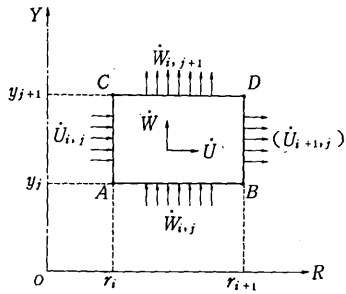


図4 矩形断面リングと境界速度の考え方

(図4参照)．前節で述べた考え方にに基づき、要素の境界上の垂直速度成分は各境界上で一様とし、図4に示すように与えられているものとする．まず、動的可容速度場の一般形を次式のように仮定する．

$$\dot{W} = C_1 Y + C_2 \quad (3)$$

$$\dot{U} = -\frac{1}{2} C_1 R + C_3 / R \quad (4)$$

$C_1, C_2, C_3$  は与えられた条件より定まる定数であるが境界速度の条件を考慮してこれを求めると、次式となる．

$$C_1 = \frac{\dot{W}_{i,j+1} - \dot{W}_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} \quad (5)$$

$$C_2 = \frac{\dot{W}_{i,j} y_{j+1} - \dot{W}_{i,j+1} y_j}{y_{j+1} - y_j} \quad (6)$$

$$C_3 = \dot{U}_{i,j} r_i + \frac{1}{2} \frac{\dot{W}_{i,j+1} - \dot{W}_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} r_i^2 \quad (7)$$

要素の体積一定の条件により、次式が得られるが、

$$-2\pi r_i (y_{j+1} - y_j) \dot{U}_{i,j} + 2\pi r_{i+1} (y_{j+1} - y_j) \dot{U}_{i+1,j} - \pi (r_{i+1}^2 - r_i^2) \dot{W}_{i,j} + \pi (r_{i+1}^2 - r_i^2) \dot{W}_{i,j+1} = 0 \quad (8)$$

これより、 $\dot{U}_{i+1,j}$  は他の境界速度成分の関数として次のように示される．

$$\dot{U}_{i+1,j} = \frac{r_i}{r_{i+1}} \dot{U}_{i,j} + \frac{1}{2} \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{r_{i+1}} \frac{\dot{W}_{i,j} - \dot{W}_{i,j+1}}{y_{j+1} - y_j} \quad (9)$$

他方、(4)式に(5)、(6)を代入し、 $R = r_{i+1}$ とすると、(9)式と同一の  $\dot{U}_{i+1,j}$  の表示式が得られることは容易に示されるが、このことは、後述するように、(3)、(4)式で仮定した動的可容速度場が、その必要条件である体積ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_v = 0$  の条件を満足していることと対応している．

次に、三角形断面リングの動的可容速度場の例を示す(図5参照)．三角形断面リングは、断面が直角三角形である場合にのみ限定して考えているが、その斜辺の位置により4種の場合に分けられ、各々の動的可容速度場の表示が多少異なる．さらに傾斜境界上の速度は、ここでは境界に垂直な速度成分ではなく、座標軸の鉛直方向すなわちY軸方向の速度成分として与えられるものとする．これは、実際加工への適用という面からみると、斜辺境界に対して与えられる速度条件が、Y軸方向からの

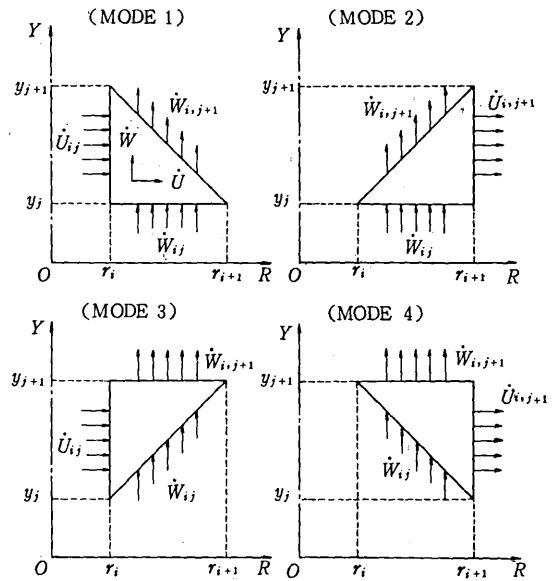


図5 三角形断面リングのモードと境界速度の考え方

ものが大部分となることを考慮したものである．

4種の場合を通じて、三角形断面リングの動的可容速度場の一般形を次式で仮定する．

$$\dot{W} = C_1 \cdot \frac{Y}{R} + f(R) \quad (10)$$

$$\dot{U} = -C_1 (1 + C_2 / R) \quad (11)$$

上式の動的可容速度場が、体積ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_v = 0$  の条件を満足していることも明らかである． $C_1, C_2, f(R)$  は、要素の幾何学的条件と境界速度の条件から定まる．得られた結果のみを示すと、

(MODE 1 の場合)

$$\dot{W} = \dot{W}_{i,j} + \frac{r_i}{r_{i+1} + r_i} \dot{U}_{i,j} (y_j - Y) \frac{1}{R} \quad (12)$$

$$\dot{U} = \frac{r_i}{r_{i+1} + r_i} \dot{U}_{i,j} + \frac{r_{i+1} \cdot r_i}{r_{i+1} + r_i} \dot{U}_{i,j} \frac{1}{R} \quad (13)$$

(MODE 2 の場合)

$$\dot{W} = \dot{W}_{i,j} + \frac{r_{i+1}}{r_{i+1} + r_i} \dot{U}_{i+1,j} (y_j - Y) \frac{1}{R} \quad (14)$$

$$\dot{U} = \frac{r_{i+1}}{r_{i+1} + r_i} \dot{U}_{i+1,j} + \frac{r_{i+1} \cdot r_i}{r_{i+1} + r_i} \dot{U}_{i+1,j} \frac{1}{R} \quad (15)$$

(MODE 3 の場合)

$$\dot{W} = \dot{W}_{i,j+1} + \frac{r_i}{r_{i+1} + r_i} \dot{U}_{i,j} (y_{j+1} - Y) \frac{1}{R} \quad (16)$$

$$\dot{U} = \frac{r_i}{r_{i+1} + r_i} \dot{U}_{i,j} + \frac{r_{i+1} \cdot r_i}{r_{i+1} + r_i} \dot{U}_{i,j} \frac{1}{R} \quad (17)$$

(MODE 4 の場合)

$$\dot{W} = \dot{W}_{i,j+1} + \frac{r_{i+1}}{r_{i+1} + r_i} \dot{U}_{i+1,j} (y_{j+1} - Y) \frac{1}{R} \quad (18)$$

$$\dot{U} = \frac{r_{i+1}}{r_{i+1} + r_i} \dot{U}_{i+1,j} + \frac{r_{i+1} \cdot r_i}{r_{i+1} + r_i} \dot{U}_{i+1,j} \frac{1}{R} \quad (19)$$

動的可容速度場の仮定または選択については、原理的には無数の可能性があるが、Upper Bound Elemental Technique の目的は、多数の要素を連立させることにより、個々の要素については出来るだけ単純かつ汎用性の高い動的可容速度場を採用しようとする点にある。そのような見地から、上記以外にもより以上に好ましい速度場が考えられる可能性は残されており、上述の速度場はあくまでその一例にすぎない。

#### 4. 要素のエネルギー消費率

矩形断面リング内のひずみ速度は、(3), (4)で示される動的可容速度場より次のように求められる。

$$(\dot{\epsilon}_{YY})_{ij} = \partial \dot{W} / \partial Y = (C_1)_{ij} \quad (20)$$

$$(\dot{\epsilon}_{RR})_{ij} = \partial \dot{U} / \partial R = -\frac{1}{2} (C_1)_{ij} - \frac{(C_3)_{ij}}{R^2} \quad (21)$$

$$(\dot{\epsilon}_{\theta\theta})_{ij} = \dot{U} / R = -\frac{1}{2} (C_1)_{ij} - \frac{(C_3)_{ij}}{R^2} \quad (22)$$

$$(\dot{\epsilon}_{RY})_{ij} = (\dot{\epsilon}_{R\theta})_{ij} = (\dot{\epsilon}_{\theta Y})_{ij} = 0 \quad (23)$$

上式から明らかのように、 $(\dot{\epsilon}_v)_{ij} = (\dot{\epsilon}_{YY} + \dot{\epsilon}_{RR} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta})_{ij} = 0$  が成立している。(20)~(23)を用いて、要素内の内部仕事率は、材料の変形抵抗を  $\sigma_0$  として、次式で計算される。

$$[\dot{w}^{(i)}]_{ij} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \sqrt{\frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{YY}^2 + \dot{\epsilon}_{RR}^2 + \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^2)}_{ij} \cdot 2\pi R \cdot dY \cdot dR \quad (24)$$

分割された要素の各境界は、境界に平行な速度成分の不連続面でもあり、隣接する要素間あるいは要素と工具間には相対すべりが発生しうる。いまこの要素間の相対

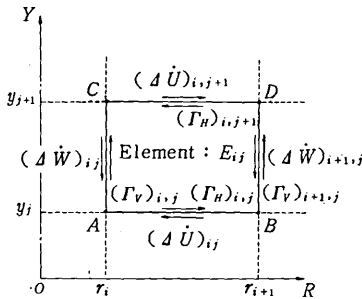


図6 矩形断面リングの水平・鉛直境界上での相対すべり速度

すべり速度を、図6を参照しつつ、矩形断面リング相互の相対すべりの場合について求めると次式のようになる。

$$(\Delta \dot{U})_{ij} = \frac{1}{2} \{ (C_1)_{ij} - (C_1)_{i,j-1} \} R + \{ (C_3)_{ij} - (C_3)_{i,j-1} \} \frac{1}{R} \quad (25)$$

$$(\Delta \dot{U})_{i,j+1} = -\frac{1}{2} \{ (C_1)_{i,j+1} - (C_1)_{ij} \} R + \{ (C_3)_{i,j+1} - (C_3)_{ij} \} \frac{1}{R} \quad (26)$$

$$(\Delta \dot{W})_{ij} = \{ (C_1)_{ij} - (C_1)_{i-1,j} \} Y + \{ (C_2)_{ij} - (C_2)_{i-1,j} \} \quad (27)$$

$$(\Delta \dot{W})_{i+1,j} = \{ (C_1)_{i+1,j} - (C_1)_{ij} \} Y + \{ (C_2)_{i+1,j} - (C_2)_{ij} \} \quad (28)$$

ただし、 $(C_k)_{ij}$ ,  $k = 1, 2, 3$  は(5)~(7)と同形であるが、再録すると、

$$(C_1)_{ij} = \frac{\dot{W}_{i,j+1} - \dot{W}_{ij}}{y_{j+1} - y_j} \quad (29)$$

$$(C_2)_{ij} = \frac{\dot{W}_{ij} y_{j+1} - \dot{W}_{i,j+1} y_j}{y_{j+1} - y_j} \quad (30)$$

$$(C_3)_{ij} = \dot{U}_{ij} r_i + \frac{1}{2} \frac{\dot{W}_{i,j+1} - \dot{W}_{ij}}{y_{j+1} - y_j} r_i^2 \quad (31)$$

取り扱いの簡略化のために、水平な境界を  $(\Gamma_H)_{ij}$ 、鉛直な境界を  $(\Gamma_V)_{ij}$  で表すと、これらの境界上ですべりに伴って消費される、せん断仕事率あるいは摩擦仕事率は次式で求められる。

$$\begin{aligned} [\dot{w}^{(s)}]_{ij} &= m \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_{(\Gamma_H)_{ij}} |(\Delta \dot{U})_{ij}| dS \\ &+ m \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_{(\Gamma_V)_{ij}} |(\Delta \dot{W})_{ij}| dS \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \pi \cdot m \sigma_0 \int_{r_i}^{r_{i+1}} |(\Delta \dot{U})_{ij}| R dR \\ &+ \frac{2}{\sqrt{3}} \pi m \sigma_0 r_i \int_{y_j}^{y_{j+1}} |(\Delta \dot{W})_{ij}| dY \end{aligned} \quad (32)$$

ただし、要素間の塑性的なせん断による相対すべりに対しては、 $m = 1.0$ 、要素と工具間の相対すべりを対象とする場合には、 $0 \leq m \leq 1.0$  と考えるものとする。

三角形断面リングの動的可容速度場は、前節に示した結果より、一般に次のように表示される。

$$\dot{W} = W_{ij}^* + U_{ij}^* (Y_{ij}^* - Y) \frac{1}{R} \quad (33)$$

$$\dot{U} = U_{ij}^* + U_{ij}^* r_{ij}^* \frac{1}{R} \quad (34)$$

ただし、 $W_{ij}^*, U_{ij}^*, Y_{ij}^*, r_{ij}^*$  はそれぞれ要素の幾何学的関係および境界速度の条件より定まる値である。上式より要素内のひずみ速度成分は次のように表される。

$$(\dot{\epsilon}_{YY})_{ij} = \partial \dot{W} / \partial Y = -U_{ij}^* \frac{1}{R} \quad (35)$$

$$(\dot{\epsilon}_{RR})_{ij} = \partial \dot{U} / \partial R = -U_{ij}^* r_{ij}^* \frac{1}{R^2} \quad (36)$$

$$(\dot{\epsilon}_{\theta\theta})_{ij} = \dot{U} / R = U_{ij}^* \frac{1}{R} + U_{ij}^* r_{ij}^* \frac{1}{R^2} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} (\dot{\epsilon}_{RY})_{ij} &= \frac{1}{2} (\partial \dot{U} / \partial Y + \partial \dot{W} / \partial R) \\ &= -\frac{1}{2} U_{ij}^* (Y_{ij}^* - Y) \frac{1}{R^2} \end{aligned} \quad (38)$$

$$(\dot{\epsilon}_{R\theta})_{ij} = (\dot{\epsilon}_{\theta Y})_{ij} = 0 \quad (39)$$

この場合も明らかに、体積ひずみ速度  $(\dot{\epsilon}_v)_{ij} = (\dot{\epsilon}_{YY} + \dot{\epsilon}_{RR} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta})_{ij} = 0$  が成立していることが判る。矩形断面リングの場合と同様、要素内の内部仕事率は次式で計算される。

$$\begin{aligned} [\dot{w}^{(i)}]_{ij} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \sqrt{\frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{YY}^2 + \dot{\epsilon}_{RR}^2 + \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^2 + 2\dot{\epsilon}_{RY}^2)}_{ij} 2\pi R \cdot dY \cdot dR \quad (40) \end{aligned}$$

または、

$$[\dot{w}^{(ii)}]_{ij} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \sqrt{\frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{YY}^2 + \dot{\epsilon}_{RR}^2 + \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^2 + 2\dot{\epsilon}_{RY}^2)}_{ij} 2\pi R \cdot dY \cdot dR \quad (41)$$

ただし、(40)式はMODE 1, 2, (41)式はMODE 3, 4, の三角形断面リングに対応し、 $\alpha$  および  $\beta$  は各モードについ

て各々幾何学的関係より定まる値である。

境界における要素間のすべりに関しては、既に矩形断面リング相互間の相対すべり速度の一般形を示したが、三角形断面リングが関与する場合の相対すべり速度については、次の二つの場合に分けて取り扱う必要がある。すなわち、

- (1) 三角形断面リングの水平・鉛直境界に矩形断面リングが隣接する場合の相対すべり速度。
- (2) 三角形断面リングの傾斜(斜面)境界と鉛直方向にのみ移動する隣接物体(工具)との間の相対すべり速度。

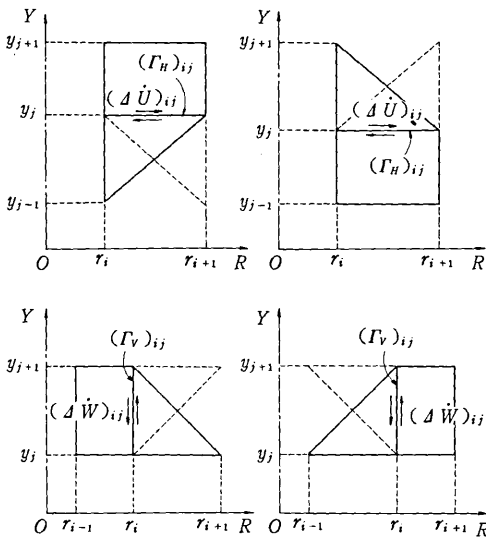


図7 三角形断面リングが関与する場合の水平・鉛直境界上での相対すべり速度

本稿では、三角形断面リングが互いに隣接し合う場合はないものと考えておく(図7参照)。

水平境界  $(\Gamma_H)_{ij}$  上の相対すべり速度  $(\Delta \dot{U})_{ij}$  は、

$$(\Delta \dot{U})_{ij} = \{U_{ij}^* r_{ij}^* - (C_3)_{i,j-1}\} \frac{1}{R} + U_{ij}^* + \frac{1}{2} (C_1)_{i,j-1} \quad (42)$$

または、

$$(\Delta \dot{U})_{ij} = \{(C_3)_{ij} - U_{i,j-1}^* r_{i,j-1}^*\} \frac{1}{R} - U_{i,j-1}^* - \frac{1}{2} (C_1)_{i,j} \quad (43)$$

鉛直境界  $(\Gamma_V)_{ij}$  上の相対すべり速度  $(\Delta \dot{W})_{ij}$  は、

$$(\Delta \dot{W})_{ij} = W_{ij}^* + \frac{1}{r_i} U_{ij}^* Y_{ij}^* - (C_2)_{i-1,j} - \left\{ \frac{1}{r_i} U_{ij}^* + (C_1)_{i-1,j} \right\} Y \quad (44)$$

または、

$$(\Delta \dot{W})_{ij} = (C_2)_{i,j} - W_{i-1,j}^* - \frac{1}{r_{i-1}} U_{i-1,j}^* Y_{i-1,j}^* + \{(C_1)_{i,j} + \frac{1}{r_{i-1}} U_{i-1,j}^*\} Y \quad (45)$$

さらに傾斜(斜面)境界  $(\Gamma_S)_{ij}$  上の相対すべり速度  $(\Delta \dot{V})_{ij}$  は図8を参照して、次式で示される。

$$(\Delta \dot{V})_{ij} = (W_{ij}^* - W_{ij}^* + U_{ij}^* a_{ij}) \sin \phi_{ij} - \delta_{ij}^* U_{ij}^* \cos \phi_{ij}$$

$$- \{U_{ij}^* (Y_{ij}^* - \beta_{ij}) \sin \phi_{ij} + \delta_{ij}^* U_{ij}^* r_{ij}^* \cos \phi_{ij}\} \frac{1}{R} \quad (46)$$

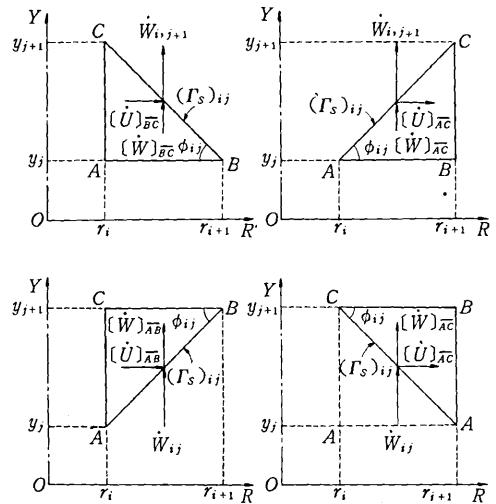


図8 三角形断面リングの傾斜(斜面)境界上での相対すべりに関する速度成分とその正方向

ただし、三角形断面リングの各モードに対応して、 $\delta_{ij}^*$  と  $W_{ij}^{**}$  は次のいずれかを選択する必要がある。

$$\delta_{ij}^* = +1 \text{ or } -1 \quad (47)$$

$$W_{ij}^{**} = \dot{W}_{i,j+1} \text{ or } \dot{W}_{ij} \quad (48)$$

要素の境界上ですべりに伴って消費されるせん断仕事率あるいは摩擦仕事率を、(42)式で示された結果をも合わせて、水平境界  $(\Gamma_H)_{ij}$ 、鉛直境界  $(\Gamma_V)_{ij}$ 、傾斜境界  $(\Gamma_S)_{ij}$  に分けて再整理すると次のようになる。

$$\{\dot{w}^{(s)} : \Gamma_H\}_{ij} = m \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_{(\Gamma_H)_{ij}} |(\Delta \dot{U})_{ij}| dS \quad (49)$$

$$\{\dot{w}^{(s)} : \Gamma_V\}_{ij} = m \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_{(\Gamma_V)_{ij}} |(\Delta \dot{W})_{ij}| dS \quad (50)$$

$$\{\dot{w}^{(s)} : \Gamma_S\}_{ij} = m \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_{(\Gamma_S)_{ij}} |(\Delta \dot{V})_{ij}| dS \quad (51)$$

ただし、係数  $m$  の扱いは既に述べた通りである。

以上の手続きを経て、材料全体に関する内部仕事率・せん断仕事率・摩擦仕事率の総和、すなわち変形に伴うエネルギー消費率は次式で求められる。

$$\{\dot{W}\}_{\text{total}} = \sum_{i,j} \{\dot{w}^{(i)}\}_{ij} + \sum_{i,j} \{\dot{w}^{(s)} : \Gamma_H\}_{ij} + \sum_{i,j} \{\dot{w}^{(s)} : \Gamma_V\}_{ij} + \sum_{i,j} \{\dot{w}^{(s)} : \Gamma_S\}_{ij} \quad (52)$$

## 5. シミュレーションシステムの基本的構成と問題点

上界法または上界接近法の適用手順については既に述べた通りであるが、Upper Bound Elemental Technique (UBET) を応用して、完結したシミュレーションシステムを構成するためには、予め検討しておく必要がある問題点が二、三残されている。それらを列挙すると、

- (1) 対象とする材料または工具のプロファイルを直線

(および、本稿では考慮していないが、曲線)の組合せで近似する場合の近似方法。

(2) (1)の問題と関連して、材料を要素に分割する場合の分割方法。

(3) 任意境界とそこにおける境界速度の組合せの選択方法と、それを通してのエネルギー消費率の最小値の求め方。

(1), (2)の問題点は、用いる要素の種類と数に結びついており、前節までに示した要素以外の要素をも含めて用いる前提に立てば、当然選択の幅は広がり、より実際に即した形で近似方法・分割方法が可能となってくる。また要素の数の増加は、シミュレーション自体としては好ましい方向であっても、計算過程の複雑化と計算時間の増大を伴うものであるから、これを適切な範囲に抑えることは当然考えられなければならない。一方、別の観点からの問題として、(1), (2)の手続きを、一体としてのシミュレーションシステムの中で処理する方向で考えるか、別個に切り離して処理することを前提とするか、という点もある。前者の方向を採れば、近似方法・分割方法についてなんらかの一般的な手法あるいは手続きを構成する必要が生じ、システム自体は非常に複雑化するおそれがある代わりに、システムの利用者に対しては大きな便宜が供されることになる。後者の場合には、個々のケースに対応して柔軟なシミュレーションが可能になることが予想されるが、システムの利用に際しては、ある種の専門的知識あるいはテクニックが必要になってくるものと考えられる。

(3)の問題に関しても、大別して2種類の考え方が可能である。第1は、任意境界の選択を文字通り任意とし、全ての可能性について検討するものであり、第2は、任意境界の範囲を限定する、すなわち、場合によっては任意境界としてとりあげる境界を予め指定し、そこにおける境界速度のみを可変パラメータとして扱う、というものである。シミュレーションの目的から考えれば、原則的には前者の方法を採るべきであるが、要素数が多くなるにしたがって、チェックしなければならない場合の数が急速に増大するために、この方法は事実上無理になることが予想される。他方、後者の方法による場合には、限定する任意境界の範囲が得られる結果に与える影響の問題もあり、範囲の限定に際して、対象とする変形形態に対する洞察力なり経験なりに基づく適確な判断が要求されることになる。

さらに、任意境界が選定された後に、そこにどのような境界速度を配分しつつエネルギー消費率の最小となる条件を見出ししていくかという問題に対しては、モンテカルロ法をはじめとする種々の手法の適用が考えられる。いずれにしても、上述の問題については、いまだ統一的な考え方は示されておらず、今後に残された研究課題といえることができる。

以上の考察をふまえて、シミュレーションシステムの概略のフローチャートを示したのが図9であるが、これは一般論として示した一例であり、個々の場合にはその目的に応じたシステムを構成することが必要であり、また可能でもあろう。

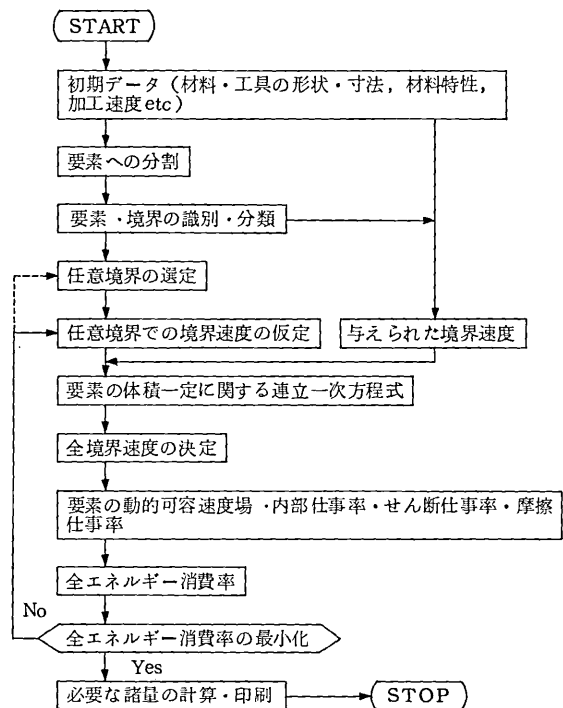


図9 UBETによるシミュレーションシステムの概要

## 6. あとがき

上界法または上界接近法の実際加工問題への適用は、既に述べたように、これまでに多くの研究者によって試みられ、大きな成果を得てきたが、一方においては、その適用の範囲が、単一または、たかだか数個の動的可容速度場によって表現される変形問題に限定されてきたように思われる。これには種々の理由が考えられ、例えば、この解析手法の特質上、任意の動的可容速度場に対して解を求めうるため、単に解を得ることだけでは、その解の有意性が不明確であり、種々の解析的なプロセスを経てエネルギー消費率を最小化する努力がなされて後に、はじめてその有意性を主張できることになると言えるが、そのような解析的な処理を行うことが可能な動的可容速度場の複雑さにおのずから限度があった、ことなどもその一つと考えられる。しかしながら、コンピューターによる高速の数値計算処理により、膨大な数の可能性の中から最良な条件を探し出すことが比較的容易に行いうる現在、この解析手法をより広範な加工問題へ適用することの意味は、動的可容速度場の構成をも含めた解析モデルの規模の拡大と併せて改めて考え直されねばならない。

一方、上界法または上界接近法が、いろいろな手法法の弱点、たとえば解の精度と信頼性、などを有しながらなおかつ塑性加工の分野における解析手法として大きな役割を果たすことが期待できるのは、その最大の長所、すなわち、(1)手法が簡明である。(2)実際的な意味で解を求めうる。(3)汎用性が高い、によるものと考えられる。

上述の二つの側面を総合してみると、Upper Bound Elemental Technique の有する今日的な意義とその可能性が理解されてくる。いうまでもなく、この手法も万

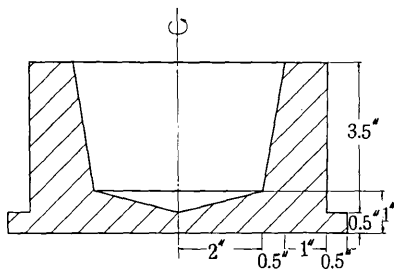


図10 解析の対象とした鍛造品の形状と寸法  
(B. Avitzur)

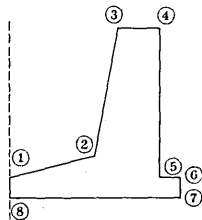


図11 形状・寸法に対応する座標点  
とデータ入力の順序  
(B. Avitzur)

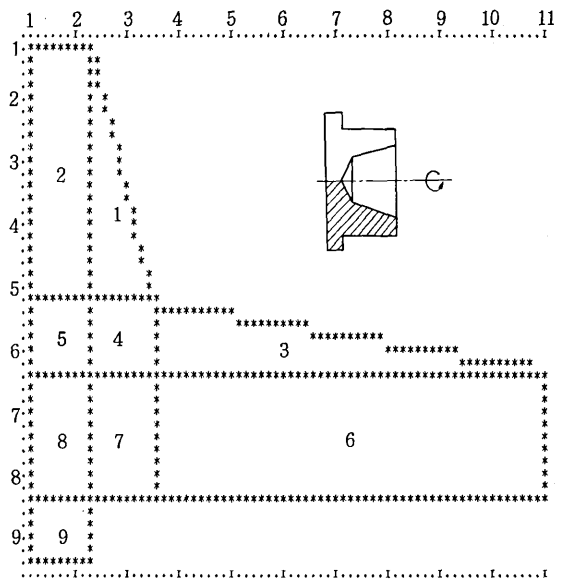


図12 シミュレータが行った要素への分割と分類  
(B. Avitzur)

表1 最終的な結果と印刷例  
(B. Avitzur)

COMMAND-B				
THIS PROGRAM CALCULATES THE UPPER BOUND SOLUTION FROM THE DATA GENERATED IN FORGE. THE SOLUTION MAY BE OBTAINED MANUALLY OR BY MEANS OF AN AUTOMATIC OPTIMIZER				
ENTER FRICTION				
0.05 (摩擦係数)				
ENTER FLOW STRESS				
1.0 (材料の変形抵抗)				
FINAL VELOCITY FIELD				
(要素No)	(上方向境界速度) VSUBT	(左方向境界速度) VSURL	(下方向境界速度) VSUBB	(右方向境界速度) VSUBR
1	-.1000000E+01	.0	-.9999697E+00	.6051672E-04
2	-.9999697E+00	.0	.0	.1999939E+01
3	-.1000000E+01	.0	-.9999182E+00	.1226359E-04
4	-.9999182E+00	.6051672E-04	-.9998167E+00	.1397618E-03
5	-.9998167E+00	.1999939E+01	.0	.2499787E+01
6	-.1000000E+01	.1226359E-04	-.1000031E+01	.0
7	-.1000031E+01	.1397618E-03	-.1000089E+01	.0
8	-.1000089E+01	.2499787E+01	.0	.3500000E+01
9	-.1000000E+01	.3500000E+01	.0	.4000000E+01
TOTAL DEFORMATION ENERGY		TOTAL SHEAR ENERGY		FORGING LOAD
50.269783		77.245716		127.515499
STOP COMMAND-				

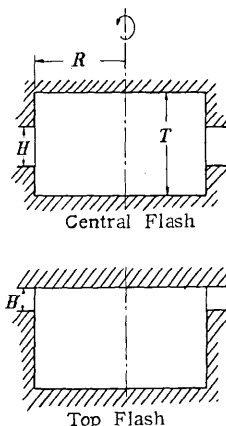
能ではなく、それなりの問題点や適用限界を有している。しかしながら、これまで解析の手が届かなかった分野への、極めて現実的な意味でのアプローチの手段を与えてくれることは期待できると言えよう。 Upper Bound

Elemental Technique を実際加工の分野へ大規模に適用する努力が本格的になされるようになったのは、過去数年来のことであり、これまでに得られた成果は、それによってこの手法の将来性を評価するのに十分とは言

表2 Flash の位置と寸法が鍛造荷重に与える影響の計算例  
(B. Avitzur)

$$R=T=1 \quad \sigma_0=1 \quad m=0$$

Size H	Flash Position	Central	Top or Bottom
1.0		3.141593	3.141593
.95		4.414434	3.778013
.90		4.485148	3.813370
.85		4.564180	3.852887
.80		4.653092	3.897342
.75		4.753859	3.947726
.70		4.869021	4.005307
.65		5.001900	4.071746
.60		5.156925	4.149259
.55		5.340137	4.240865
.50		5.559992	4.350792
.45		5.828703	4.485148
.40		6.164592	4.653092
.35		6.596449	4.869021
.30		7.172258	5.156925
.25		7.978391	5.559992
.20		9.187591	6.164592
.15		11.202923	7.172258
.10		15.233588	9.187591
.05		27.325584	15.233588



難いが、その動向は看過できないものがあり、我々としても積極的に検討すべきである問題として考えられる。

本稿は、筆者が文部省長期在外研究員として Lehigh University (U.S.A.) に滞在中にまとめたものである。本稿をまとめるに際して、同大学の Prof. B. Avitzur に貴重な資料ならびに助言をいただいた。ここに深く謝意を表する次第である。既述のように、Prof. B. Avitzur らは UBET による軸対称鍛造用汎用シミュレータの開発に成功しているが、本稿に示した解析モデルは、筆者が独自に作成を試みたものであり、上記汎用シミュレータとは直接関係ないことをお断りしておく。

なお、図10以下に Prof. B. Avitzur のご協力を得て、Lehigh Univ. において開発された上記汎用シミュレータの適用例を示す。図10は対象とした製品の形状を、図11は入力としてのデータの与え方を示し、番号順に各点の座標の値を Input する。図12はシミュレータが自ら行った要素への分割の結果を示す。表1は最終結果であり、図12に示された各要素の境界速度およびエネルギー消費率・鍛造荷重等が示されている。表2は別の適用性であり、図に示す Flash の位置と寸法が鍛造荷重に与える影響を系統的に調べた結果である。シミュレータは対話形式で極めて使い易いようによく整備されており、利用者は要約されたマニュアルおよびシミュレータからの求めに従って、材料の形状・寸法に対応する各点の座標、変形抵抗、摩擦係数 ( $m$ ) 等を Input すればよく、特別な知識・経験等一切必要としない。

(1977年12月3日受理)

#### 参 考 文 献

- 1) R. Hill, "Mathematical Theory of Plasticity" (鷲津, 山田, 工藤訳「塑性学」, 培風館)
- 2) 工藤英明, 「塑性学」(昭44, 森北出版)。
- 3) B. Avitzur, "Metal Forming: Processes and Analysis", McGraw Hill, 1968
- 4) H. Kudo, "Some Analytical and Experimental Studies of Axisymmetric Cold Forging and Extrusion," Int. J. of Mechanical Science, Part I, II, 1960-1961
- 5) B. Avitzur, "Forging of Hollow Discs", Israel Journal of Technology, Vol. 2, No 3, 1964
- 6) B. Avitzur, W. Hahn, and M. Mori, "Analysis of Combined Backward - Forward Extrusion", ASME Paper No. 75-Prod - C, 1974
- 7) R. P. McDermott and A. N. Bramley, "An Elemental Upper - Bound Technique for General Use in Forging Analysis," Paper 29, MTDR 15, Birmingham, 1974
- 8) A. S. Cramphorn, A. N. Bramley and R. P. McDermott, "UBET Related Developments in Forging Analysis" Proceedings of the 4-th North American Metal Working Research Conference, NAMRC - N, 1976
- 9) B. Avitzur, "Metal Forming: The Application of Limit Analysis", Annual Review of Material, 1977, Annual Review Inc.