

汚染拡散問題解析における新しい要素モデル(その2)

SMAC + FLIC 法による非圧縮粘性流れの解析

A New Element Model in Discrete Analysis of Pollution Problems (2nd Report)

— One Numerical Analysis of Incompressible Viscous Flows
by SMAC Combined with FLIC —

川井忠彦*・渡辺正明*

Tadahiko KAWAI and Masaaki WATANABE

汚染拡散問題は移動現象 (transport phenomena) の一例である。その本質は流れと拡散あるいは化学反応とが複合した非常に複雑な非線形問題となっている。これらの問題を解析する手段として最近著者らは新しい要素モデルを開発し、三の例題に適用し好結果を得た。本報告では、そのモデルを用いた非圧縮粘性流れの解析法を紹介する。

1. 緒言

周知のごとく有限要素法は構造解析に革命的進歩をもたらしたが、固体の変形の極限状態における材料非線形大変形および亀裂の三つの非線形性が連成した極めて複雑な最終強度問題に対しては従来の有限要素法では経済性という大きな壁にはばまれ、現状ではいかんともしがたい状況である。

この問題を解決するため著者の一人川井は従来の数学モデルからの発想の転換を試みた。その固体力学解析用の新離散化モデルを考案し、各種の非線形問題に適用しその有用性を確認し得たので目下その実用化を急いでいる。

渡辺はこの物理モデルの発想を一般の移動現象問題に拡張応用できないのかと検討を進め、新離散化モデルは従来の有限要素法より低次元形状関数を用いる要素モデルであることに気付いた。しかしながら、移動現象問題には固体力学におけるエネルギー原理のような変分原理は存在しない。一般に移動現象問題の基礎微分方程式は物理量の保存則より導びかれることはよく知られたことである。そこでこの物理モデルを表題のごとき移動現象問題に適用するとき、積分表示された保存則を直接離散化する方法が最適であろうと考え非圧縮粘性流れの問題を解析しある程度の結果を得たと考えるので報告したい。

2. 粘性流れ解析の有限要素解析の現況について

一般に流れの問題は移動現象問題の一つとして考えることができ、その支配微分方程式は質量、運動量、およびエネルギー等の保存則から導びかれる。

差分法あるいは有限要素法により流れ問題の近似解を得ようとする場合、局部表示された保存則、つまり偏微分方程式を直接離散近似して解く方法が一般に採られている。

積分表示された保存則をそのまま離散近似して解くものとしては FLIC 法 (Fluid in Cell method) があげられる。これは圧縮性流体解析のために開発された手法で最初は直交格子を用いた差分法による解析を前提としていた。最近、足立は有限要素法の特徴である不規則な境界にも適用できるように改良した変形 FLIC 法を提案し、これにより任意の境界形状の問題が扱い易くなった。

さて、非圧縮性流体はよく知られているように、質量保存則が特別な形をしている。それは連続の式と呼ばれ、他の保存則と異なり時間微分項を含んでいない。そして、この式が存在が有限要素法においても差分法でも数値計算上の問題となっている。

有限要素法で二次元非圧縮粘性流れを解析するとき、速度と圧力を未知数とする方法はレイノルズ数 $Re \div 10^3$ となるまでに計算が不安定となるようである。このため連続の式を自動的に満たす流れ関数を導入して、 $Re = 6 \times 10^3$ の解を求めたという報告もある。流れ関数のみで解析する時は4階の偏微分方程式を解かなければならないので、比較的高次元形状関数を用いる必要がある。これに対して流れ関数と過度とを用いて解析する方法も提案されており、 $Re = 10^5$ ぐらいまで解かれているようである。このときは2個の2階偏微分方程式を解くことになるので、比較的次元形状関数を用いることもできる。

差分法においても二次元問題では、流れ関数と過度とを用いて解析するのが極く一般的である。近年 California 大の Los Alamos 研において開発された MAC 法 (Marker and Cell method) は速度と圧力を未知数とする差分法である。連続の式を厳密に満足させるのではなく、逐次近似計算の修正項的なものとして用いる方法である。

この方法は速度と圧力を未知数としているため、三次元問題への拡張が容易であり、計算例も報告されている。この MAC 法を簡略化したものが SMAC 法 (simplified MAC) である。

* 東京大学生産技術研究所 第2部

本報告は、非圧縮粘性流れ解析の一つの方法として、SMAC法とFLIC法とを組み合わせて用いる方法を提案するもので、次章以下に、その具体的計算法と若干の計算例を示す。

3. 基礎式

一般的なある物質質量 G についての保存式を求めてみる。 G をその単位質量あたりの量とし、Fig. 1 に示す流れの場の中に固定された閉曲面 $\partial\Omega$ を通しての G の収支のバランスの方程式を作ると次式のようになる。

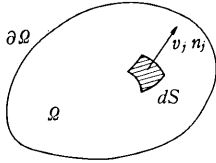


Fig.1 One domain Ω bounded by $\partial\Omega$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho G dV = - \int_{\partial\Omega} J_G \cdot n dS + \int_{\Omega} Q_G dV \quad (1)$$

ここに、物質導関数は

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

で定義され、また J_G は $\partial\Omega$ を通って流出する G の流束、 ρ は単位体積あたりの質量、 n は $\partial\Omega$ の外向き法線の方向余弦ベクトル、 Q_G は $\partial\Omega$ の内部 Ω で発生する単位体積当りの G の量である。この式に Gauss の発散定理を用いると

$$\rho \frac{DG}{Dt} = - \text{div } J_G + Q_G \quad (2)$$

が得られる。

(1)式はまた、次のように表すこともできる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho G dV = - \int_{\partial\Omega} \rho G v_n dS - \int_{\partial\Omega} J_G \cdot n dS + \int_{\Omega} Q_G dV \quad (3)$$

ここに、 G は質量、運動量、エネルギー等与えられた移動現象問題において求めようとしているすべての物理量を含む列ベクトルを表している。

さて、粘性流体の基礎式は(3)式の保存則より導びかれる。Newton 流体を考えることにし、Stokes の関係を仮定すれば、質量、運動量およびエネルギーの保存則は(3)式より総和規約を用いてそれぞれ次のように書ける。

質量保存則；

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV = - \int_{\partial\Omega} \rho v_i n_i dS \quad (4)$$

運動量保存則；

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho v_i dV &= - \int_{\partial\Omega} \rho v_i v_j n_j dS \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} P n_i dS + \mu \int_{\partial\Omega} (v_{i,j} + v_{j,i}) n_j dS \end{aligned} \quad (5)$$

エネルギー保存則；

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \left(\frac{1}{2} v_i v_i + E \right) dV &= \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \rho \left(\frac{1}{2} v_i v_i + E \right) v_i n_i dS \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} P v_i n_i dS + \mu \int_{\partial\Omega} (v_{i,j} + v_{j,i}) v_i n_i dS \\ &\quad + \int_{\Omega} Q dV - \int_{\partial\Omega} v_i n_i dS \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 ρ は質量、 v_i ；速度ベクトルの i 方向成分、 $P = p + \frac{2}{3} \mu \theta$ ($\theta = v_{i,i}$)、 p ；圧力、 μ ；粘性係数、 E ；単位質量あたりの内部エネルギー、 Q ；単位体積あたりの発熱量、 q_i ；熱流束ベクトルの i 方向成分である。また(5)、(6)において物体力はポテンシャルから導びけるものとして圧力 p に含ませている。

さて、非圧縮性を仮定して流れ場のみ注目するとき(4)と(5)式だけで方程式は閉じるので(6)式のエネルギーの収支の式は考える必要がない。もし熱拡散を求めたいならば(4)と(5)式より速度と圧力を求めた後で(6)式を解けばよい。

(4)、(5)式の表面積分を Gauss の定理を用いて体積積分に書き換えれば、領域 Ω が任意であることより局部表示された非圧縮粘性流体の保存則、つまり連続の式と Navier - Stokes の方程式がそれぞれ次のように求まる。

連続の式

$$v_{i,i} = 0 \quad (7)$$

Navier - Stokes の方程式

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu v_{i,jj} - v_j v_{i,j} \quad (8)$$

ここに、 $\nu = \mu/\rho$ は動粘性係数である。

差分法による解析は上の二式を直接差分近似して行なうのが普通であり、また有限要素法では重み付き残差法により Galerkin 形式に書き直しその弱変分式を解くのが一般的である。

4. 数値計算法

SMAC法による計算は次の3個の式を考える。

$$\tilde{v}_i = v_i^{(n)} - \delta t (v_j^{(n)} v_{i,j}^{(n)} - \nu v_{i,jj}^{(n)}) \quad (9)$$

$$S_{,jj}^{(n)} = \tilde{v}_{i,i} \quad (10)$$

$$v_i^{(n+1)} = \tilde{v}_i - S_{,i}^{(n)} \quad (11)$$

ここに、上添字 n は $t = n\delta t$ での値を示す。また δt は時間増分である。

(9)、(11)式より

$$\frac{\dot{v}_i^{(n+1)} - v_i^{(n)}}{\delta t} = -\frac{S_{,i}^{(n)}}{\delta t} - (v_j^{(n)} v_{i,j}^{(n)} - \nu v_{i,jj}^{(n)})$$

を得るが、もし (12)

$$S = \frac{p}{\rho} \delta t$$

$$v_{i,i} = 0 \quad \text{at } t = 0$$

ならば(12)式より、(9)、(10)、(11)式を順に解くSMAC法のアルゴリズムは(7)と(8)式の非圧縮粘性流体のNavier-Stokes方程式の近似解法となっていることがわかる。

FLIC法では、 $t = n\delta t$ ステップから $t = (n+1)\delta t$ ステップへの計算を進めるにあたり、(4)から(6)式の慣性項を無視した中間的な値を求める。次に要素境界上における速度が、その要素に関して外向きであるか内向きであるかによって中間値が時間増分 δt の間で、流出していくのか、あるいは回りの要素から流入してくるのかを考えて、 $t = (n+1)\delta t$ での値を求める。

本報告ではSMAC法のアルゴリズムを用いて解くとき、FLIC法の運動量等の流出、流入を考慮するという思想を導入しようということであるので、(9)から(11)式の保存則表示式をまず求めておく必要がある。Fig. 2に示す三角形要素 Ω_e 内で積分すれば、それぞれ次のように表される。

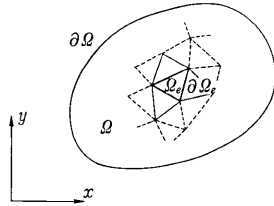


Fig. 2 Triangular mesh division

$$\iint_{\partial\Omega_e} \tilde{v}_i dS = \iint_{\Omega_e} v_i^{(n)} dS - \delta t \int_{\partial\Omega_e} (v_j^{(n)} v_i^{(n)} n_j - \nu v_{i,j}^{(n)} n_j) ds \quad (13)$$

$$\int_{\partial\Omega_e} S_{,j}^{(n)} n_j ds = \int_{\partial\Omega_e} \tilde{v}_i n_i ds \quad (14)$$

$$\iint_{\Omega_e} v_i^{(n+1)} dS = \iint_{\Omega_e} \tilde{v}_i dS - \int_{\partial\Omega_e} S^{(n)} n_i ds \quad (15)$$

さて、上の3式の離散近似を考えよう。Fig. 3に示す各三角形要素内 v_i, S も一定と考えているので0-3三角形要素に注目すれば、上式の面積積分は

$$\iint_{\partial\Omega_e} \tilde{v}_i dS = \tilde{v}_{i0} \Delta_0 \quad (16)$$

となる。ここに、 Δ_0 は0-3三角形要素の面積である。また、(13)、(14)式にある要素境界上の積分項の中の微分商は

$$\int_{\partial\Omega_e} S_{,j}^{(n)} n_j ds = \int_{\partial\Omega_e} \frac{\partial S^{(n)}}{\partial n} ds$$

と書けることにより、Fig. 3を参照して次のように近似

する。

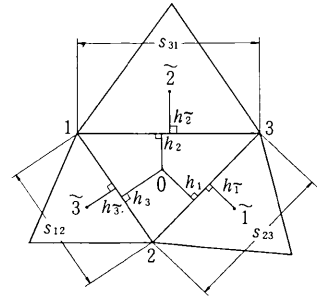


Fig. 3 4 triangular elements

$$\int_{\partial\Omega_e} \frac{\partial S^{(n)}}{\partial n} ds = \sum_{i=1}^3 \frac{S_{ijk}}{h_i + h_i} (S_i^{(n)} - S_0^{(n)}) \quad (17)$$

ここに、 i, j, k は1, 2, 3を循環的にとるものとする。次に(13)式の慣性項の処理であるが、そこにFLIC法概念を用いて隣接要素との運動量の流出、流入を考える。要素境界の法線方向の速度 V_n は

$$V_n^{(n)} = v_j^{(n)} n_j \quad (18)$$

であるから、 $V_n^{(n)}$ が正のときはその要素の運動量 v_{i0} が流出していき、 $V_n^{(n)}$ が負のときは隣接要素の運動量 $v_{i\bar{i}}$ が流入してくる と考える。

以上のことより、SMAC法とFLIC法とを組み合わせさせた非圧縮粘性流体のNavier-Stokes方程式の離散近似は次のようになる。(13)式より次の2式が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0 = u_0^{(n)} - \frac{\delta t}{\Delta_0} \left\{ \sum_{i=1}^3 \bar{u}_{ijk} V_n \bar{v}_{ijk}^{(n)} S_{jk} - \nu \sum_{i=1}^3 \frac{S_{ijk}}{h_i + h_i} (u_i^{(n)} - u_0^{(n)}) \right\} \end{aligned} \quad (19-1)$$

$$\begin{aligned} v_0 = v_0^{(n)} - \frac{\delta t}{\Delta_0} \left\{ \sum_{i=1}^3 \bar{v}_{ijk} V_n \bar{v}_{ijk}^{(n)} S_{jk} - \nu \sum_{i=1}^3 \frac{S_{ijk}}{h_i + h_i} (v_i^{(n)} - v_0^{(n)}) \right\} \end{aligned} \quad (19-2)$$

ここに、 u_i, v_i はそれぞれ i 要素の x, y 軸の速度成分、 s_{jk} は0-3三角形要素の辺 jk の長さである。要素境界上の法線方向の速度は隣接要素との平均をとって次式を用いる。

$$V_n \bar{v}_{ijk}^{(n)} = l_{jk} \frac{u_0^{(n)} + u_i^{(n)}}{2} + m_{jk} \frac{v_0^{(n)} + v_i^{(n)}}{2}$$

l_{jk}, m_{jk} は辺 jk の外向き法線の方向余弦である。また、

$$\bar{u}_{ijk}^{(n)} = \begin{cases} u_0^{(n)} & (V_n \bar{v}_{jk} > 0) \\ u_i^{(n)} & (V_n \bar{v}_{jk} < 0) \end{cases}$$

と考える。 $\bar{v}_{ijk}^{(n)}$ も同様に処理する。

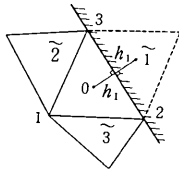


Fig.4 Boundary and artificial elements

(14)式の Poisson の方程式は

$$\sum_{i=1}^3 \frac{S_{jk}}{h_i + h_i\tilde{}} (S_{i\tilde{}}^{(n)} - S_0^{(n)}) = \sum_{i=1}^3 V_n \tilde{r}_{jk}^{(n)} \quad (20)$$

と表される。

(19)式は

$$u_0^{(n+1)} = \tilde{u}_0^{(n)} - \frac{1}{A_0} \sum_{i=1}^3 \frac{S_0^{(n)} + S_{i\tilde{}}^{(n)}}{2} l_{jk} S_{jk} \quad (21-1)$$

$$v_0^{(n+1)} = \tilde{v}_0^{(n)} - \frac{1}{A_0} \sum_{i=1}^3 \frac{S_0^{(n)} + S_{i\tilde{}}^{(n)}}{2} m_{jk} S_{jk} \quad (21-2)$$

となる。

けっきょく、(19), (20), (21)式を順に解いて非定常解析を行えばよいことになる。

(19), (20)式において、要素境界上の速度 V_n と圧力 S を求める必要があるが、不等三角形要素を用いるときは、重みを付けた次式を用いる。

$$S_{jk} = \frac{1}{h_i + h_i\tilde{}} (h_i\tilde{}} S_0 + h_i S_{i\tilde{}})$$

境界条件は、Fig.4 に示すように境界要素と鏡像関係にある仮想要素を考える。Dirichlet タイプの境界条件に関しては、仮想要素との平均値が既知の値と等しいと考える。すなわち

$$\frac{S_0 + S_{i\tilde{}}}{2} = \bar{S}_{23} \quad (22)$$

とおく。また、Neumann タイプの場合は

$$\frac{\partial S}{\partial n} = \frac{S_{i\tilde{}} - S_0}{2 h_i} \quad (23)$$

と近似する。しかし、(19), (20), (21)式において上の二つのタイプの境界条件を厳密に評価できるものには(22), (23)式の近似式は用いない。

5. 数値計算例

前節で示したアルゴリズムを用い、急拡大水路の流れと cavity を有する流れとの二つの問題を解析した。

本方法の特徴は、適当な初期条件より出発し、各時間ステップごとに流れ場を求めていくという非定常解析法となっている点にある。定常解を求めようとするときは初期条件に厳密性は要求されないが、カルマン渦列 (Karman's vortex street) のような非定常性はその本質となっている問題では初期条件を慎重に選定しなければならぬ。

$t = 0$ の初期値より時間積分を続行し、ある程度解が

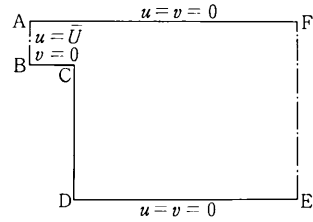


Fig.5 a' Channel flow with a sharp corner

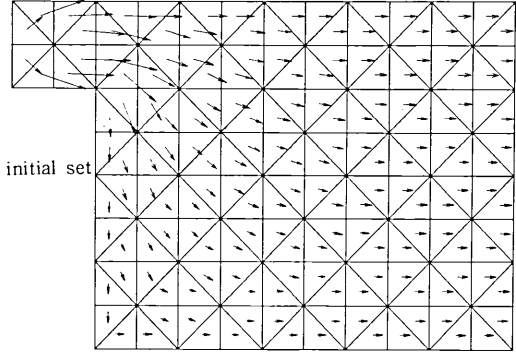


Fig.5 b

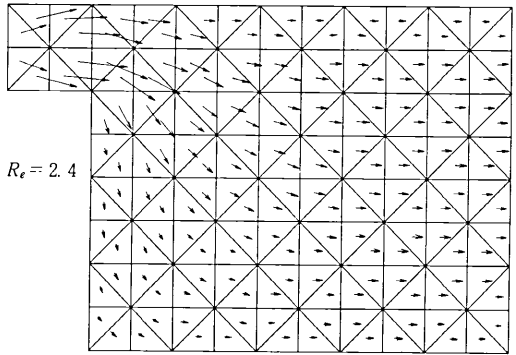


Fig.5 c

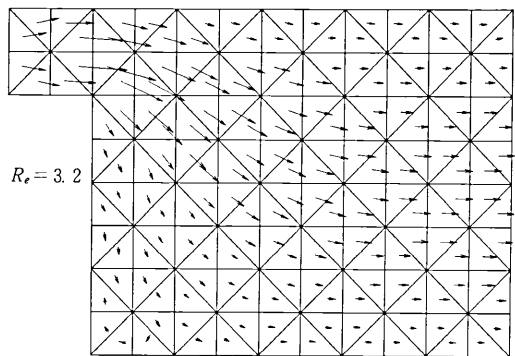


Fig.5d

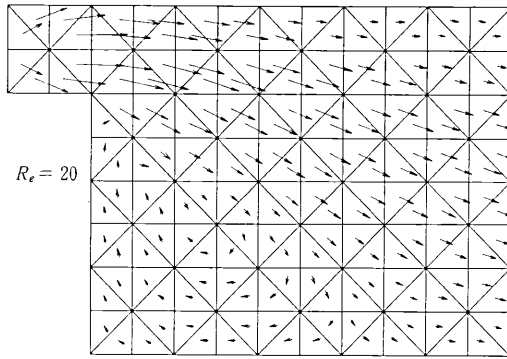


Fig. 5e

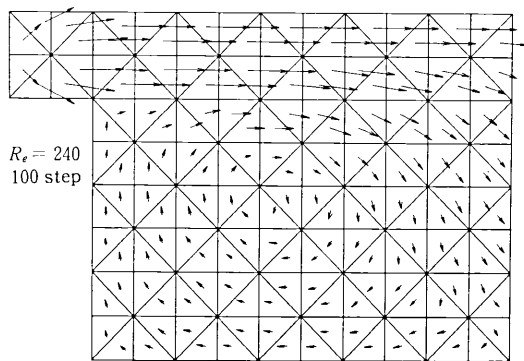


Fig. 5f

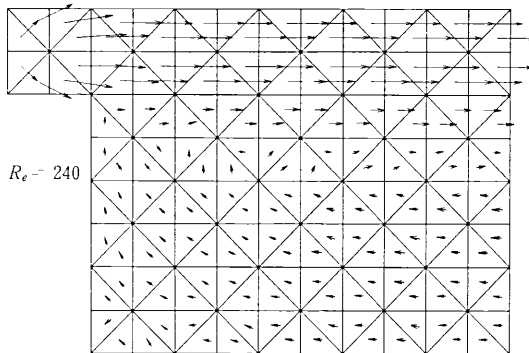


Fig. 5g

落ち着いて来たら定常解は得られたと見做すわけであるが、その判定は次式を用いる。

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{S_i^{(n+1)} - S_i^{(n)}}{S_i^{(n)}} \right| \leq \epsilon \quad (2)$$

ここに、 N は要素数、また ϵ は $10^{-4} \sim 10^{-5}$ ぐらいの値である。

本解析法では、各時間ステップごとに(2)式の Poisson の式を解かなければならないが、その解法としてはSORを用いる。SORを用いる利点は、前ステップでの解をその

収束計算の初期値として用いれば計算時間がかなり短縮できることと、適当な初期値より出発して定常解を求めようとする場合、最初からSORの収束判定条件を厳しくする必要はなく、ある程度解が落ち着いてきたら厳しくすればよいので比較的短時間で計算を終了させることができる。またSORによれば消去法などと比べ計算機の記憶容量はるかに少なく済むのも利点である。

計算例の説明に入ろう。Fig. 5に急拡大水路の流れ、Fig. 6に cavityを有する流れの解析結果をそれぞれ示す。速度 u, v に関する境界条件 (Dirichlet型) はそれぞれ Fig. 5aと Fig. 6aに示されている。つまり、流入口ABに一樣流を仮定し、その流れのパターンがレイノルズ数の変化につれどのように変わっていくのかを解析することになる。さて、流出口EF (Fig. 5)あるいはGH (Fig. 6)の境界条件に対して、川原らは有限要素法で応力型の境界条件を用いているが、速度と圧力を分解して解く本法では処理しにくいので次式を用いる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \\ p = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

つまり、速度に関しては流れ方向の変化は無いという仮定をおいたことになる。また、圧力は相対的な値とし求まることになる。

Fig. 5に掲げる initial set の流れのパターンは次のように求めた。初期値としてAB部分のみに一樣流の境界条件を課し内部の全要素の速度は零とおいた。すると、レイノルズ数の高低に拘らず同じようなフローパターンが計算を初めて数ステップで得られる。非粘性のポテンシャルフローに近い結果が得られ、そして、比較的高レイノルズ数のときそれ以後かなりのステップ数を踏んでも流れ場に大きな変化は見られず渦も発生しない。しかし、粘性効果が卓越する流れ、つまり低レイノルズ数の流れ場を解析すると Fig. 5cに示すように、Dの近傍で見られるのであるが、非粘性流れと少し異なった定常解が得られる。なお、Fig. 5に示すレイノルズ数は流入口における速度と幅をもちいて定義したものである。

Fig. 5dには $Re = 3.2$ のときの定常解を示す。 $Re = 2.4$ の定常解を初期値として使い、流入口を大きくしてレイノルズ数を高くした。今度は、Dの部分に微小な渦の発生がみられる。

$Re = 3.2$ の値を初期値にとり、流入口を大きくしてレイノルズ数を20に増加させた定常解を Fig. 5eに示す。渦領域がかなり大きくなる。

Fig. 5f, gにはレイノルズ数240の流れを示す。初期値はレイノルズ数20の定常解を用いた。レイノルズ数を上げるために流入口を大きくするとともに動粘性係数も小さくした。Fig. 5fには100ステップの流れの様子を示す。渦領域がだんだんと広がって定常解の Fig.

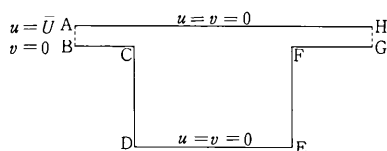


Fig. 6a Channel flow with a cavity

有限要素法による計算は相当な時間がかかっているものと相像せられる。また高次形状関数を用いているので従来の有限要素法は時間積分にエクスプリシット法を用いることができないので、はなはだ不利である。

本方法でも時間増分 δt の値によっては数値的に不安定となり発散することがあるので注意を要する。低レイ

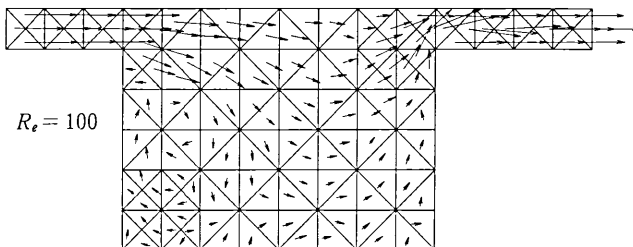


Fig. 6b

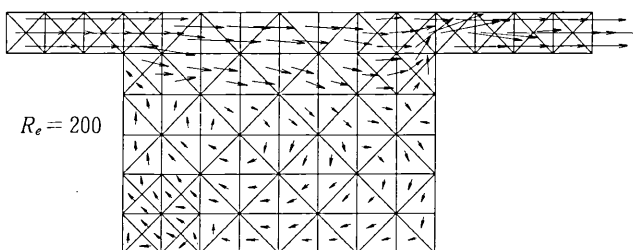


Fig. 6c

5g に変移していくのがよく表現されている。渦領域が解析領域を越え、また主流と逆流とがかなり明確に分離した流れとなっている。

なお、要素数は 168 であるので、本方法における総自由度数はその 3 倍となるが、連立方程式を解かなければならないのは第 2 段階の圧力 S を求める式のみである。他の方法と比較するときは、この自由度で比較されるべきであろう。なぜなら計算時間の大半はそこで消費されるからである。従来の有限要素法、例えば三角形要素を用い速度、圧力にそれぞれ完全二次式、一次式を考えると、Fig. 5 と同じ要素分割では総自由度は 800 以上となる。もちろん高次形状関数を用いているので Fig. 5 の分割より粗であってもよいと思われるが、川原はほぼ同じ形状を有する急拡大水路の流れを要素数 117 で解いている。その時の総自由度数は約 700 になると計算される。Galerkin 法による定式化では、解くべき式は非対称非線形な連立方程式となる。Newton-Raphson 法で解かれているようであるが、いきなり高レイノルズ数の流れ場を求めることは困難であり、低レイノルズ数から初めて徐々にレイノルズ数を大きくしていく方法をとらないと Newton-Raphson 法による収束計算が不安定となり満足のいく結果が得られないようである。これらにより有

ノルズ数では比較的大きい時間増分でも解は安定しているが、高レイノルズ数の流れを解析するときは、それに逆比例して小さくする必要がある。この時間増分 δt は今のところ経験的に選んでいるが、本格的な計算に入る前に異なる δt で数ケースの予備計算を行なって最適であると思われる δt をあらかじめ推定しておくのがよいであろう。

Fig. 5c の計算には $\delta t = 0.00001$, Fig. 5d; $\delta t = 0.001$, Fig. 5e; $\delta t = 0.001$, Fig. 5f, g では $\delta t = 0.001$ とした。定常解に近づくにつれ SOR は数ステップで収束するので、その近傍で SOR の収束判定条件をそれ以前の $1/2$ 倍にとり計算を続行した。なお、Fig. 5g の結果を得るまでに要した計算時間は東京大学大型計算機センター HITAC 8800/8700 system で約 10 分要した。時間増分の選定法が上述と異なるのは、この急拡大水路の流れ解析で本計算法のアルゴリズムの信頼性と特性の把握することを目的としており、いわば試行錯誤的に計算を実行したからである。また、所要計算時間も 10 分といふかなり長い時間を要したのもそのためであると思われる。事実、Fig. 5c に示すレイノルズ数 2.4 の定常解を初期値に用い時間増分 $\delta t = 0.01$ として計算すると約 1 分 (200 ステップ) ほどで Fig. 5g に示すような流れの

パターンが得られ、数値計算上の不安定も生じない。これらのことよりも本方法は初期値と時間増分に十分な注意をすればかなりの短時間の計算で目的とする流れ場を求め得ると思われる。

次に cavity を有する流れの解析例について説明しよう。レイノルズ数を上げていく手順は前解析法と同じである。図には示して無いが、まず低レイノルズ数10の流れを求め、レイノルズ数 100, 200 の流れ場を求めた。流入口の色度と cavity の深さ CD で定義をした。時間増分 $\delta t = 0.0005$ にとったとき、同じ計算機を使ってレイノルズ数 200 の結果を得るまでに約 2 分 40 秒を要した。要素数は 144 である。

6. 結 言

前報 (本誌 3 月号) で、環境汚染問題解析のための新しい離散化解析法を提案した。従来の有限要素法は変分法的立場で比較的高次の形状関数を用いて解析するのが普通であり、汚染拡散問題のように極めて複雑な非線形な問題では実用性が乏しい。

そこで前報告では低次の形状関数を用いる有効性を指摘し、現象を積分で表示する保存則を直接離散近似する方法を展開した。

その第二歩として、本報告では非圧縮性の Navier-Stokes の方程式を解析する一つの方法を提案した。本方法は差分法分野で開発された SMAC 法と FLIC 法とを組み合わせたもので、二つの例題解析の結果、流れ場を定性的に把握するには十分であることがわかった。また、従来の有限要素法と比べ計算に要する時間も少なく、非定常問題が扱い易い。定式化より明らかのように速度と圧力とを未知数にとっているので三次元問題への

拡張が容易である。

以上のことより、保存則表示に立脚する本方法は一般の移動現象問題解析に対しかなり期待できるものと思われる。

(1977年9月20日受理)

参 考 文 献

- 1) 足立武司：圧縮粘性流解析における変形 FLIC 法について日本構造協会第 7 回大会研究集会 (1973)
- 2) Harlow, F. H. & Welch, J. E.: Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, Phys. Fluids, vol. 8 (1965)
- 3) Bourianoff, G. I.: Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flows with Reactive Boundaries: The IMP Method, Comp. Meth. Non. Mech., TICOM (1974)
- 4) 野村豪, 松尾陽, 貝塚正光, 坂本雄三, 遠藤清尊: 室内空気分布の数値解法に関する研究 I, 日本建築学会論文報告集 (1975)
- 5) 川原睦人: 粘性流体の有限要素解析, 日本造船学会誌 (1976)
- 6) 中沢昌平, 岡本隆, 川原睦人: 有限要素法による熱連成流体解析, 日本鋼構造協会第 11 回大会研究集会
- 7) 川井忠彦, 渡辺正明: 低次形状関数を用いた有限要素法による流体問題の解析, 日本鋼構造協会第 11 回大会研究集会 (1977)
- 8) Kawahara, M., Yoshimura, N., Nakagawa, K. & Ohsaka, K.: Steady and Unsteady Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Fluid, Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 10 (1976)
- 9) 川井忠彦: 汚染拡散問題解析における新しい要素モデル, 生産研究, 29 巻 3 号 (1977)
- 10) 土木学会編: 土木工学における数値解析 / 流体解析編, サイエンス社 (1974)