

低次の形状関数要素モデルをもちいた梁柱 塑性安定問題の有限要素解析

Finite Element Analysis of Plastic Stability Problem of a Beam-Column
by using Elements of the Lower Order Shape Functions

近藤 一夫*・川井 忠彦*

Kazuo KONDOU and Tadahiko KAWAI

1. 緒 言

著者らは、先に、要素内形状関数をすべて線形とし、高次の微分量は、差分によりこれを評価するという新しい梁柱モデルの提案を行ない、大変形問題を中心とした幾何学的非線形問題に対して、有効であることを明らかにした^{2,3)}。今回、これを材料非線性を含めた形に拡張し良好な結果が得られたので報告する。

2. 理 論

2.1 梁柱の変位及びひずみ場

大変形領域における梁柱の変位場は次式で与えられる (Fig. 1)

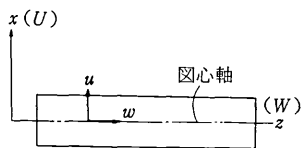


Fig.1 座標系の定義

$$\left. \begin{aligned} U(x, z) &= u(z) - x \left\{ 1 - \frac{(1+w'(z))}{\sqrt{(1+w'(z))^2 + (u'(z))^2}} \right\} \\ W(x, z) &= w(z) - x \cdot \frac{u'(z)}{\sqrt{(1+w'(z))^2 + (u'(z))^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} U(x, z), W(x, z) &: \text{任意点の変位} \\ u(z), w(z) &: \text{図心上の変位} \\ &: \partial/\partial z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(1)式は、断面剛の仮定に基づく厳密な表示式であり、どんな大変形に対しても成立する。

次にひずみは、次式で与える。

$$\epsilon_z = \sqrt{(1+W')^2 + (U')^2} - 1 \quad (3)$$

(1)式を(3)式に代入すると

$$\epsilon_z = \epsilon_D - \kappa x \quad (4)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_D &= \sqrt{(1+w')^2 + (u')^2} - 1 && \text{(図心上の歪)} \\ \kappa &= \left\{ \frac{(1+w') u'' - w'' u'}{\{(1+w')^2 + (u')^2\}} \right\} && \text{(曲率)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

である。なお、これらの誘導には、省略項はまったくないことを強調しておく。すなわち、(1)式の変位場をもちい、(3)式のようにひずみを定義すると、そのひずみ場は、厳密な形で(4)式ようになる。

2.2 低次の形状関数をもちいた新しい梁性モデル

このモデルでは、変位の場合としてすべて線形の場合を与

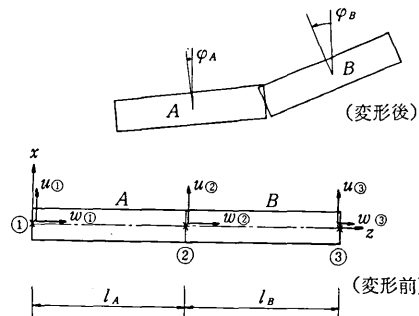


Fig.2 新しい梁柱モデル

える。すなわち、Fig. 2のA要素について考えると、

$$\left. \begin{aligned} u_A(z) &= (1-z/l_A) u_{\text{①}} + z/l_A u_{\text{②}} \\ w_A(z) &= (1-z/l_A) w_{\text{①}} + z/l_A w_{\text{②}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となる。(6)式をもちいれば、これらの1階微分量が要素内で一定となり、非線形項の算定が極めて容易になる。

次に、(6)式の変位場をもちいた場合の ϵ_D 及び κ は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_D|_A &= \frac{1}{l_A} \sqrt{(l_A + w_{\text{②}} - w_{\text{①}})^2 + (u_{\text{②}} - u_{\text{①}})^2} - 1 \\ \kappa|_{\text{②}} &= \frac{2}{l_A + l_B} (\varphi_B - \varphi_A) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに $|_A$ はA要素の、 $|_{\text{②}}$ は②における値の意であり、また、 φ_A, φ_B は、剛体としてのAおよびB要素の回転量である。

*東京大学生産技術研究所 第2部

研究速報

(7)式のうち、 ϵ_D は(6)式から直接誘導できるが、 κ については、(6)式の2階微分量がゼロとなり算定できない。そこで、差分法をもちいて、これを評価したものである。なお、(7)式の誘導についても、この差分式をもちいた以外、近似はまったく入っていない。すなわち、(5)式の複雑な関係式が(6)式の要素内変位場をもちいることにより、物理的に極めて把握しやすい形に表現できる。(ϵ_D はトラスとしての変形、 κ は折れ曲がり角)。

さて、ここで(7)式とは異なる κ の定義式を導いておく。すなわち、A要素とB要素の間に、回転の自由度をもつピン要素を考える。(Fig.3)このピン要素と、A及び

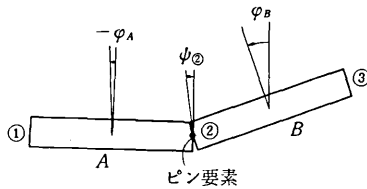


Fig.3 ピン要素

B要素に、差分式を適用すると、

$$\left. \begin{aligned} \kappa_A|_2 &= \frac{2}{l_A} (\psi_2 - \varphi_A) \\ \kappa_B|_2 &= \frac{2}{l_B} (\varphi_B - \psi_2) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに、 $\kappa_A|_2$ 、 $\kappa_B|_2$ は、②におけるAおよびB要素に関する量の意である。(8)式は、固定の境界条件を取り入れたり、また、外力としてモーメントが与えられる場合有効なものである。すなわち、このピン要素の回転自由度を独立なものとして扱えば、これらの処置が容易となる(Fig.4)。また、材が塑性化した場合に、より

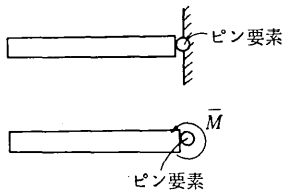


Fig.4 境界条件、荷重モーメントの処理

精度を上げるためにも有効となる。なお、Fig.3に示すようなピン要素は、弾性域の場合には

$$\kappa_A|_2 = \kappa_B|_2 \quad (9)$$

であるから

$$\psi_2 = \frac{1}{l_A + l_B} (l_A \varphi_B + l_B \varphi_A) \quad (10)$$

となる。したがって、

$$\kappa_A|_2 = \kappa_B|_2 = \frac{2}{l_A + l_B} (\varphi_B - \varphi_A) \quad (11)$$

となり、(7)式と同じものになる。

ところで、ここで注意すべき点は ϵ_D と κ についてその積分領域が異なることである。すなわちFig.5に示す

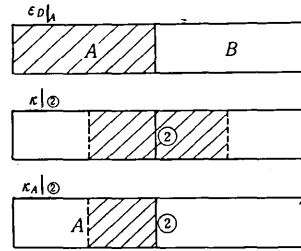


Fig.5 積分領域

ように、 ϵ_D については従来のF.E.Mと同じく各要素について行なえばよいが、 κ については隣接要素の各半分について行なう必要がある。

2.3 増分理論による定式化

この梁要素を用いた増分理論による定式化は有限要素法の標準的手法に従って行なうと結局次式のような剛性方程式が得られる^{1,2)}。

$$(\mathbf{K}^D + \mathbf{K}^* + \mathbf{K}^{D*} + \mathbf{K}_G^D + \mathbf{K}_G^*) \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{Q} + \epsilon^D + \epsilon^* \quad (12)$$

ここに、上添字Dは ϵ_D に、 κ は κ に関するものの意であり、下添字Gは、初期応力マトリックスを意味する。また、 $\Delta \mathbf{Q}$ は外力増分を、 ϵ は不釣合力を表している。弾性域における(12)式の諸量については、文献2)に掲げているので、ここでは、塑性化した場合に必要なお操作について述べる。

一般に塑性化した場合、(7)式の増分形の $\Delta \kappa$ を使用したのでは

$$\Delta \epsilon_D|_A \neq \Delta \epsilon_D|_B \quad (13)$$

であるから

$$\Delta M_A|_2 \neq \Delta M_B|_2 \quad (14)$$

となる。 $\Delta M_A|_2 = \Delta M_B|_2$ を実現するためには、 $\Delta \kappa$ として、(8)式の増分形をもちいる必要がある。そして $\Delta \psi$ についての平衡条件から $\Delta \psi$ を求め、これを(8)式の増分形に代入したものを $\Delta \kappa_A|_2$ 及び $\Delta \kappa_B|_2$ とする。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \Delta \kappa_A|_2 &= [l_B (C_{21B}|_2 \Delta \epsilon_D|_B - C_{21A}|_2 \Delta \epsilon_D|_A) \\ &\quad + 2C_{22B}|_2 (\Delta \varphi_B - \Delta \varphi_A)] / (C_{22A}|_2 l_B + C_{22B}|_2 l_A) \\ \Delta \kappa_B|_2 &= [l_A (C_{21A}|_2 \Delta \epsilon_D|_A - C_{21B}|_2 \Delta \epsilon_D|_B) \\ &\quad + 2C_{22A}|_2 (\Delta \varphi_B - \Delta \varphi_A)] / (C_{22A}|_2 l_B + C_{22B}|_2 l_A) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここに

$$C_{21} = \int c z \cdot dA$$

$$C_{22} = \int c z^2 dA \quad (16)$$

$$\Delta \sigma_z = C \Delta \epsilon_z$$

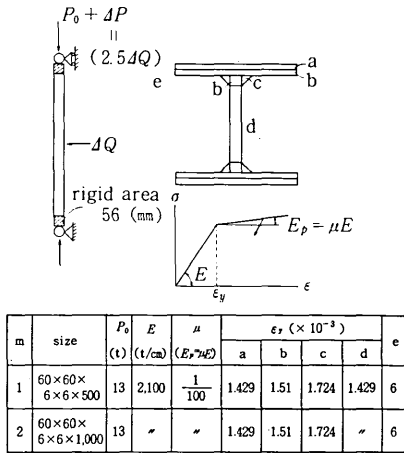


Fig. 6 試験体の形状寸法外力、及び材料定数 (漸増荷重)

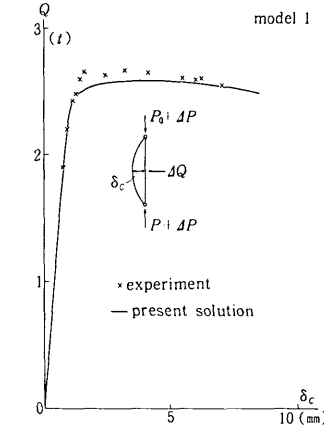


Fig. 7 荷重-たわみ曲線 (漸増荷重)

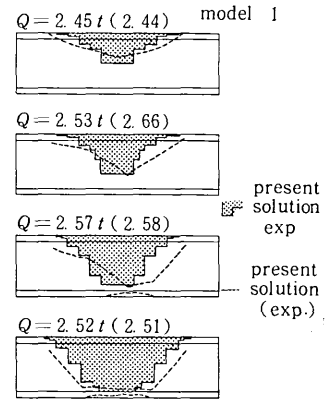


Fig. 8 塑性域の進展 (漸増荷重)

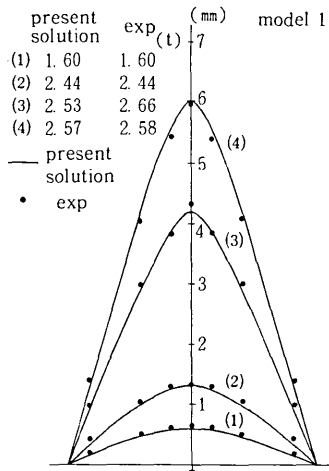


Fig. 9 梁柱のたわみ形状 (漸増荷重)

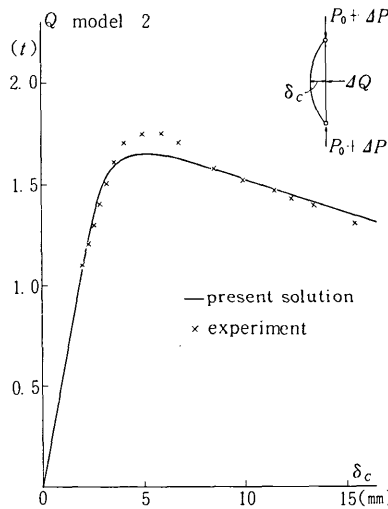


Fig. 10 荷重-たわみ曲線 (漸増荷重)

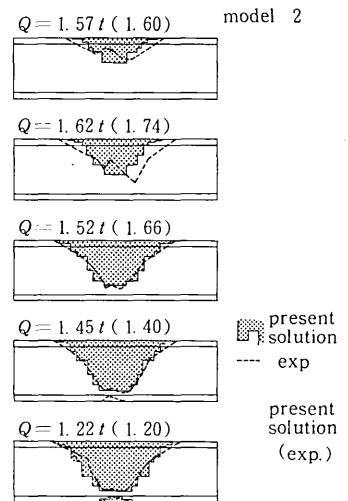


Fig. 11 塑性域の進展 (漸増荷重)

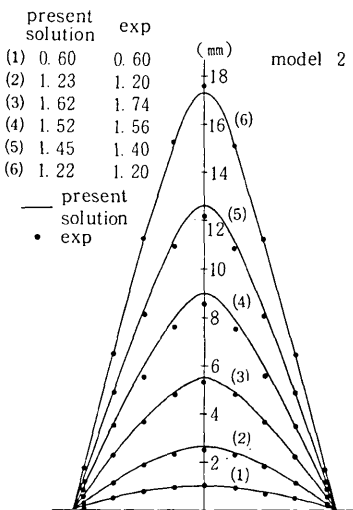


Fig. 12 梁柱のたわみ形状 (漸増荷重)

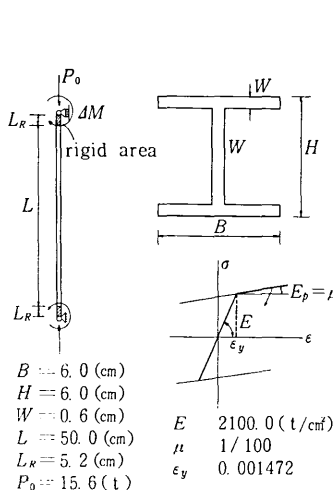


Fig. 13 試験体の形状寸法、外力及び材料定数 (くり返し荷重)

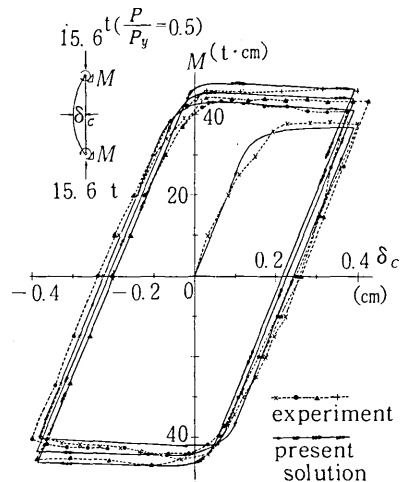


Fig. 14 荷重-たわみ曲線 (くり返し荷重)

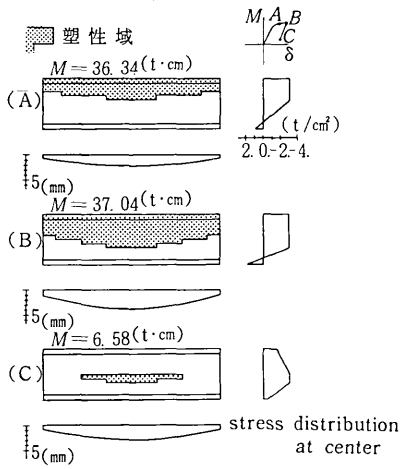


Fig. 15 塑性域の進展，モーメント-たわみ関係及び中央点に於ける応力分布（くり返し荷重-その1）

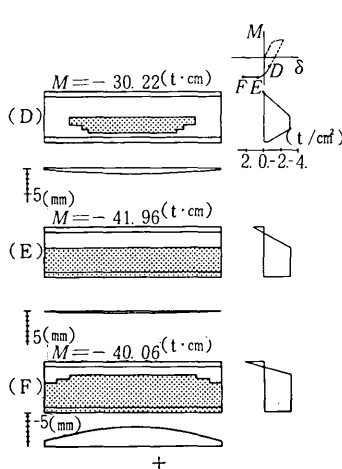


Fig. 16 塑性域の進展，モーメント-たわみ関係及び中央点に於ける応力分布（くり返し荷重-その2）

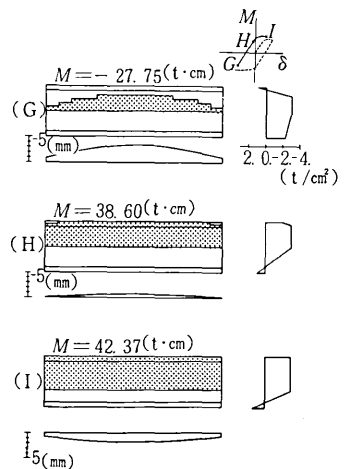


Fig. 17 塑性域の進展，モーメント-たわみ関係及び中央点に於ける応力分布（くり返し荷重-その3）

(19式)をもちいると一般に

$$\Delta \kappa_A \approx \Delta \kappa_B \quad (17)$$

となるが、

$$\Delta M_A \approx \Delta M_B \quad (18)$$

が成立する。塑性化した場合には、明らかにひずみの連続性よりも、応力の連続性が優先するから、(19式)は妥当なものと思われる。

3. 解析例

本モデルの弾塑性域における精度チェックのため、漸増及びくり返し荷重を受ける柱の弾塑性解析を行ない、実験結果と比較した。モデルは漸増荷重については2体またくり返し荷重については1体である。Fig. 6～Fig. 18に、材料定数及び解析結果等を示す。この結果から、実験値と解析値が極めてよい一致を示しており、本モデルが弾塑性性においても十分な精度をもつことがわかる。

なお、解析は、対称性を利用して、1/2解析を行っており、要素数は10、全自由度は22である。また、深さ方向についてのエネルギー積分は、20層に分割し、重心点評価を行っており、計算時間は1 stepで約0.2秒（東大計算センター-8700/8800）であった。

4. 結論

要素内変位場をすべて線形の場合とする新しい梁性モデルをもちいて、梁柱の弾塑性解析を行ない、本モデルが弾塑性域においても十分な精度をもつことが明らかとなった。なお、比較した実験は、広島大学工学部椋代研究室で行なわれたものであり、そのデータを借用した。ここ

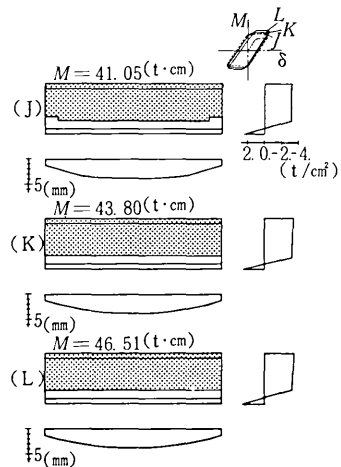


Fig. 18 塑性域の進展，モーメント-たわみ関係及び中央点に於ける応力分布（くり返し荷重-その4）

に深く感謝します。

(1977年11月19日受理)

参考文献

- 1) 鷲津：弾塑性学の変分原理概論，コンピュータによる構造工学講座II-3-A，培風館，1971
- 2) 近藤，川井：低次の形状関数をもちいた梁柱の座屈及び大変形問題の解析，日本造船学会論文集 第142号，S 52
- 3) 川井，近藤：新しい離散化モデルによる梁柱の座屈解析，日本鋼構造協会第11回大会研究集会 マトリックス解析法研究発表論文集，S 52