

有限要素法によるクラック問題特異解の解析

— その1 二次元クラック問題 —

Finite Element Analysis of the Singular Solution in Crack Problems

— I, Two Dimensional Crack Problems —

藤谷 義信*

Yoshinobu FUJITANI

1. ま え が き

表面クラック、貫通クラックなどの三次元クラック近傍の応力・変位の特異解を解析的に陽な形で求めることは非常に難しい。本研究の目的は、この三次元クラック問題の特異解を有限要素法により数値的に求めることである。この有限要素法による特異解法の妥当性を示すために、まず第1報として、すでに解析解の知られている二次元クラック問題に適用した場合について報告する。本報では、また、二次元クラック問題として、材質の異なる二つの材間のクラック問題を取りあげ、本方法による解析結果について報告する。

2. 有限要素法による特異解法

二次元クラック近傍の応力・変形特性を解析するために、図1に示すようなクラック先端を原点とする極座標

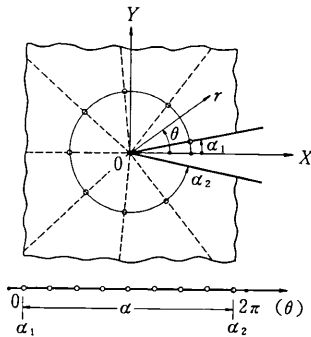


図1 二次元クラック問題特異解析のための有限要素領域

系 (r, θ) を用いる。この問題を支配するつりあい方程式は、

$$-F_r = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} - \frac{\sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1)$$

$$-F_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} = 0$$

で与えられ、境界条件は、 $\theta = \alpha_1, \alpha_2$ において次式で与えられる。

応力境界条件；

$$T_r = \tau_{r\theta} = 0, \quad T_\theta = \sigma_\theta = 0 \quad (2-a)$$

または変位境界条件；

$$\delta u_r = 0, \quad \delta u_\theta = 0 \quad (2-b)$$

つりあい方程式(1)および境界条件(2)を次式の形にまとめると次式は $\delta u_r, \delta u_\theta$ のいかんにかかわらず成立せねばならない。

$$\int_0^\infty \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (F_r \delta u_r + F_\theta \delta u_\theta) r dr d\theta + \int_0^\infty (T_r \delta u_r + T_\theta \delta u_\theta)_{\theta=\alpha_1, \alpha_2} dr = 0 \quad (3)$$

いま、 u_r, u_θ をパラメータ λ を含む変数分離形で次のようにおく。

$$u_r(r, \theta) = r^\lambda u_r^*(\theta), \quad u_\theta(r, \theta) = r^\lambda u_\theta^*(\theta) \quad (4)$$

これより、ひずみ成分は次式で表現される。

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \end{Bmatrix} = r^{\lambda-1} \begin{Bmatrix} \lambda u_r^* \\ u_r^* + \frac{d u_\theta^*}{d \theta} \\ \frac{d u_r^*}{d \theta} + (\lambda - 1) u_\theta^* \end{Bmatrix} \quad (5)$$

したがって、応力成分も、次のような変数分離形で表現される。

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, \theta) &= r^{\lambda-1} \sigma_r^*(\theta) \\ \sigma_\theta(r, \theta) &= r^{\lambda-1} \sigma_\theta^*(\theta) \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) &= r^{\lambda-1} \tau_{r\theta}^*(\theta) \end{aligned} \quad (6)$$

変位、応力の表現式(4)、(6)を変分方程式(3)に代入し、 θ について部分積分をして整理すれば次式が得られる。

$$\int_0^\infty r^{2\lambda-1} dr \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left\{ (\lambda \sigma_r^* - \sigma_\theta^*) \delta u_r^* - \tau_{r\theta}^* \frac{d \delta u_r^*}{d \theta} + (\lambda + 1) \tau_{r\theta}^* \delta u_\theta^* - \sigma_\theta^* \frac{d \delta u_\theta^*}{d \theta} \right\} d\theta = 0 \quad (7)$$

*東京大学生産技術研究所 第2部

研究速報
いま、図1に示したように、 $\alpha_1 < \theta < \alpha_2$ の領域を要素に分割し、要素内の変位 u_r^* , u_θ^* を次のように θ の1次式で近似する。

$$u_r^*(\theta) = a_0 + a_1 \theta, \quad u_\theta^*(\theta) = b_0 + b_1 \theta \quad (8)$$

この変位表現式を(7)式の θ に関する積分項に代入すれば要素に関する次の剛性マトリックス $[k]$ を得る。ただし、平面応力の場合である。

$$\frac{E}{1-\nu^2} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(\lambda^2-1)l & \frac{1}{6}(\lambda^2-1)l & -\frac{1}{4}(3\lambda\nu- & \frac{1}{4}(\lambda\nu+ \\ -\frac{1}{2l}(1-\nu) & +\frac{1}{2l}(1-\nu) & \lambda-\nu-1) & \lambda+\nu-3) \\ \frac{1}{6}(\lambda^2-1)l & \frac{1}{3}(\lambda^2-1)l & -\frac{1}{4}(\lambda\nu+ & \frac{1}{4}(3\lambda\nu- \\ +\frac{1}{2l}(1-\nu) & -\frac{1}{2l}(1-\nu) & \lambda+\nu-3) & \lambda-\nu-1) \\ \frac{1}{4}(3\lambda\nu- & \frac{1}{4}(\lambda\nu+ & \frac{1}{6}(\lambda^2-1)\times & \frac{1}{12}(\lambda^2-1)\times \\ \lambda+\nu+1) & \lambda-\nu+3) & (1-\nu)l - \frac{1}{l} & (1-\nu)l + \frac{1}{l} \\ -\frac{1}{4}(\lambda\nu+ & -\frac{1}{4}(3\lambda\nu- & \frac{1}{12}(\lambda^2-1)\times & \frac{1}{6}(\lambda^2-1)\times \\ \lambda-\nu+3) & \lambda+\nu+1) & (1-\nu)l + \frac{1}{l} & (1-\nu)l - \frac{1}{l} \end{pmatrix} \begin{matrix} u_{ri}^* \\ u_{rj}^* \\ u_{\theta i}^* \\ u_{\theta j}^* \end{matrix} \quad (9)$$

ここに、 E ；縦弾性係数、 ν ；ポアソン比、 $l = \theta_j - \theta_i$ である。

全体の剛性方程式は次式ようになる。

$$[K(\lambda, E, \nu, \alpha)] \{U^*\} = 0 \quad (10)$$

ここに α はクラックの開き角、 U^* は u_r^* , u_θ^* の全節点ベクトルである。

(10)式に境界条件(変位拘束条件)を代入して得られる剛性マトリックスの行列式が、クラック問題の特性方程式を与える。その根(固有値) λ は、求めるべき応力特性パラメータであり、その根に対応する $\{U^*\}$ は変位モードを与える。応力モードは(6)式を参考して、要素に関し次式で計算される(ただし平面応力の場合)。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r^* \\ \sigma_\theta^* \\ \tau_{r\theta}^* \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\lambda+\nu) & \frac{1}{2}(\lambda+\nu) & -\frac{\nu}{l} & \frac{\nu}{l} \\ \frac{1}{2}(\lambda\nu+1) & \frac{1}{2}(\lambda\nu+1) & -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ -\frac{1-\nu}{2l} & \frac{1-\nu}{2l} & \frac{(\lambda-1)(1-\nu)}{4} & \frac{(\lambda-1)(1-\nu)}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ri}^* \\ u_{rj}^* \\ u_{\theta i}^* \\ u_{\theta j}^* \end{Bmatrix} \quad (11)$$

解のうち、とくに重要なものは、クラック先端で変位が有限で、応力が無限大となるもので、この範囲は(4)、(6)式より $0 < \lambda < 1$ である。

3. 解析例1 MODE I, MODE II の解析

二次元クラック問題の MODE I (opening mode) と MODE II (shear mode) を本法により解析した。領域 ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を $\frac{1}{2}$ 領域 ($0 \leq \theta \leq \pi$) で解析する場合は次の境界条件を与えればよい。

$$\left. \begin{matrix} \text{MODE I} & u_\theta^*(\pi) = 0 \\ \text{MODE II} & u_r^*(\pi) = 0 \end{matrix} \right\} \quad (12)$$

図2は、要素分割数に対する根 λ (正解 0.5) の収束状態を、MODE I, MODE II のそれぞれの場合につき示した。要素分割数は全体領域 ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) の等分割数である。図3は、MODE I の場合につき、分割数6, 10, 20について、変位モード、応力モードの解を示す。図は、 $0 \leq \theta \leq \pi$ の結果のみ示し、 $\pi < \theta < 2\pi$ は、図中 S (対称), A (逆対称) の記号で示し、省略した。

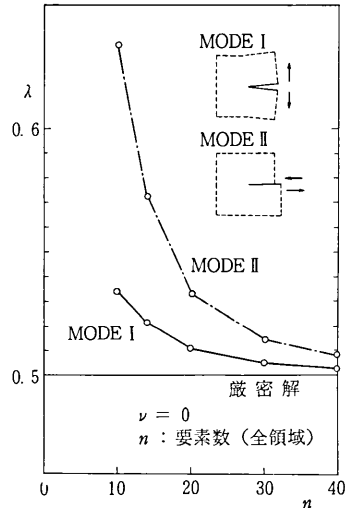


図2 MODE I, MODE II の根 λ の収束状態

4. 解析例2, M. L. Williams の解析解との比較¹⁾

M. L. Williams は二次元弾性論に基づいて、各種境界条件を有する場合の一般的クラック問題の解析解を求めている。図4に Williams の解 λ と、本方法で計算した λ を示す。Williams の解析解で複素根をもつ固定-自由境界条件で $131^\circ < \theta < 180^\circ$ の場合は、本方法で

も複素根となっている。ただし、図中に示した本方法の解は、要素分割数が、実根の場合、全領域 $\alpha (= \alpha_2 - \alpha_1)$ を40、複素根の場合20のときの計算結果である。また本方法の解は、各境界条件の場合について、いくつかの開き角に対してのみ、根 λ を求めた。有限要素法を用いると、各種境界条件の処理は簡単であり、図に示すように解析解と比較して非常によい解を示している。

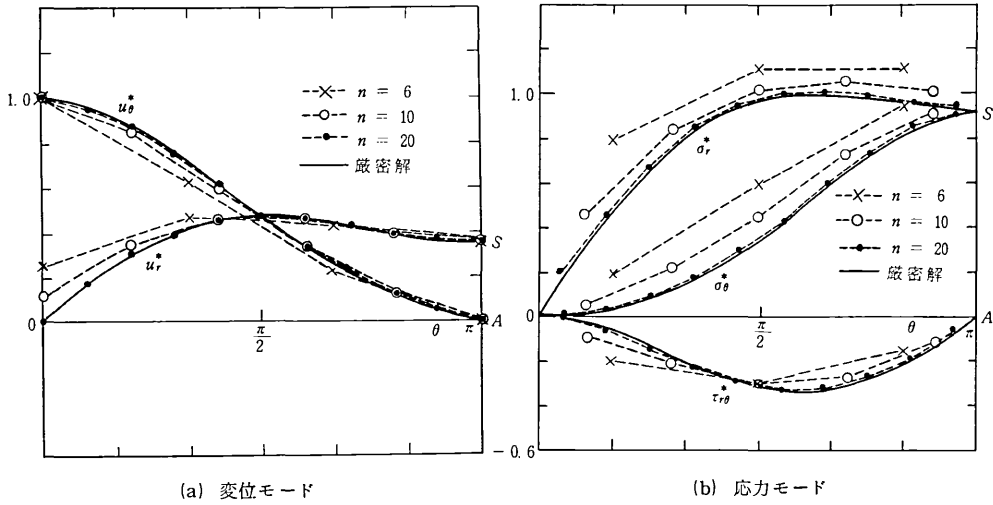


図3 変位・応力モードの収束状態 (MODE I, $\nu = 0.3$)

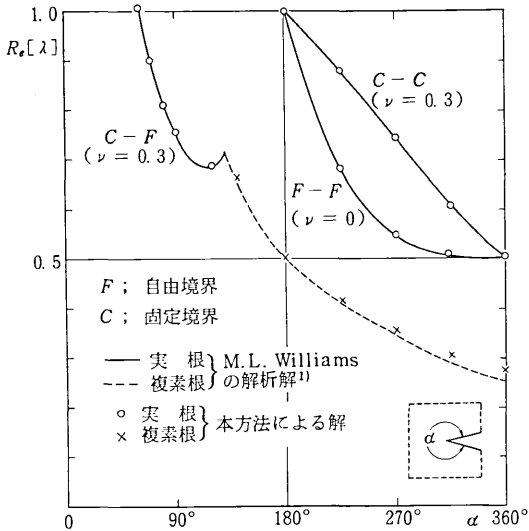


図4 M.L. Williamsの解析解との比較 (各種境界条件・開き角に対する根入)

5. 解析例3. 異材間クラック問題

有限要素法は、境界条件の導入が容易なこととともに領域内の一部の材質が異なっている場合の取扱いも簡単であり、(9)式に示した要素剛性マトリックスの E, ν を要素単位に定義するだけでよい。いま、図5に示す材質(ここでは弾性係数 E)の異なる二つの材質間のクラック

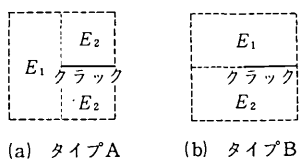


図5 異材間クラック問題

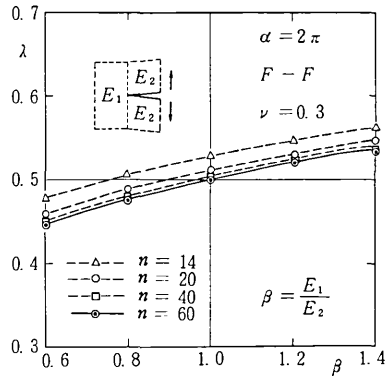
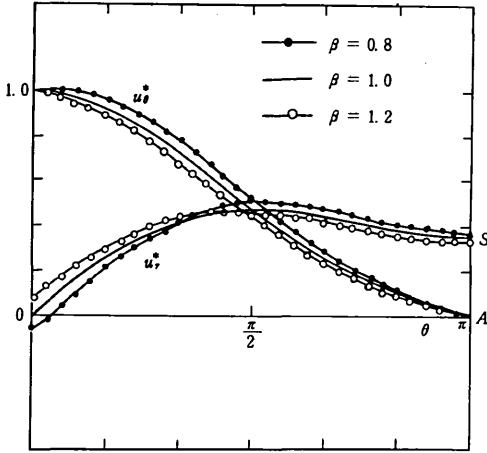


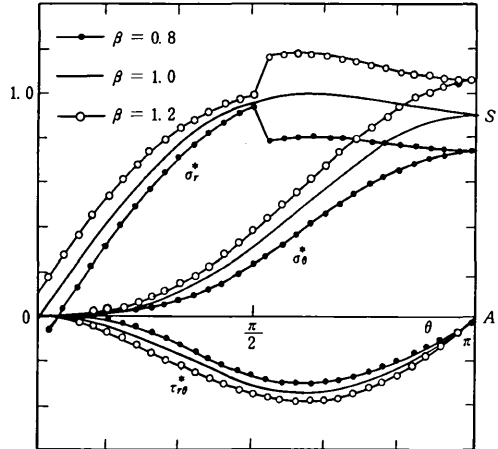
図6 タイプAの場合の解 λ (MODE I)

ク問題を考える。タイプAは、クラック先端に異なる材質がある場合、タイプBはクラック線の両側で材質が異なっている場合である。

図6にタイプAの場合の根 λ を示す。 $\beta = 0.6, 0.8, 1.2, 1.4$ の場合の計算結果(MODE I)で、根 λ はすべて実根であった。 $\beta < 1$ すなわち、クラック先端に弾性係数 E の小さい材料が存在する場合は $\lambda < 0.5$ なる解が得られ、これは $\beta = 1$ の均一材料の応力特異性である $1/\sqrt{r}$ より強い特異性をもつ解が存在することを意味する。この図には要素数の増加に対する根の収束状態も示されている。また、MODE IIについて根を調べてみると要素数の増加につれて、均質材料の場合と同様にMODE Iの根と同一の収束値をもつことが確認された。図8、図9に、要素分割数60の場合のMODE Iの場合の変位・応力モードを示す。このうち σ_r^* は二つの材料の境界位置で、不連続な解が得られた。



(a) 変位モード



(b) 応力モード

図7 タイプA, $\beta = 0.8, 1.2$ の場合の MODE I の変位, 応力モード ($n = 60$)

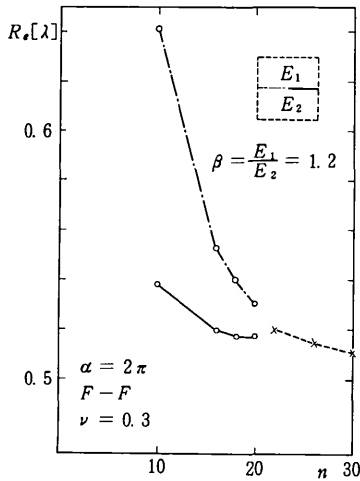


図8 タイプB, $\beta = 1.2$ の場合の根 λ の収束状態

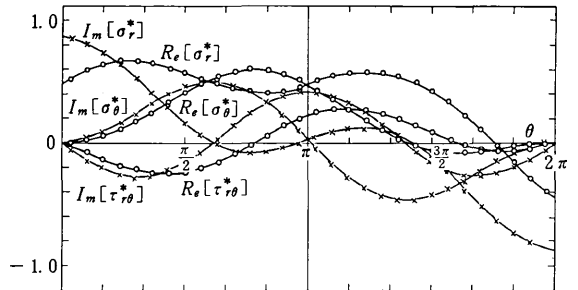


図10 タイプB, $\beta = 1.2, n = 30$ の応力モード

$$\lambda = (0.5107, 0.00867)$$

で、このときの変位モードを図9に、応力モードを図10に示す。モードの実部 (R_e) は MODE I の変形でありモードの虚部 (I_m) は、MODE II とみることができる。 λ が複素根となることは、このタイプBのように MODE I と MODE II が連成するためと思われるが、詳細な物理的解釈は不明である。

6. あとがき

有限要素法による特異解法をいくつかの二次元クラック問題に適用し、その有効性が示された。この手法は、二次元 (および三次元) 弾性論の特異解を数値的に求める方法であり、他の工学分野では、かどのまわりの流れの特異解析などにそのまま応用することができる。

本研究を行なうにあたり、終始ご指導と助言を頂いた川井忠彦教授に心から感謝の意を表します。

(1977年6月27日受理)

参考文献

1) M. L. Williams, "Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension", Journal of Applied Mechanics, Vol. 19, No 4, pp 526-528, December, 1952

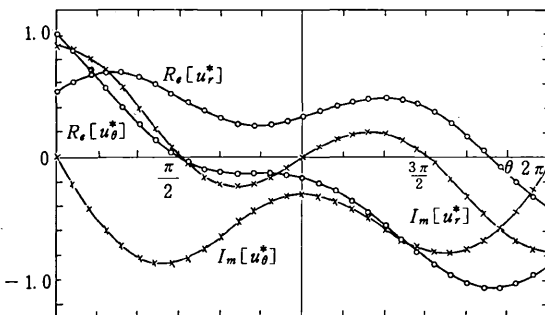


図9 タイプB, $\beta = 1.2, n = 30$ の変位モード

次にタイプBで $\beta = 1.2$ の場合の、根 λ の収束状態を図8に示す。粗い要素分割数では $0 < \lambda < 1$ で二つの実根をもつが、要素数が22以上では複素根が得られた。要素数30のときの根入りの計算結果は、