

低次の形状関数をもちいた板曲げ問題の有限要素解析

Finite Element Analysis of Plate Bending Problems by using of the Lower Oder Shape Functions

近藤 一夫*・椎名 章二*・川井 忠彦*

Kazuo KONDOU, Shyoji SHIINA and Tadahiko KAWAI

1. 緒言

F.E.Mは数値解析手法として、極めて有効であり、線形、非線形を問わず、原理的にはほどほどの解が得られる程度にまで開発されてきている。しかしながら、これは経済面をほとんど無視しての議論であり、特に、多数回のくり返し計算を必要とする非線形問題を扱うには問題が多く、さらに簡略化された離散化手法を考案する必要がある。

さて、著者等は、先にF.E.Mと差分法を併用した新しい離散化手法を考案し、梁柱の座屈、大変形問題に適用した結果、この手法が有効であることを確認した⁵⁾。この新しい離散化手法は、要素内変位の場として、すべて線形の場を与え、変位の2階以上の微分に依存する量は差分により、これを評価しようとするものである。

変位・歪関係の非線形性は、変位の1階の微分に依存する。したがってこの量が要素内で一定となるこの離散化手法は、材料非線形性を含め、特に非線形領域において有効(エネルギー積分の要なし)なものである。

本論文では、この離散化手法を板曲げ問題に適用し、新しい板曲げ要素を提案する。そして、この要素の精度がどの程度であるか確認するため、静変形、振動、座屈の基礎的問題について解析を行った。

2. 理論

2-1. 支配仮想仕事式²⁾

微小変形、あるいは微小変形有限歪と呼ばれる領域における板(薄板)の変位場は次式で与えられる(図1)。

$$\left. \begin{aligned} U(x,y,z) &= u(x,y) - zw(x,y),_x \\ V(x,y,z) &= v(x,y) - zw(x,y),_y \\ W(x,y,z) &= w(x,y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

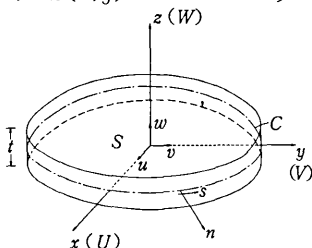


図1 座標系の定義

この変位場をもちいた曲げに関する*) 静変形、振動、座屈の各問題に対する仮想仕事式は次のようになる。

$$\circ \text{静変形問題: } \delta V - \delta W = 0 \quad (2)$$

$$\circ \text{振動問題: } \delta V - \delta T = 0 \quad (3)$$

$$\circ \text{座屈問題: } \delta V - \delta W^{(0)} = 0 \quad (4)$$

ここに

$$\delta V = \delta \iint_S \frac{D}{2} [(w,_{xx} + w,_{yy})^2 + 2(1-\nu) (w,_{xy})^2 - w,_{xx} w,_{yy}] dx dy \quad (5)$$

$$\delta W = \iint_S \bar{F}_2 \delta w dx dy + \int_{C_0} (\bar{M}_n \delta w,_{,n} + \bar{M}_{ns} \delta w,_{,s} + \bar{Q}_n \delta w) ds \quad (6)$$

$$\delta T = - \iint_S \frac{T}{g} \dot{w} \delta w dx dy \quad (7)$$

$$\delta W^{(0)} = \iint_S \{ N_x^{(0)} w,_{,x} + N_y^{(0)} w,_{,y} + N_{xy}^{(0)} (w,_{,x} \delta w,_{,y} + w,_{,y} \delta w,_{,x}) + N_y^{(0)} w,_{,y} \delta w,_{,y} \} dx dy \quad (8)$$

であり、 w は幾何学的境界条件を満足するものとする。

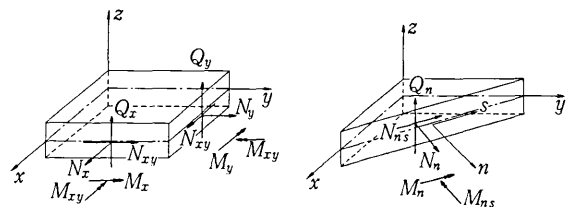


図2 合応力、合モーメントの定義

2-2. 新しい板曲げ要素

2-2-1. 変位場

要素内変位場は、面内、面外とも線形の場とする。すなわち、図3のA要素について考えると

$$\left. \begin{aligned} u(x,y) &= [1 \ x \ y] \mathbf{c} \mathbf{u} \\ v(x,y) &= [1 \ x \ y] \mathbf{c} \mathbf{v} \\ w(x,y) &= [1 \ x \ y] \mathbf{c} \mathbf{w} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

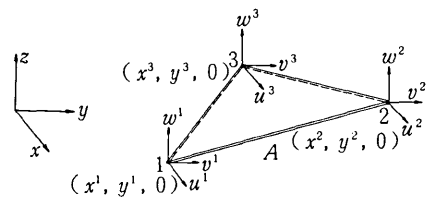


図3 新しい板曲げ要素(a)

* 東京大学生産技術研究所 第2部

*) 面内変位 (u, v) は省略する

研究速報

ここに

$$c = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} u^T &= [u^1 \ u^2 \ u^3] \\ v^T &= [v^1 \ v^2 \ v^3] \\ w^T &= [w^1 \ w^2 \ w^3] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

であり、 u^i, v^i, w^i は、各節点における変位である。従来のF.E.Mでは、 u, v については(9)式と同様であるが、 w については、さらに高次の場がもちいられていた。この w もまた、線形の場合とくのが本モデルの特長である。

2-2-2. 変位-歪関係

変位の1階の微分は、(9)式を直接微分すればよい。

(u, v は板曲げ問題に直接関係ないので以後省略する)問題は、2階の微分(すなわち曲率、捩り率)の評価である。ここで、差分式をもちいる。

ところで、板のような二次元問題において、任意の要素分割に対して適切な差分式を導くことは、1次元問題のように簡単ではない。そこで、この差分式を導くためハイブリッド型のHellinger-Reissnerの原理をもちいる。板曲げの静変形問題に関するハイブリッド型Hellinger-Reissnerの原理の汎関数は次式で与えられる¹⁾(図4)

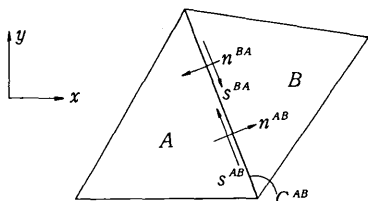


図4 新しい板曲げ要素(b)

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{S^A} [-B(M_x, M_y, M_{xy}) - M_x w_{,xx} - M_y w_{,yy} \\ & - 2M_{xy} w_{,xy} - \bar{P}_z w] dx dy + \int_{C^0} [-\bar{Q}_n w \\ & + \bar{M}_n w_{,n} + \bar{M}_{ns} w_{,s}] ds + \int_{C_u} [-Q_n (w - \bar{w}) \\ & + M_n (w_{,n} - \bar{w}_{,n}) + M_{ns} (w_{,s} - \bar{w}_{,s})] ds \end{aligned} \quad (12)$$

ここに B : コンプリメンタリエネルギー

$$H^{AB} = \int_{C^{AB}} \lambda^{AB} (w_{,n}^A n^{AB} + w_{,n}^B n^{BA}) ds \quad (13)$$

であり、停留条件から λ^{AB} は

$$\lambda^{AB} = M_{n^{AB}}^A = M_{n^{BA}}^B \quad (14)$$

という物理的意味をもっている。

なお、(12)式は要素境界において、 w の連続性が保障されているという条件をもちいている。

さて、(12)式の汎関数を利用するため(9)式の変位場のほかに、要素境界に剛性も、質量ももたない棒要素を考えこれに回転の自由度を与える。この棒要素の変位は両端の変位により決定する(図5)。また要素内モーメントを

$$\tilde{M}_x^A, \tilde{M}_y^A, \tilde{M}_{xy}^A \quad (15)$$

とし、要素内で一定であるとする。

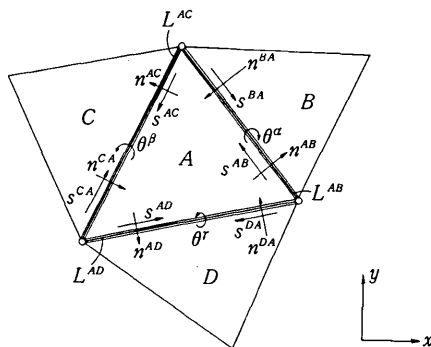


図5 新しい板曲げ要素(c)

さて、 A 要素と α 要素(棒要素)の折れ曲がり角及び B 要素と α 要素の折れ曲がり角は、それぞれ

$$\theta^\alpha + w^A, n^{AB}, \theta^\alpha + w^B, n^{BA} \quad (16)$$

となる。したがって(13)式は次式で与えられる。

$$H^{AB} = [\tilde{M}_{n^{AB}}^A (\theta^\alpha + w^A, n^{AB}) + \tilde{M}_{n^{BA}}^B (-\theta^\alpha + w^B, n^{BA})] L^{AB} \quad (17)$$

(9)式、(16)式及び(17)式を(12)式に代入すれば、要素内変位線形、要素内応力一定でさらに要素境界に回転の自由度をもつ板曲げ要素の汎関数を得る。この汎関数を

$$\tilde{\Pi} = 0 \quad (18)$$

とする。ところで(18)式の θ^i 、及び $\tilde{M}_x^i, \tilde{M}_y^i, \tilde{M}_{xy}^i$ に関する停留条件を調べてみると

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \theta^\alpha} = 0 \text{ より } \tilde{M}_{n^{AB}}^A = \tilde{M}_{n^{BA}}^B \quad (19)$$

また、 $\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{M}_x^A} = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{M}_y^A} = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{M}_{xy}^A} = 0$ より

$$\left\{ \begin{matrix} \kappa_x^A \\ \kappa_y^A \\ 2\kappa_{xy}^A \end{matrix} \right\} = \frac{1}{A^A} \begin{bmatrix} L^{AB} l_{AB^2} & L^{AC} l_{AC^2} \\ L^{AB} m_{AB^2} & L^{AC} m_{AC^2} \\ 2L^{AB} l_{AB} m_{AB} & 2L^{AC} l_{AC} m_{AC} \\ L^{AD} l_{AD^2} & \\ L^{AD} m_{AD^2} & \\ 2L^{AD} l_{AD} m_{AD} & \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \theta^\alpha + w^A, n^{AB} \\ \theta^\beta + w^A, n^{AC} \\ \theta^\gamma + w^A, n^{AD} \end{matrix} \right\} \quad (20)$$

を得る。なお、(20)式の誘導には、モーメント-曲率関係をもちいている。

さて、(19)式を満足する応力場をもちいると(17)式は

$$H^{AB} = [\tilde{M}_{n^{AB}}^A (w^A, n^{AB} + w^B, n^{BA})] L^{AB} \quad (21)$$

となる。これはHerrmannの導いた板曲げ要素である。⁴⁾

一方(20)式は、応力場を仮定し、応力に関する停留条件をとれば、自動的に変位と歪を結びつける差分公式が得られることを示している。

また、(20)式の変位-歪、及び曲率-モーメント関係を(20)式に代入すると($\tilde{M}_x^i, \tilde{M}_y^i, \tilde{M}_{xy}^i$ は除去)、 $\tilde{\Pi}$ はポテンシャルエネルギーの原理の汎関数となり(但し、幾何学的境界条件は満足するものとする)、通常の変位型に

変換された板曲げ要素が得られる。この板曲げ要素と、Herrmannの板曲げ要素とは、(19)式の停留条件をもちいるか、(20)式の停留条件をもちいるかの違いであり、本質的にまったく同じである。すなわち、(9)式の変位場 (20)式の変位-歪関係をもちいた板曲げ要素は、Herrmannの板曲げ要素の完全な変位型であると考えられる。

また、Herrmannの板曲げ要素は、他の要素との結合あるいは非線形問題への拡張ということを考えて問題があるがこの変位型の要素にはそのような欠点はない。

ところで(20)式の差分公式をもちいた板曲げ要素は θ^i というパラメーターを含んでおり、従来のF.E.M板曲げ要素に比して総パラメータ数はそれほど減少しない。そこで、さらに平均値公式をもちいて θ^i を消去する。(図6)

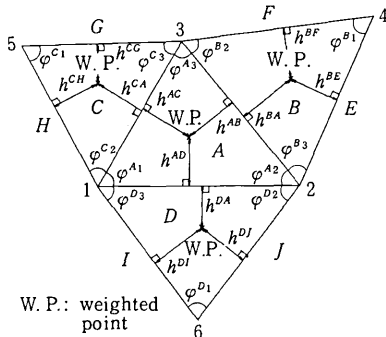


図6 新しい板曲げ要素(d)

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \theta^\alpha &= -\frac{1}{h^{AB} + h^{BA}} (w^B, n^{AB} h^{AB} + w^A, n^{AB} h^{BA}) \\ \theta^\beta &= -\frac{1}{h^{AC} + h^{CA}} (w^C, n^{AC} h^{AC} + w^A, n^{AC} h^{CA}) \\ \theta^\gamma &= -\frac{1}{h^{AD} + h^{DA}} (w^D, n^{AD} h^{AD} + w^A, n^{AD} h^{DA}) \end{aligned} \right\} (22)$$

(22)式を(20)式に代入した変位-歪関係をもちいた板曲げ要素は、1節点1自由度であり、従来のF.E.M板曲げ要素の $\frac{1}{3}$ である。また、変位の1階の微分量が要素内ですべて一定となり、非線形項の取り扱いが容易である。したがって、大変形問題を中心とした非線形領域における解析には非常に有利であると思われる。

2-2-3. 境界条件について

この板曲げ要素で問題となる境界条件は、 \tilde{w}_n (on C_u) あるいは \tilde{M}_n (on C_o) が与えられている場合であり、他の場合には、(9)式の変位場をもちいて何等問題はない。ここでは、代表的な場合として単純支持と固定の場合について考える。

さて、これらの境界条件を取り入れるには、先に導入した棒要素 (θ^i) を考えると都合がよい (図7)。

すなわち、境界辺に棒要素を考え、この辺については(20)式をそのままもちい、他の辺については(22)式により、 θ^i を消去する。

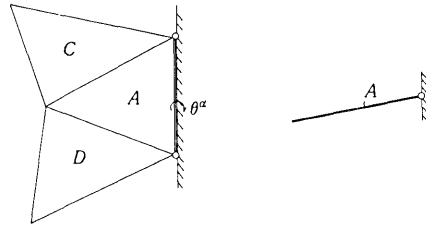


図7 境界条件

まず、固定の場合には、 $\theta^\alpha = 0$ とすればよい。また単純支持の場合には、

$$M_n = 0 \tag{23}$$

という条件から θ^α を縮約により消去すればよい。

以上の操作を行えば、パラメータを増やすことなく、境界条件を厳密に取り入れることができる。

3. 数値計算例

本板曲げモデルが線形領域において、どの程度の精度を示すかチェックするため、静変形、振動及び座屈固有値問題の数値解析を行った。

解析モデルは矩形板で、辺長比 (b/a)，境界条件、荷重条件、また要素分割などを種々組み合わせで解析を行ったが、それぞれの代表的結果を図8～図15に示す。

図8、図9は静変形、図10、図11が振動、また図12～図15が座屈問題についてのものである。

これらの解析結果を見ると、要素分割が粗い時には大分精度が悪いが、ある程度分割を細かくすれば工学的に十分な精度の値を得られること、また収束性が極めて良好であることがわかる。

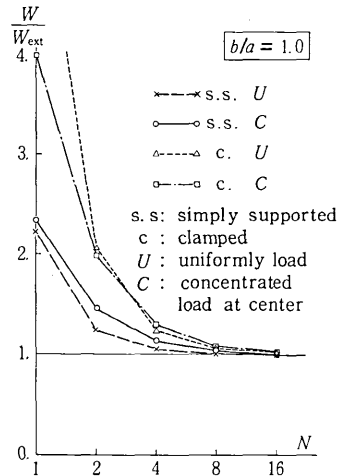


図8 静変形問題の解析 (その1)

4. 結 語

要素内変位場を線形におき、2次以上の高次の微分量は差分により、これを評価するという発想の下に、新しい板曲げ要素の提案を行い、静変形、振動、座屈等の問題

研究速報

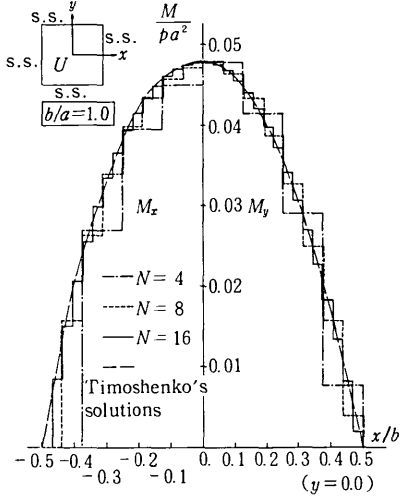


図9 静変形問題の解析 (その2)

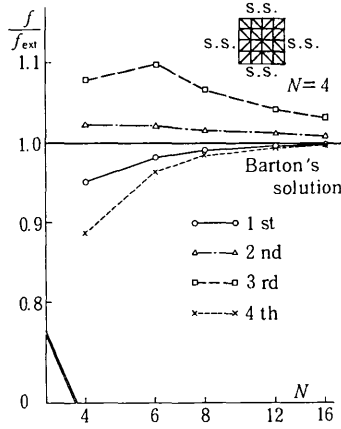


図10 振動問題解析 (その1: 4辺単純支持)

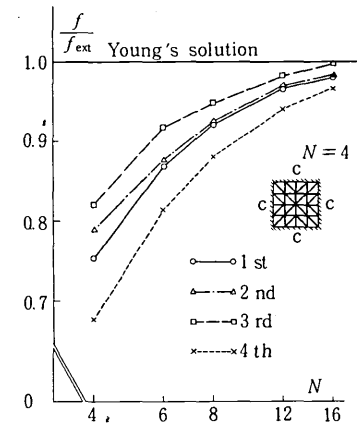


図11 振動問題解析 (その2: 4辺固定)

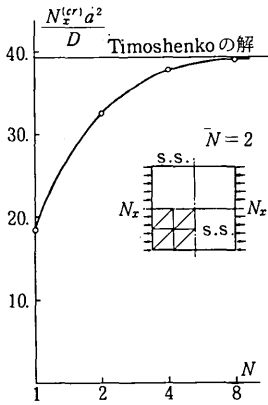


図12 座屈問題の解析(その1: 一様圧縮)

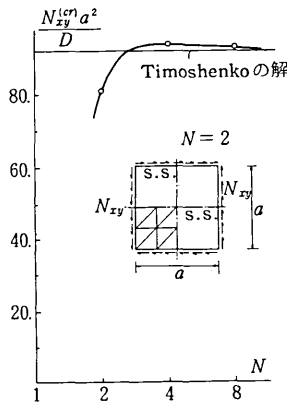


図13 座屈問題の解析(その2: 純せん断)

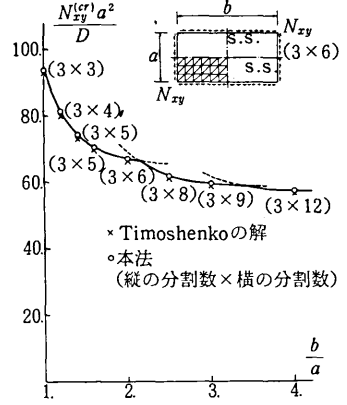


図14 座屈問題の解析(その3: 純せん断)

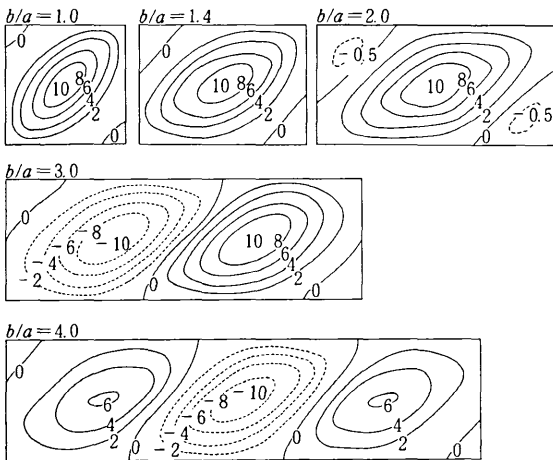


図15 座屈問題の解析 (その4: 純せん断)

素内ですべて一定となる。従って、その取り扱いが容易となり、従来のF.E.Mモデルにおけるエネルギー積分等の煩雑な演算から解放される。また、自由度は1節点1個 (w のみ) であり、非線形解析において、有効なモデルであると信じる。(1977年11月19日受理)

参考文献

- 1) 鷲津, "弾性学の変分原理概論", コンピュータによる構造工学講座, II-3-A, 培風館, 1971
- 2) 川井, "座屈問題解析", 同, II-6-B, 同, 1974
- 3) M. V. Barton, "Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates" J. of Appl. Mech. 1951, Jun.
- 4) L. R. Herrmann, "A Bending Analysis of Plates" Proc. of Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, 1965
- 5) 近藤, 川井, "低次の形状関数をもちいた梁柱の座屈及び大変形問題の有限要素解析", 日本造船学会論文集, 第142号, 1977

に適用して本モデルが有望なものであることを確認した。本モデルは、要素内変位場が線形であり、非線項が要