

有限要素法によるクラック問題特異解の解析

UDC 539.375.5

539.422

—その2 三次元クラック問題の定式化—

Finite Element Analysis of the Singular Solution in Crack Problems

—II. Formulation in case of Three Dimensional Crack Problems—

藤谷 義信*

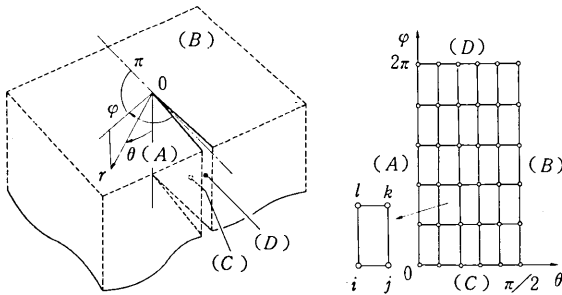
Yoshinobu FUJITANI

1. ま え が き

前報¹⁾では、二次元クラック問題の特異解の有限要素解析の定式化を行ない、三つの解析例を示した。本報では、この解析法を三次元クラック問題に適用し、特性方程式を誘導する手順を示す。本解析法で取り扱うことのできる三次元クラック問題は、以下に示すように球座標系で表現できる表面クラック問題に限定されるが、今まであまり注目されなかった三次元クラック問題の特性に関して貴重な情報を得ることができる。

2. 三次元クラック問題の特異解析²⁾

図1.aに示すような三次元表面クラック問題の特異解析を行なうには、クラック先端が表面と交わる点を原点とする球座標系 (r, θ, φ) が用いられる。前報の二次元クラック問題の場合と全く同様にして、次のように定式化することができる。



a 表面クラック問題

b 有限要素領域

図1 表面クラック問題の特異解析

この問題を支配するつりあい方程式は

$$\left. \begin{aligned} -F_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_r) + \frac{1}{r\bar{p}} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{p} \tau_{r\theta}) \\ &\quad + \frac{1}{r\bar{p}} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tau_{r\varphi}) - \frac{1}{r} (\sigma_\theta + \sigma_\varphi) = 0 \\ -F_\theta &= \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r\bar{p}} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{p} \sigma_\theta) \\ &\quad + \frac{1}{r\bar{p}} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tau_{\theta\varphi}) - \frac{p}{r\bar{p}} \sigma_\varphi = 0 \\ -F_\varphi &= \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{r\varphi}) + \frac{1}{r\bar{p}^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{p}^2 \tau_{\theta\varphi}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sigma_\varphi) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

で与えられる。

ここに、 $\bar{p} = \cos \theta$, $\bar{p} = \sin \theta$ である。

次に、ここで取り扱う三次元弾性体の表面境界は $n_r = 0$ であるから、すなわち、境界面に立てた法線ベクトルと r ベクトルが直交するような境界で三次元弾性体が形成されているから、境界条件は次式で与えられる。

応力境界条件；

$$\left. \begin{aligned} T_r &= \bar{p} \tau_{r\theta} n_\theta + \tau_{r\varphi} n_\varphi = 0 \\ T_\theta &= \bar{p} \sigma_\theta n_\theta + \tau_{\theta\varphi} n_\varphi = 0 \\ T_\varphi &= \bar{p} \tau_{\theta\varphi} n_\theta + \sigma_\varphi n_\varphi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.a)$$

または変位境界条件；

$$\delta u_r = 0, \quad \delta u_\theta = 0, \quad \delta u_\varphi = 0 \quad (2.b)$$

ここに、 $(0, n_\theta, n_\varphi)$ は境界に立てた外向き法線の方向余弦である。

このつりあい方程式(1)と境界条件(2)を満足する変位・応力成分を有限要素法で解析するには、次式の形にまとめて表現し、この式が $\delta u_r, \delta u_\theta, \delta u_\varphi$ のいかんにかかわらず成立するための変位関数 u_r, u_θ, u_φ の形を求める問題におきかえる。

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (F_r \delta u_r + F_\theta \delta u_\theta + F_\varphi \delta u_\varphi) r^2 \bar{p} dr d\theta d\varphi + \int_0^\infty \int_0^\pi (T_r \delta u_r + T_\theta \delta u_\theta + T_\varphi \delta u_\varphi) r dS = 0 \quad (3)$$

いま、 u_r, u_θ, u_φ をパラメータ λ を含む次の形におく。

$$u_r(r, \theta, \varphi) = r^\lambda u_r^*(\theta, \varphi) \quad \text{etc.} \quad (4)$$

これより線形ひずみ成分は次式で表される。

$$\left\{ \begin{array}{c} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_\varphi \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\varphi} \\ \tau_{\theta\varphi} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \frac{1}{r\bar{p}} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{p}{r\bar{p}} u_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \\ \frac{1}{r\bar{p}} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{p}{r\bar{p}} u_\varphi \\ \frac{1}{r\bar{p}} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \end{array} \right\} = r^{\lambda-1} \left\{ \begin{array}{c} \lambda u_r^* \\ \frac{\partial u_\theta^*}{\partial \theta} + u_r^* \\ \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \varphi} + u_r^* + \frac{p}{\bar{p}} u_\theta^* \\ \frac{\partial u_r^*}{\partial \theta} + (\lambda-1) u_\theta^* \\ \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial u_\theta^*}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \theta} - \frac{p}{\bar{p}} u_\varphi^* \\ \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial u_r^*}{\partial \varphi} + (\lambda-1) u_\varphi^* \end{array} \right\} \quad (5)$$

したがって、応力成分も次のような r 成分を分離した形で表現できる。

$$\sigma_r(r, \theta, \varphi) = r^{\lambda-1} \sigma_r^*(\theta, \varphi) \quad (6)$$

(他の成分も同様)

* 東京大学生産技術研究所 第2部

研究速報

変位・応力成分式(4), (6)を変分方程式(3)に代入し θ, φ について部分積分を行なって整理すれば次式が得られる。ここに $n_\theta dS = dr d\varphi$, $n_\varphi dS = dr d\theta$ の関係が用いられる。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} r^{2\lambda} dr \iint \{ (\lambda+1) \bar{p} \sigma_r^* - \bar{p} (\sigma_\theta^* + \sigma_\varphi^*) \} \delta u_r^* \\ & - \bar{p} \tau_{r\theta}^* \frac{\partial \delta u_r^*}{\partial \theta} - \tau_{r\varphi}^* \frac{\partial \delta u_r^*}{\partial \varphi} + \{ (\lambda+2) \bar{p} \tau_{r\theta}^* \\ & - p \sigma_\varphi^* \} \delta u_\theta^* - \bar{p} \sigma_\theta^* \frac{\partial \delta u_\theta^*}{\partial \theta} - \tau_{\theta\varphi}^* \frac{\partial \delta u_\theta^*}{\partial \varphi} \\ & + \{ (\lambda+2) \bar{p} \tau_{r\varphi}^* + p \tau_{\theta\varphi}^* \} \delta u_\varphi^* - \bar{p} \tau_{\theta\varphi}^* \frac{\partial \delta u_\varphi^*}{\partial \theta} \\ & - \tau_{\varphi\theta}^* \frac{\partial \delta u_\varphi^*}{\partial \varphi} \} d\theta d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

いま、図1に示すようなクラックが表面から内部に向かって垂直に位置するいわゆる通常の表面クラックの場合について、以下有限要素法による展開を行なうことにする。

この表面クラックの問題の解析領域は、次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

いま、図1.bに示したように、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ で与えられる $\theta - \varphi$ 領域を、矩形要素に分割し、要素内の $u_r^*(\theta, \varphi)$, $u_\theta^*(\theta, \varphi)$, $u_\varphi^*(\theta, \varphi)$ の分布を、 θ, φ に関する次の式で近似する。

$$u_r^*(\theta, \varphi) = a_1 + a_2 \theta + a_3 \varphi + a_4 \theta \varphi \quad (9)$$

(他の成分も同様な形)

この変位式を(7)の θ, φ に関する積分項に代入すれば、要素に関する剛性マトリックス $[k]$ を得る。 $[k]$ は次の形で表現される。

$$[k] = [A^{-1}]^T \iint [\bar{k}] d\theta d\varphi [A^{-1}] \quad (10)$$

ここに、

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix} [a^{-1}] [0] [0] \\ [0] [a^{-1}] [0] \\ [0] [0] [a^{-1}] \end{bmatrix} \quad (11.a)$$

$$[a^{-1}] = \frac{1}{(\theta_k - \theta_i)(\varphi_k - \varphi_i)} \begin{bmatrix} \varphi_k \theta_k & -\varphi_k \theta_i & \varphi_i \theta_i & -\varphi_i \theta_k \\ -\varphi_k & \varphi_k & -\varphi_i & \varphi_i \\ -\theta_k & \theta_i & -\theta_i & \theta_k \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (11.b)$$

ここに、 θ_i, φ_k などそれぞれ i, k 節点の θ, φ 座標を表す。

$[k]$ の具体的な形を表1(p.29)に示しておく。この表の $[\bar{k}]$ マトリックスは節点変位 $\{u\} = [u_{ri}^*, u_{rj}^*, u_{rk}^*, u_{rl}^*, u_{\theta i}^*, u_{\theta j}^*, u_{\theta k}^*, u_{\theta l}^*, u_{\varphi i}^*, u_{\varphi j}^*, u_{\varphi k}^*, u_{\varphi l}^*]^T$ の順序に対応している。(10)式で示されるように、このマトリックス成分中に表れる θ に関する種々の関数のうちその不定積分が初等関数で表されるものを表2に示しておく。

表2 θ に関する種々の関数の不定積分

被積分関数	不定積分	被積分関数	不定積分
$\theta^n (n=0,1,2)$	$\frac{1}{n+1} \theta^{n+1}$	$\bar{p} \theta^2$	$2\bar{p}\theta - p\theta^2 + 2p$
\bar{p}	$-p$	$p\theta^2$	$2p\theta + \bar{p}\theta^2 - 2\bar{p}$
p	\bar{p}	$\frac{1}{\bar{p}}$	$\log \left \tan \frac{\theta}{2} \right $
$\bar{p}\theta$	$\bar{p} - p\theta$	$\frac{p}{\bar{p}}$	$\log \left \sin \theta \right $
$p\theta$	$p + \bar{p}\theta$	$\frac{p^2}{\bar{p}}$	$p + \log \left \tan \frac{\theta}{2} \right $

この表に示していない次の関数、

$$\frac{1}{p}\theta, \frac{1}{p}\theta^2, \frac{p}{\bar{p}}\theta, \frac{p\theta^2}{\bar{p}}, \frac{p^2\theta}{\bar{p}}, \frac{p^2\theta^2}{\bar{p}}$$

の不定積分は初等関数で表されないもので、次の Simpson の公式を用いて数値積分を行なう。

$$\int_{\theta_i}^{\theta_j} f(\theta) d\theta = \frac{l}{20} [26f(l_3) - 14\{f(l_2) + f(l_4)\} + 11\{f(l_1) + f(l_5)\}] \quad (12)$$

ここに $l = \theta_j - \theta_i$, $l_n = \theta_i + \frac{n}{6}l$ である。これらのうち、 $1/\bar{p}$, p/\bar{p} , p^2/\bar{p} の三つは $\theta=0$ の節点をもつ要素においては、積分値が発散するため計算を行なうことができない。表1の $[\bar{k}]$ マトリックスのなかにこの被積分項が存在する箇所を * 印をつけて示す。しかしながら、これは $\theta=0$ 近傍の変位の特性を考慮することにより、* 印のマトリックス成分は最終的に不要になり、計算する必要がないことになる。この具体的な取り扱いについては、本稿で定式化した方法を用いて、円錐ピット問題、表面クラック問題を実際に解析した第三報以降の報告で詳しく説明する。

(10)式で得られた要素剛性マトリックスにもとづき、全体領域に関する剛性マトリックスを構成すれば、二次元クラック問題の場合と同様、次式で表されるような特性方程式が得られる。

$$|K(\lambda, E, \nu, \alpha)| = 0 \quad (13)$$

ここに、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比であり、 α は、図1.bのような通常の表面クラック問題では、 2π である。一般の開き角 α をもつ wedge 問題では、 φ の領域が

$$0 \leq \varphi \leq \alpha \quad (14)$$

で表されるが、この場合も前に述べた $\theta - \varphi$ 領域を $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$ として要素分割領域を変えるだけでよく全く同様に解析することができる。したがって一般の開き角 α をもつクラック問題の特性方程式も(13)式で示されることになる。

したがって、(13)式の特性方程式を解くことにより、三次元クラック問題に固有の特性値 λ を求め、またそれに対応する変位モード、さらに応力モードを計算することができる。応力モードを計算する場合、要素内応力成分は(5)式のひずみベクトルに三次元の応力・ひずみマトリックスをかけることにより計算される。この要素内応力成分 $\{\sigma^*\}$ を次式で表しておく。

$$\{\sigma^*\} = [\bar{\sigma}] [A^{-1}] \{u^*\} \quad (15)$$

$A \bar{p}$	SYM.			QAUSI — SYM.	$p = \cos \theta$ $\bar{p} = \sin \theta$ $V_1 = 1 - \nu, \quad V = \nu$ $V_2 = (1 - 2\nu)/2$ $\lambda_0 = \lambda - 1$ $\lambda_1 = \lambda + 1$ $\lambda_2 = \lambda + 2$
$A \bar{p} \theta$	$A \bar{p} \theta^2 - V_2 \bar{p}$	$A \bar{p} \theta \varphi$	$A \bar{p} \theta^2 \varphi^2 - V_2 \bar{p} \theta^2 \varphi^2 - V_2 \theta \bar{p}$	$(B_1 \rightarrow \bar{B}_1)$ $(B_2 \rightarrow \bar{B}_2)$	
$A \bar{p} \varphi$	$A \bar{p} \theta \varphi$	$A \bar{p} \theta^2 \varphi - V_2 \bar{p} \varphi$	$A \bar{p} \theta \varphi^2 - V_2 \bar{p} \theta \varphi^2 - V_2 \theta \bar{p}$		
$A \bar{p} \theta \varphi$	$A \bar{p} \theta^2 \varphi - V_2 \bar{p} \varphi$	$A \bar{p} \theta \varphi^2 - V_2 \bar{p} \theta \varphi^2 - V_2 \theta \bar{p}$	$A \bar{p} \theta^2 \varphi^2 - V_2 \bar{p} \theta^2 \varphi^2 - V_2 \theta \bar{p}$		
$B_1 p$	$B_1 p \theta + B_2 \bar{p}$	$B_1 p \varphi$	$B_1 p \theta \varphi + B_2 \bar{p} \varphi$		
$B_1 (\bar{p} + p \theta)$	$B_1 (\bar{p} \theta + p \theta^2) + B_2 \bar{p} \theta$	$B_1 (\bar{p} + p \theta) \varphi$	$B_1 (\bar{p} \theta + p \theta^2) \varphi + B_2 \bar{p} \theta \varphi$		
$B_1 p \varphi$	$B_1 p \theta \varphi + B_2 \bar{p} \varphi$	$B_1 p \varphi^2$	$B_1 p \theta \varphi^2 + B_2 \bar{p} \varphi^2$		
$B_1 (\bar{p} + p \theta) \varphi$	$B_1 (\bar{p} \theta + p \theta^2) \varphi + B_2 \bar{p} \theta \varphi$	$B_1 (\bar{p} + p \theta) \varphi^2$	$B_1 (\bar{p} \theta + p \theta^2) \varphi^2 + B_2 \bar{p} \theta \varphi^2$		
0	0	B_2	$B_2 \theta$		
0	0	$B_2 \theta$	$B_2 \theta^2$		
B_1	$B_1 \theta$	$(B_1 + B_2) \varphi$	$(B_1 + B_2) \theta \varphi$		
$B_1 \theta$	$B_1 \theta^2$	$(B_1 + B_2) \theta \varphi$	$(B_1 + B_2) \theta^2 \varphi$		

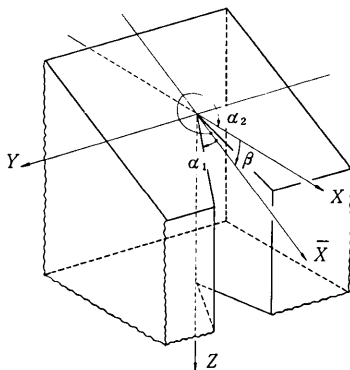
$A = \lambda (\lambda V_1 + 2\nu) - 2 (\lambda \nu + 1)$ $B_1 = -(\lambda \nu + 1), \quad \bar{B}_1 = \lambda_1 \nu - 1$ $B_2 = \lambda_2 V_2, \quad \bar{B}_2 = -\lambda_0 V_2$ $C = \lambda_0 \lambda_2 V_2$	SYM.	
	$-V_1 p^2 / \bar{p} + C \bar{p}$	$-V_1 p^2 / \bar{p} + C \bar{p}$
	$-V_1 p^2 \varphi / \bar{p} + C \bar{p} \varphi$	$-V_1 p^2 \varphi / \bar{p} + C \bar{p} \varphi$
	$-V_1 p^2 \varphi^2 / \bar{p} + C \bar{p} \varphi^2$	$-V_1 p^2 \varphi^2 / \bar{p} + C \bar{p} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta \varphi + C \bar{p} \theta \varphi$	$-V_1 p \theta \varphi + C \bar{p} \theta \varphi$
	$-V_1 p \theta \varphi^2 + C \bar{p} \theta \varphi^2$	$-V_1 p \theta \varphi^2 + C \bar{p} \theta \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^2 \varphi + C \bar{p} \theta^2 \varphi$	$-V_1 p \theta^2 \varphi + C \bar{p} \theta^2 \varphi$
	$-V_1 p \theta^2 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^2 \varphi^2$	$-V_1 p \theta^2 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^2 \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^3 \varphi + C \bar{p} \theta^3 \varphi$	$-V_1 p \theta^3 \varphi + C \bar{p} \theta^3 \varphi$
	$-V_1 p \theta^3 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^3 \varphi^2$	$-V_1 p \theta^3 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^3 \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^4 \varphi + C \bar{p} \theta^4 \varphi$	$-V_1 p \theta^4 \varphi + C \bar{p} \theta^4 \varphi$
	$-V_1 p \theta^4 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^4 \varphi^2$	$-V_1 p \theta^4 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^4 \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^5 \varphi + C \bar{p} \theta^5 \varphi$	$-V_1 p \theta^5 \varphi + C \bar{p} \theta^5 \varphi$
	$-V_1 p \theta^5 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^5 \varphi^2$	$-V_1 p \theta^5 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^5 \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^6 \varphi + C \bar{p} \theta^6 \varphi$	$-V_1 p \theta^6 \varphi + C \bar{p} \theta^6 \varphi$
	$-V_1 p \theta^6 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^6 \varphi^2$	$-V_1 p \theta^6 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^6 \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^7 \varphi + C \bar{p} \theta^7 \varphi$	$-V_1 p \theta^7 \varphi + C \bar{p} \theta^7 \varphi$
	$-V_1 p \theta^7 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^7 \varphi^2$	$-V_1 p \theta^7 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^7 \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^8 \varphi + C \bar{p} \theta^8 \varphi$	$-V_1 p \theta^8 \varphi + C \bar{p} \theta^8 \varphi$
	$-V_1 p \theta^8 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^8 \varphi^2$	$-V_1 p \theta^8 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^8 \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^9 \varphi + C \bar{p} \theta^9 \varphi$	$-V_1 p \theta^9 \varphi + C \bar{p} \theta^9 \varphi$
	$-V_1 p \theta^9 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^9 \varphi^2$	$-V_1 p \theta^9 \varphi^2 + C \bar{p} \theta^9 \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{10} \varphi + C \bar{p} \theta^{10} \varphi$	$-V_1 p \theta^{10} \varphi + C \bar{p} \theta^{10} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{10} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{10} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{10} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{10} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{11} \varphi + C \bar{p} \theta^{11} \varphi$	$-V_1 p \theta^{11} \varphi + C \bar{p} \theta^{11} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{11} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{11} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{11} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{11} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{12} \varphi + C \bar{p} \theta^{12} \varphi$	$-V_1 p \theta^{12} \varphi + C \bar{p} \theta^{12} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{12} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{12} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{12} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{12} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{13} \varphi + C \bar{p} \theta^{13} \varphi$	$-V_1 p \theta^{13} \varphi + C \bar{p} \theta^{13} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{13} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{13} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{13} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{13} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{14} \varphi + C \bar{p} \theta^{14} \varphi$	$-V_1 p \theta^{14} \varphi + C \bar{p} \theta^{14} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{14} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{14} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{14} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{14} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{15} \varphi + C \bar{p} \theta^{15} \varphi$	$-V_1 p \theta^{15} \varphi + C \bar{p} \theta^{15} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{15} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{15} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{15} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{15} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{16} \varphi + C \bar{p} \theta^{16} \varphi$	$-V_1 p \theta^{16} \varphi + C \bar{p} \theta^{16} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{16} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{16} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{16} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{16} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{17} \varphi + C \bar{p} \theta^{17} \varphi$	$-V_1 p \theta^{17} \varphi + C \bar{p} \theta^{17} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{17} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{17} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{17} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{17} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{18} \varphi + C \bar{p} \theta^{18} \varphi$	$-V_1 p \theta^{18} \varphi + C \bar{p} \theta^{18} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{18} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{18} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{18} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{18} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{19} \varphi + C \bar{p} \theta^{19} \varphi$	$-V_1 p \theta^{19} \varphi + C \bar{p} \theta^{19} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{19} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{19} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{19} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{19} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{20} \varphi + C \bar{p} \theta^{20} \varphi$	$-V_1 p \theta^{20} \varphi + C \bar{p} \theta^{20} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{20} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{20} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{20} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{20} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{21} \varphi + C \bar{p} \theta^{21} \varphi$	$-V_1 p \theta^{21} \varphi + C \bar{p} \theta^{21} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{21} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{21} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{21} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{21} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{22} \varphi + C \bar{p} \theta^{22} \varphi$	$-V_1 p \theta^{22} \varphi + C \bar{p} \theta^{22} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{22} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{22} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{22} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{22} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{23} \varphi + C \bar{p} \theta^{23} \varphi$	$-V_1 p \theta^{23} \varphi + C \bar{p} \theta^{23} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{23} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{23} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{23} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{23} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{24} \varphi + C \bar{p} \theta^{24} \varphi$	$-V_1 p \theta^{24} \varphi + C \bar{p} \theta^{24} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{24} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{24} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{24} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{24} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{25} \varphi + C \bar{p} \theta^{25} \varphi$	$-V_1 p \theta^{25} \varphi + C \bar{p} \theta^{25} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{25} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{25} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{25} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{25} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{26} \varphi + C \bar{p} \theta^{26} \varphi$	$-V_1 p \theta^{26} \varphi + C \bar{p} \theta^{26} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{26} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{26} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{26} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{26} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{27} \varphi + C \bar{p} \theta^{27} \varphi$	$-V_1 p \theta^{27} \varphi + C \bar{p} \theta^{27} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{27} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{27} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{27} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{27} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{28} \varphi + C \bar{p} \theta^{28} \varphi$	$-V_1 p \theta^{28} \varphi + C \bar{p} \theta^{28} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{28} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{28} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{28} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{28} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{29} \varphi + C \bar{p} \theta^{29} \varphi$	$-V_1 p \theta^{29} \varphi + C \bar{p} \theta^{29} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{29} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{29} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{29} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{29} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{30} \varphi + C \bar{p} \theta^{30} \varphi$	$-V_1 p \theta^{30} \varphi + C \bar{p} \theta^{30} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{30} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{30} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{30} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{30} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{31} \varphi + C \bar{p} \theta^{31} \varphi$	$-V_1 p \theta^{31} \varphi + C \bar{p} \theta^{31} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{31} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{31} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{31} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{31} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{32} \varphi + C \bar{p} \theta^{32} \varphi$	$-V_1 p \theta^{32} \varphi + C \bar{p} \theta^{32} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{32} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{32} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{32} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{32} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{33} \varphi + C \bar{p} \theta^{33} \varphi$	$-V_1 p \theta^{33} \varphi + C \bar{p} \theta^{33} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{33} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{33} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{33} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{33} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{34} \varphi + C \bar{p} \theta^{34} \varphi$	$-V_1 p \theta^{34} \varphi + C \bar{p} \theta^{34} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{34} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{34} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{34} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{34} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{35} \varphi + C \bar{p} \theta^{35} \varphi$	$-V_1 p \theta^{35} \varphi + C \bar{p} \theta^{35} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{35} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{35} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{35} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{35} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{36} \varphi + C \bar{p} \theta^{36} \varphi$	$-V_1 p \theta^{36} \varphi + C \bar{p} \theta^{36} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{36} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{36} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{36} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{36} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{37} \varphi + C \bar{p} \theta^{37} \varphi$	$-V_1 p \theta^{37} \varphi + C \bar{p} \theta^{37} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{37} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{37} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{37} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{37} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{38} \varphi + C \bar{p} \theta^{38} \varphi$	$-V_1 p \theta^{38} \varphi + C \bar{p} \theta^{38} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{38} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{38} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{38} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{38} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{39} \varphi + C \bar{p} \theta^{39} \varphi$	$-V_1 p \theta^{39} \varphi + C \bar{p} \theta^{39} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{39} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{39} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{39} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{39} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{40} \varphi + C \bar{p} \theta^{40} \varphi$	$-V_1 p \theta^{40} \varphi + C \bar{p} \theta^{40} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{40} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{40} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{40} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{40} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{41} \varphi + C \bar{p} \theta^{41} \varphi$	$-V_1 p \theta^{41} \varphi + C \bar{p} \theta^{41} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{41} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{41} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{41} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{41} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{42} \varphi + C \bar{p} \theta^{42} \varphi$	$-V_1 p \theta^{42} \varphi + C \bar{p} \theta^{42} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{42} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{42} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{42} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{42} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{43} \varphi + C \bar{p} \theta^{43} \varphi$	$-V_1 p \theta^{43} \varphi + C \bar{p} \theta^{43} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{43} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{43} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{43} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{43} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{44} \varphi + C \bar{p} \theta^{44} \varphi$	$-V_1 p \theta^{44} \varphi + C \bar{p} \theta^{44} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{44} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{44} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{44} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{44} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{45} \varphi + C \bar{p} \theta^{45} \varphi$	$-V_1 p \theta^{45} \varphi + C \bar{p} \theta^{45} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{45} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{45} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{45} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{45} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{46} \varphi + C \bar{p} \theta^{46} \varphi$	$-V_1 p \theta^{46} \varphi + C \bar{p} \theta^{46} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{46} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{46} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{46} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{46} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{47} \varphi + C \bar{p} \theta^{47} \varphi$	$-V_1 p \theta^{47} \varphi + C \bar{p} \theta^{47} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{47} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{47} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{47} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{47} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{48} \varphi + C \bar{p} \theta^{48} \varphi$	$-V_1 p \theta^{48} \varphi + C \bar{p} \theta^{48} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{48} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{48} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{48} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{48} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{49} \varphi + C \bar{p} \theta^{49} \varphi$	$-V_1 p \theta^{49} \varphi + C \bar{p} \theta^{49} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{49} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{49} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{49} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{49} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{50} \varphi + C \bar{p} \theta^{50} \varphi$	$-V_1 p \theta^{50} \varphi + C \bar{p} \theta^{50} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{50} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{50} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{50} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{50} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{51} \varphi + C \bar{p} \theta^{51} \varphi$	$-V_1 p \theta^{51} \varphi + C \bar{p} \theta^{51} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{51} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{51} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{51} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{51} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{52} \varphi + C \bar{p} \theta^{52} \varphi$	$-V_1 p \theta^{52} \varphi + C \bar{p} \theta^{52} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{52} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{52} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{52} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{52} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{53} \varphi + C \bar{p} \theta^{53} \varphi$	$-V_1 p \theta^{53} \varphi + C \bar{p} \theta^{53} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{53} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{53} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{53} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{53} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{54} \varphi + C \bar{p} \theta^{54} \varphi$	$-V_1 p \theta^{54} \varphi + C \bar{p} \theta^{54} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{54} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{54} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{54} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{54} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{55} \varphi + C \bar{p} \theta^{55} \varphi$	$-V_1 p \theta^{55} \varphi + C \bar{p} \theta^{55} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{55} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{55} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{55} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{55} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{56} \varphi + C \bar{p} \theta^{56} \varphi$	$-V_1 p \theta^{56} \varphi + C \bar{p} \theta^{56} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{56} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{56} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{56} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{56} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{57} \varphi + C \bar{p} \theta^{57} \varphi$	$-V_1 p \theta^{57} \varphi + C \bar{p} \theta^{57} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{57} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{57} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{57} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{57} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{58} \varphi + C \bar{p} \theta^{58} \varphi$	$-V_1 p \theta^{58} \varphi + C \bar{p} \theta^{58} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{58} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{58} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{58} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{58} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{59} \varphi + C \bar{p} \theta^{59} \varphi$	$-V_1 p \theta^{59} \varphi + C \bar{p} \theta^{59} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{59} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{59} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{59} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{59} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{60} \varphi + C \bar{p} \theta^{60} \varphi$	$-V_1 p \theta^{60} \varphi + C \bar{p} \theta^{60} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{60} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{60} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{60} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{60} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{61} \varphi + C \bar{p} \theta^{61} \varphi$	$-V_1 p \theta^{61} \varphi + C \bar{p} \theta^{61} \varphi$
	$-V_1 p \theta^{61} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{61} \varphi^2$	$-V_1 p \theta^{61} \varphi^2 + C \bar{p} \theta^{61} \varphi^2$
	$-V_1 p \theta^{62} \varphi + C \bar{p} \theta^{62} \varphi$	$-V_1 p \theta^{62} \varphi + C \bar{p} \theta^{62} \varphi$
	$-V$	

表1 三次元クラック問題の特異解析のための要素剛性マトリックス (\bar{k}), ($\times \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$)

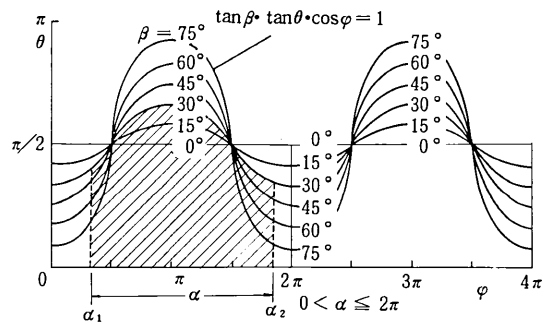
表3 要素応力マトリックス $[\bar{\sigma}]$ ($\times \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$)

A_1	$A_1\theta$	$A_1\varphi$	$A_1\theta\varphi$	$\frac{p}{p}\nu$	$(1+\frac{p}{p}\theta)\nu$	$\frac{p}{p}\nu\varphi$	$(1+\frac{p}{p}\theta)\nu\varphi$	0	0	$\frac{1}{p}\nu$	$\frac{1}{p}\nu\theta$
$-B_1$	$-B_1\theta$	$-B_1\varphi$	$-B_1\theta\varphi$	$\frac{p}{p}\nu$	$V_1+\frac{p}{p}\theta\nu$	$\frac{p}{p}\nu\varphi$	$(V_1+\frac{p}{p}\theta\nu)\varphi$	0	0	$\frac{1}{p}\nu$	$\frac{1}{p}\nu\theta$
$-B_1$	$-B_1\theta$	$-B_1\varphi$	$-B_1\theta\varphi$	$\frac{p}{p}V_1$	$\nu+\frac{p}{p}\theta V_1$	$\frac{p}{p}V_1\varphi$	$(\nu+\frac{p}{p}\theta V_1)\varphi$	0	0	$\frac{1}{p}V_1$	$\frac{1}{p}V_1\theta$
0	V_2	0	$V_2\varphi$	$V_2\lambda_0$	$V_2\lambda_0\theta$	$V_2\lambda_0\varphi$	$V_2\lambda_0\theta\varphi$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{p}V_2$	$\frac{1}{p}V_2\theta$	$-\frac{p}{p}V_2$	$(1-\frac{p}{p}\theta)V_2$	$-\frac{p}{p}V_2\varphi$	$(1-\frac{p}{p}\theta)V_2\varphi$
0	0	$\frac{1}{p}V_2$	$\frac{1}{p}V_2\theta$	0	0	0	0	$V_2\lambda_0$	$V_2\lambda_0\theta$	$V_2\lambda_0\varphi$	$V_2\lambda_0\theta\varphi$

$$\frac{p}{p} = \cos\theta, \quad A_1 = \lambda V_1 + 2\nu, \quad V_1 = 1 - \nu, \quad \lambda_0 = \lambda - 1, \\ \frac{p}{p} = \sin\theta, \quad B_1 = -(\lambda\nu + 1), \quad V_2 = (1 - 2\nu)/2,$$



a 最も一般的な表面クラック



b 有限要素領域

図2 最も一般的な表面クラック問題の特異解析のための有限要素領域

ここに $\{\sigma^*\} = [\sigma_r^*, \sigma_\theta^*, \sigma_\varphi^*, \tau_{r\theta}^*, \tau_{r\varphi}^*, \tau_{\theta\varphi}^*]^T$ であり, $[A^{-1}]$ は(1)式で示されており, $\{u^*\}$ はすでに述べた要素まわりの節点変位ベクトルである. $[\bar{\sigma}]$ の具体的な形を表3にしておく.

最後に, 図2.aに示すような一般的な方向をもち, 任意の開き角をもつ最も一般的な表面クラック問題の特異解析のための有限要素領域は図2.bで与えられ, 三角形要素等を用いて, 同様に解析することができる.

3. あとがき

三次元クラック問題の特異解析を求めるための有限要素法による定式化を行なった. 前報の二次元クラック問題が二次元極座標で定式化されたのと全く同様にして, 三次元クラック問題は, 三次元球座標で定式化できるとがわかった. 第三報以降で, 本法で述べた有限要素解

析法を用いて, 三次元クラック問題を解析した二, 三の例について報告する.

謝 辞

本研究をまとめるにあたり, 終始ご指導と助言をいただきました川井忠彦教授に心から感謝いたします.

(1977年7月28日受理)

参 考 文 献

- 1) 藤谷: "有限要素法によるクラック問題特異解の解析(その1.二次元クラック問題)", 生産研究, Vol. 29, No. 9, 1977年9月.
- 2) Z. P. Bazant and L. Estenssoro: "General Numerical Method for Three-Dimensional Singularities in Cracked or Notched Elastic Solids", Preprint of 4th International Congress on Fracture, Waterloo, Ontario, June, 1977.