研究速報

UDC 534.015

多自由度系衝突振動の解析手法について（第2報）

An Analytical Method for the Vibrations of the Multi-degree-of-freedom System with Mutual Impact Interactions (II)

藤田隆史*
Takafumi FUJITA

1. まえがき

本研究では，複数個の同様な振動子を等しい間隔を設けて一次元に配列し，その両端を拘束した系についての強制振動特性，特に周期解とその安定性を研究している．

前報[1)]においては，両端点の質量が振動子の質量に比べて非常に大きく，端点が完全固定とみなせる場合の解析手法について述べた．本報では，より一般的な場合として，図1に示すように，両端点を各々1自由度振動系として考慮した場合の解析手法について述べる．

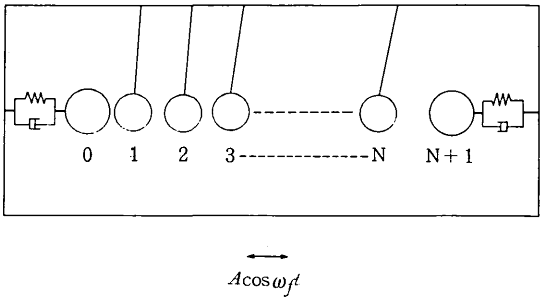

図1 モデル化された衝突振動系

2. 運動方程式

図1に示す系の n 番目の振動子について，枠に対する相対変位を u_n とし，次の運動方式を考える．

$$M\ddot{u}_0 + C\dot{u}_0 + Ku_0 = -F_{0,1} + MA\omega_f^2\cos\omega_f t \tag{1}$$

$$m\ddot{u}_n + c\dot{u}_n + ku_n = F_{n-1,n} - F_{n,n+1} + mA\omega_f^2\cos\omega_f t \qquad (n=1,2,\cdots,N) \tag{2}$$

$$M\ddot{u}_{N+1} + C\dot{u}_{N+1} + Ku_{N+1} = F_{N,N+1} + MA\omega_f^2\cos\omega_f t \tag{3}$$

ここで，m，c，k は各々振動子の質量，減衰係数，ばね定数であり，M，C，K は端点のそれである．A，ω_f は各々強制変位の振幅，円振動数である．$F_{n,n+1}$ は n 番目と $n+1$ 番目の振動子間に作用する力で，これを前報と同様に，次のように与える．

$$F_{n,n+1} = \{a + b(\dot{u}_n - \dot{u}_{n+1})\}\exp[\alpha(u_n - u_{n+1} - D)/\{(N+1)D/2\}] \qquad (n=0,1,\cdots,N) \tag{4}$$

ただし，$\alpha \gg 1$，a，$b > 0$，D は静止状態における振動子の間隔である．

次に，c，C，A は大きくないとして，

$$\left.\begin{aligned}
&\exp\{-2\alpha/(N+1)\} = \varepsilon\ (\ll 1),\ u_n/\{(N+1)D/2\} = v_n,\ k/m = \omega_0^2,\ K/M = \Omega_0^2,\\
&a/\{(N+1)Dk/2\} = \beta,\ b/\sqrt{mk} = \gamma,\ \omega_0 t = s,\ \omega_f/\omega_0 = \omega,\ \Omega_0/\omega_0 = \Omega,\\
&m/M = \rho,\ c/\sqrt{mk} = 2\zeta = 2\varepsilon\mu,\ C/\sqrt{MK} = 2\chi = 2\varepsilon\delta,\ A/\{(N+1)D/2\} = \varepsilon B
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

とおくと，運動方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned}
d^2v_0/ds^2 + \Omega^2 v_0 = \varepsilon[&-2\delta\Omega dv_0/ds\\
&-\rho\{\beta + \gamma(dv_0/ds - dv_1/ds)\}\exp\{\alpha(v_0 - v_1)\} + B\omega^2\cos\omega s]
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
d^2v_n/ds^2 + v_n = \varepsilon[&-2\mu dv_n/ds + \{\beta + \gamma(dv_{n-1}/ds - dv_n/ds)\}\exp\{\alpha(v_{n-1} - v_n)\}\\
&-\{\beta + \gamma(dv_n/ds - dv_{n+1}/ds)\}\exp\{\alpha(v_n - v_{n+1})\} + B\omega^2\cos\omega s]
\end{aligned} \qquad (n=1,2,\cdots,N) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
d^2v_{N+1}/ds^2 + \Omega^2 v_{N+1} = \varepsilon[&-2\delta\Omega dv_{N+1}/ds\\
&+\rho\{\beta + \gamma(dv_N/ds - dv_{N+1}/ds\}\exp\{\alpha(v_N - v_{N+1})\} + B\omega^2\cos\omega s]
\end{aligned} \tag{8}$$

ただし，$\Omega \gg 1$ とする．

*東京大学生産技術研究所 第2部

3. 摂動法による周期解の解析

ここでは，$\omega_0 \approx \omega_f$ の場合の周期解を問題とする．そこで，

$$\omega s = \theta, \qquad 1/\omega = 1 + \varepsilon\sigma \tag{9}$$

とすれば，求めようとする振動子の周期解は，θ について 2π の周期を持つものとなる．

一方，端点の振動については，Ω が整数であれば，θ について周期 2π を持つが，その他の場合には，厳密な意味では周期 2π を持たない．しかしながら，$\Omega \gg 1$ であるから，衝突と衝突の間で端点の振動は相当に減衰しており，Ω が整数か，そうでないかによる，端点の衝突直前の状態の違いは無視し得るものと考えられる．したがって，以後の解析においては，Ω は整数であるとする．

また，端点の変位は，衝突直後においても非常に微小なものであるが，その加速度は振動子のそれと同等のオーダを持ち，その速度も無視できないとする．このような場合には，端点の振動を記述する独立変数を，次式の τ にとる必要がある．

$$\tau = \Omega\theta = \Omega\omega s, \qquad 1/\Omega = \varepsilon\lambda \tag{10}$$

(10)式の関係より，端点の変位，速度，加速度のオーダは，次のようになる．

$$v_0,\ v_{N+1} \sim O(\varepsilon^2), \qquad dv_0/d\tau,\ dv_{N+1}/d\tau \sim O(\varepsilon), \qquad d^2v_0/d\tau^2,\ d^2v_{N+1}/d\tau^2 \sim O(1) \tag{11}$$

また，求めようとする端点の周期解は，τ について周期 $2\pi\Omega$ を持つものとなる．

(9)，(10)式を用いて，(6)〜(8)式を書き直すと，

$$d^2v_0/d\tau^2 + v_0 = \varepsilon\{-(2\sigma+\varepsilon\sigma^2)v_0 - 2(1+\varepsilon\sigma)\delta dv_0/d\tau - \varepsilon^2\lambda^2\rho f_{0,1} + \varepsilon^2\lambda^2 B\cos(\tau/\Omega)\} \tag{12}$$

$$d^2v_n/d\theta^2 + v_n = \varepsilon\{-(2\sigma+\varepsilon\sigma^2)v_n - 2(1+\varepsilon\sigma)\mu dv_n/d\theta + f_{n-1,n} - f_{n,n+1} + B\cos\theta\} \quad (n=1,2,\cdots,N) \tag{13}$$

$$d^2v_{N+1}/d\tau^2 + v_{N+1} = \varepsilon\{-(2\sigma+\varepsilon\sigma^2)v_{N+1} - 2(1+\varepsilon\sigma)\delta dv_{N+1}/d\tau + \varepsilon^2\lambda^2\rho f_{N,N+1} + \varepsilon^2\lambda^2 B\cos(\tau/\Omega)\} \tag{14}$$

ただし，

$$f_{0,1} = [(1+\varepsilon\sigma)^2\beta + (1+\varepsilon\sigma)\gamma\{(\varepsilon\lambda)^{-1}dv_0/d\tau - dv_1/d\theta\}]\exp\{\alpha(v_0 - v_1)\} \tag{15}$$

$$f_{n,n+1} = \{(1+\varepsilon\sigma)^2\beta + (1+\varepsilon\sigma)\gamma(dv_n/d\theta - dv_{n+1}/d\theta)\}\exp\{\alpha(v_n - v_{n+1})\} \quad (n=1,2,\cdots,N-1) \tag{16}$$

$$f_{N,N+1} = [(1+\varepsilon\sigma)^2\beta + (1+\varepsilon\sigma)\gamma\{dv_N/d\theta - (\varepsilon\lambda)^{-1}dv_{N+1}/d\tau\}]\exp\{\alpha(v_N - v_{N+1})\} \tag{17}$$

以上の(12)〜(16)式に，

$$v_0 = \varepsilon^2 v_0^{(2)} + \varepsilon^3 v_0^{(3)} + \varepsilon^4 v_0^{(4)} + \cdots \tag{18}$$

$$v_n = v_n^{(0)} + \varepsilon v_n^{(1)} + \varepsilon^2 v_n^{(2)} + \cdots \qquad (n=1,2,\cdots,N) \tag{19}$$

$$v_{N+1} = \varepsilon^2 v_{N+1}^{(2)} + \varepsilon^3 v_{N+1}^{(3)} + \varepsilon^4 v_{N+1}^{(4)} + \cdots \tag{20}$$

を代入し，ε のベキの係数を等置すれば，以下の諸式が得られる．v_n（$n=1,2,\cdots,N$）については，

$$\varepsilon^0 : d^2v_n^{(0)}/d\theta^2 + v_n^{(0)} = 0 \tag{21}$$

$$\varepsilon^1 : d^2v_n^{(1)}/d\theta^2 + v_n^{(1)} = -2\sigma v_n^{(0)} - 2\mu dv_n^{(0)}/d\theta + f_{n-1,n}^{(0)} - f_{n,n+1}^{(0)} + B\cos\theta \tag{22}$$

$$\varepsilon^2 : d^2v_n^{(2)}/d\theta^2 + v_n^{(2)} = -(\sigma^2 v_n^{(0)} + 2\sigma v_n^{(1)}) - 2\mu(\sigma dv_n^{(0)}/d\theta + dv_n^{(1)}/d\theta) + f_{n-1,n}^{(1)} - f_{n,n+1}^{(1)} \tag{23}$$

$\vdots$

v_0，v_{N+1} については，

$$\varepsilon^2 : d^2v_0^{(2)}/d\tau^2 + v_0^{(2)} = 0 \tag{24}$$

$$d^2v_{N+1}^{(2)}/d\tau^2 + v_{N+1}^{(2)} = 0 \tag{25}$$

$$\varepsilon^3 : d^2v_0^{(3)}/d\tau^2 + v_0^{(3)} = -2\sigma v_0^{(2)} - 2\delta dv_0^{(2)}/d\tau - \lambda^2\rho f_{0,1}^{(0)} + \lambda^2 B\cos(\tau/\Omega) \tag{26}$$

$$d^2v_{N+1}^{(3)}/d\tau^2 + v_{N+1}^{(3)} = -2\sigma v_{N+1}^{(2)} - 2\delta dv_{N+1}^{(2)}/d\tau + \lambda^2\rho f_{N,N+1}^{(0)} + \lambda^2 B\cos(\tau/\Omega) \tag{27}$$

$$\varepsilon^4 : d^2v_0^{(4)}/d\tau^2 + v_0^{(4)} = -(\sigma^2 v_0^{(2)} + 2\sigma v_0^{(3)}) - 2\delta(\sigma dv_0^{(2)}/d\tau + dv_0^{(3)}/d\tau) - \lambda^2\rho f_{0,1}^{(1)} \tag{28}$$

$$d^2v_{N+1}^{(4)}/d\tau^2 + v_{N+1}^{(4)} = -(\sigma^2 v_{N+1}^{(2)} + 2\sigma v_{N+1}^{(3)}) - 2\delta(\sigma dv_{N+1}^{(2)}/d\tau + dv_{N+1}^{(3)}/d\tau) + \lambda^2\rho f_{N,N+1}^{(1)} \tag{29}$$

$\vdots$

ただし，

$$f_{0,1}^{(0)} = (\beta - \gamma dv_1^{(0)}/d\theta)\exp(-\alpha v_1^{(0)}) \tag{30}$$

$$f_{n,n+1}^{(0)} = \{\beta + \gamma(dv_n^{(0)}/d\theta - dv_{n+1}^{(0)}/d\theta)\}\exp\{\alpha(v_n^{(0)} - v_{n+1}^{(0)})\} \qquad (n=1,2,\cdots,N-1) \tag{31}$$

$$f_{N,N+1}^{(0)} = (\beta + \gamma dv_N^{(0)}/d\theta)\exp(\alpha v_N^{(0)}) \tag{32}$$

$$f_{0,1}^{(1)} = \left[\beta(2\sigma - \alpha v_1^{(1)}) - \gamma\{(\sigma - \alpha v_1^{(1)})dv_1^{(0)}/d\theta + dv_1^{(1)}/d\theta - \lambda^{-1}dv_0^{(2)}/d\tau\}\right]\exp(-\alpha v_1^{(0)}) \tag{33}$$

$$f_{n,n+1}^{(1)} = \left[\beta\{2\sigma + \alpha(v_n^{(1)} - v_{n+1}^{(1)})\} + \gamma\{\{\sigma + \alpha(v_n^{(1)} - v_{n+1}^{(1)})\}(dv_n^{(0)}/d\theta - dv_{n+1}^{(0)}/d\theta) \tag{34}$$

$$+ (dv_n^{(1)}/d\theta - dv_{n+1}^{(1)}/d\theta)\}\right]\exp\{\alpha(v_n^{(0)} - v_{n+1}^{(0)})\} \qquad (n = 1, 2, \cdots, N-1) \tag{35}$$

$$f_{N,N+1}^{(1)} = \left[\beta(2\sigma + \alpha v_N^{(1)}) + \gamma\{(\sigma + \alpha v_N^{(1)})dv_N^{(0)}/d\theta + dv_N^{(1)}/d\theta - \lambda^{-1}dv_{N+1}^{(2)}/d\tau\}\right]\exp(\alpha v_N^{(0)}) \tag{36}$$

(i) 第1次近似解

$v_n^{(0)}(n = 1, 2, \cdots, N)$, $\varepsilon^2 v_0^{(2)}$, $\varepsilon^2 v_{N+1}^{(2)}$ を各々 v_n（$n = 1, 2, \cdots, N$），v_0, v_{N+1} の第1次近以解と呼ぶことにする．

$v_n^{(0)}$ については，前報と同様に，(21)式の解を

$$v_n^{(0)}(\theta) = \sum_{j=1}^{n} Z_j^{(0)}\cos(\theta - \phi_j^{(0)}) \qquad (n = 1, 2, \cdots, N) \tag{37}$$

ただし，
$$\sum_{j=1}^{N+1} Z_j^{(0)}\cos\phi_j^{(0)} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{N+1} Z_j^{(0)}\sin\phi_j^{(0)} = 0 \tag{38}$$

とおき，(22)式における $v_n^{(1)}$ が周期 2π を持ったための条件として，次式が得られる．ただし，I_ν は第1種の変形 Bessel 関数である．

$$\begin{cases} P_n^{(0)} \triangleq -2\sigma\sum_{j=1}^{n} Z_j^{(0)}\sin\phi_j^{(0)} + 2\mu\sum_{j=1}^{n} Z_j^{(0)}\cos\phi_j^{(0)} - 2I_1(\alpha Z_n^{(0)})(\beta\sin\phi_n^{(0)} - \frac{\gamma}{\alpha}\cos\phi_n^{(0)}) \\ \qquad + 2I_1(\alpha Z_{n+1}^{(0)})(\beta\sin\phi_{n+1}^{(0)} - \frac{\gamma}{\alpha}\cos\phi_{n+1}^{(0)}) = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots, N) & (39) \\ Q_n^{(0)} \triangleq -2\sigma\sum_{j=1}^{n} Z_j^{(0)}\cos\phi_j^{(0)} - 2\mu\sum_{j=1}^{n} Z_j^{(0)}\sin\phi_j^{(0)} - 2I_1(\alpha Z_n^{(0)})(\beta\cos\phi_n^{(0)} + \frac{\gamma}{\alpha}\sin\phi_n^{(0)}) \\ \qquad + 2I_1(\alpha Z_{n+1}^{(0)})(\beta\cos\phi_{n+1}^{(0)} + \frac{\gamma}{\alpha}\sin\phi_{n+1}^{(0)}) + B = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots, N) & (40) \end{cases}$$

ここで，$\alpha Z_n^{(0)} \gg 1$ であるから，$I_\nu(\alpha Z_n^{(0)})$ の漸近展開

$$\left.\begin{aligned} & I_\nu(\alpha Z_n^{(0)}) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha Z_n^{(0)}}}\exp(\alpha Z_n^{(0)})\, i_\nu(\alpha Z_n^{(0)}) \qquad (\nu = 0, 1, \cdots,) \\ & \text{ただし,}\quad i_{\nu+1}(\alpha Z_n^{(0)}) = i_{\nu-1}(\alpha Z_n^{(0)}) - (2\nu/\alpha Z_n^{(0)})\, i_\nu(\alpha Z_n^{(0)}) \\ & \qquad i_0(\alpha Z_n^{(0)}) = 1 + 1/8(\alpha Z_n^{(0)})^{-1} + 9/128(\alpha Z_n^{(0)})^{-2} \simeq 1 \\ & \qquad i_1(\alpha Z_n^{(0)}) = 1 - 3/8(\alpha Z_n^{(0)})^{-1} - 15/128(\alpha Z_n^{(0)})^{-2} \simeq 1 \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

を用いると，(5)，(9)式の関係より

$$\begin{cases} \varepsilon P_n^{(0)} \sim -2(1/\omega - 1)\sum_{j=1}^{n} Z_j^{(0)}\sin\phi_j^{(0)} + 2\zeta\sum_{j=1}^{n} Z_j^{(0)}\cos\phi_j^{(0)} \\ \qquad - \frac{2}{\sqrt{2\pi\alpha Z_n^{(0)}}}\exp\{\alpha(Z_n^{(0)} - \frac{2}{N+1})\}(\beta\sin\phi_n^{(0)} - \frac{\gamma}{\alpha}\cos\phi_n^{(0)}) \\ \qquad + \frac{2}{\sqrt{2\pi\alpha Z_{n+1}^{(0)}}}\exp\{\alpha(Z_{n+1}^{(0)} - \frac{2}{N+1})\}(\beta\sin\phi_{n+1}^{(0)} - \frac{\gamma}{\alpha}\cos\phi_{n+1}^{(0)}) = 0 \\ \qquad\qquad (n = 1, 2, \cdots, N) & (42) \\ \varepsilon Q_n^{(0)} \sim -2(1/\omega - 1)\sum_{j=1}^{N} Z_j^{(0)}\cos\phi_j^{(0)} - 2\zeta\sum_{j=1}^{N} Z_j^{(0)}\sin\phi_j^{(0)} \\ \qquad - \frac{2}{\sqrt{2\pi\alpha Z_n^{(0)}}}\exp\{\alpha(Z_n^{(0)} - \frac{2}{N+1})\}(\beta\cos\phi_n^{(0)} + \frac{\gamma}{\alpha}\cos\phi_n^{(0)}) \\ \qquad + \frac{2}{\sqrt{2\pi\alpha Z_{n+1}^{(0)}}}\exp\{\alpha(Z_{n+1}^{(0)} - \frac{2}{N+1})\}(\beta\cos\phi_{n+1}^{(0)} + \frac{\gamma}{\alpha}\sin\phi_{n+1}^{(0)}) + \frac{A}{(N+1)D/2} = 0 \\ \qquad\qquad (n = 1, 2, \cdots, N) & (43) \end{cases}$$

したがって，(38)，(42)，(43)式より，$Z_n^{(0)}$, $\phi_n^{(0)}$（$n = 1, 2, \cdots, N+1$）と ω, A の関係が求められる．

$v_0^{(2)}$, $v_{N+1}^{(2)}$ については，(24)，(25)式の解を

$$v_0^{(2)}(\tau) = X_0^{(2)}\cos(\tau - \Omega\phi_1^{(0)}) + Y_0^{(2)}\sin(\tau - \Omega\phi_1^{(0)}) \tag{44}$$

$$v_{N+1}^{(2)}(\tau) = X_{N+1}^{(2)}\cos(\tau - \Omega\phi_{N+1}^{(0)}) + Y_{N+1}^{(2)}\sin(\tau - \Omega\phi_{N+1}^{(0)}) \tag{45}$$

とおき，(26)，(27)式における $v_0^{(3)}$, $v_{N+1}^{(3)}$ が τ について周期 $2\pi\Omega$ を持つための条件として，次式が得られる．

$$\begin{cases} P_0^{(2)} \triangleq 2\delta X_0^{(2)} - 2\sigma Y_0^{(2)} + 2(-1)^{\Omega}\lambda^2 \Omega\rho\gamma/\alpha\, I_{\Omega}(\alpha Z_1^{(0)}) = 0 & (46) \\ Q_0^{(2)} \triangleq -2\sigma X_0^{(2)} - 2\sigma Y_0^{(2)} - 2(-1)^{\Omega}\lambda^2 \rho\beta I_{\Omega}(\alpha Z_1^{(0)}) = 0 & (47) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{N+1}^{(2)} \triangleq 2\delta X_{N+1}^{(2)} - 2\sigma Y_{N+1}^{(2)} - 2(-1)^{\Omega}\lambda^2 \Omega\rho\gamma/\alpha\, I_{\Omega}(\alpha Z_{N+1}^{(0)}) = 0 & (48) \\ Q_{N+1}^{(2)} \triangleq -2\sigma X_{N+1}^{(2)} - 2\delta Y_{N+1}^{(2)} + 2(-1)^{\Omega}\lambda^2 \rho\beta I_{\Omega}(\alpha Z_{N+1}^{(0)}) = 0 & (49) \end{cases}$$

(46)，(47)式より，$X_0^{(2)}$，$Y_0^{(2)}$ は次のように求められる．

$$X_0^{(2)} = -(-1)^{\Omega}\lambda^2\rho I_{\Omega}(\alpha Z_1^{(0)})(\sigma\beta + \delta\Omega\gamma/\alpha)/(\sigma^2+\delta^2) \tag{50}$$

$$Y_0^{(2)} = (-1)^{\Omega}\lambda^2\rho I_{\Omega}(\alpha Z_1^{(0)})(\sigma\Omega\gamma/\alpha - \delta\beta)/(\sigma^2+\delta^2) \tag{51}$$

ここでも，(5)，(9)，(10)，(41)式を用いると，

$$Z_{0,c}^{(2)} \triangleq \varepsilon^2 X_0^{(2)} \sim -(-1)^{\Omega}\frac{\rho}{\Omega_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha Z_1^{(0)}}}\exp\left\{\alpha\left(Z_1^{(0)} - \frac{2}{N+1}\right)\right\} i_{\Omega}(\alpha Z_1^{(0)})\frac{(1/\omega-1)\beta + \chi\Omega\gamma/\alpha}{(1/\omega-1)^2+\chi^2} \tag{52}$$

$$Z_{0,s}^{(2)} \triangleq \varepsilon^2 Y_0^{(2)} \sim (-1)^{\Omega}\frac{\rho}{\Omega_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha Z_1^{(0)}}}\exp\left\{\alpha\left(Z_1^{(0)} - \frac{2}{N+1}\right)\right\} i_{\Omega}(\alpha Z_1^{(0)})\frac{(1/\omega-1)\Omega\gamma/\alpha - \chi\beta}{(1/\omega-1)^2+\chi^2} \tag{53}$$

また，(52)，(53)式の符号を逆にし，$Z_1^{(0)}$ を $Z_{N+1}^{(0)}$ で置き換えれば，$Z_{N+1,c}^{(2)} \triangleq \varepsilon^2 X_{N+1}^{(2)}$，　$Z_{N+1,s}^{(2)} \triangleq \varepsilon^2 Y_{N+1}^{(2)}$ が得られる．

(ii)　第2次近似解

$v_n^{(0)} + \varepsilon v_n^{(1)}$（$n = 1, 2, \cdots, N$），$\varepsilon^2 v_0^{(2)} + \varepsilon^3 v_0^{(3)}$，$\varepsilon^2 v_{N+1}^{(2)} + \varepsilon^3 v_{N+1}^{(3)}$ を各々 v_n（$n = 1, 2, \cdots, N$），v_0，v_{N+1} の第2次近以解と呼ぶことにする．

$v_n^{(1)}$，$v_0^{(3)}$，$v_{N+1}^{(3)}$ は各々(22)，(26)，(27)式より求められ，第2次近以解は次のようになる．

$$\begin{aligned} v_n(\theta) \simeq & \sum_{j=1}^{n} Z_j^{(0)}\cos(\theta - \phi_j^{(0)}) + Z_{n,c}^{(1)}\cos\theta + Z_{n,s}^{(1)}\sin\theta \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha Z_n^{(0)}}}\exp\left\{\alpha\left(Z_n^{(0)} - \frac{2}{N+1}\right)\right\}\left[\beta + 2\sum_{\nu=2}^{l}\frac{(-1)^{\nu}}{1-\nu^2} i_{\nu}(\alpha Z_n^{(0)})\left\{\beta\cos\nu(\theta-\phi_n^{(0)}) - \frac{\gamma}{\alpha}\nu\sin\nu(\theta-\phi_n^{(0)})\right\}\right] \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha Z_{n+1}^{(0)}}}\exp\left\{\alpha\left(Z_{n+1}^{(0)} - \frac{2}{N+1}\right)\right\}\left[\beta + 2\sum_{\nu=2}^{l}\frac{(-1)^{\nu}}{1-\nu^2} i_{\nu}(\alpha Z_{n+1}^{(0)})\left\{\beta\cos\nu(\theta-\phi_{n+1}^{(0)}) - \frac{\gamma}{\alpha}\nu\sin\nu(\theta-\phi_{n+1}^{(0)})\right\}\right] \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} v_0(\theta) \simeq & (Z_{0,c}^{(2)} + Z_{0,c}^{(3)})\cos\Omega(\theta - \phi_1^{(0)}) + (Z_{0,s}^{(2)} + Z_{0,s}^{(3)})\sin\Omega(\theta-\phi_1^{(0)}) + \frac{1}{\Omega^2-1}\frac{A}{(N+1)D/2}\cos\theta \\ & - \frac{\rho}{\sqrt{2\pi\alpha Z_1^{(0)}}}\exp\left\{\alpha\left(Z_1^{(0)} - \frac{2}{N+1}\right)\right\}\left[\frac{\beta}{\Omega^2} + 2\sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\Omega}}^{l}\frac{(-1)^{\nu}}{\Omega^2-\nu^2} i_{\nu}(\alpha Z_1^{(0)})\left\{\beta\cos\nu(\theta-\phi_1^{(0)}) - \frac{\gamma}{\alpha}\nu\sin\nu(\theta-\phi_1^{(0)})\right\}\right] \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} v_{N+1}(\theta) \simeq & (Z_{N+1,c}^{(2)} + Z_{N+1,c}^{(3)})\cos\Omega(\theta - \phi_{N+1}^{(0)}) + (Z_{N+1,s}^{(2)} + Z_{N+1,s}^{(3)})\sin\Omega(\theta-\phi_{N+1}^{(0)}) + \frac{1}{\Omega^2-1}\frac{A}{(N+1)D/2}\cos\theta \\ & + \frac{\rho}{\sqrt{2\pi\alpha Z_{N+1}^{(0)}}}\exp\left\{\alpha\left(Z_{N+1}^{(0)} - \frac{2}{N+1}\right)\right\}\left[\frac{\beta}{\Omega^2} + 2\sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\Omega}}^{l}\frac{(-1)^{\nu}}{\Omega^2-\nu^2} i_{\nu}(\alpha Z_{N+1}^{(0)})\left\{\beta\cos\nu(\theta-\phi_{N+1}^{(0)}) - \frac{\gamma}{\alpha}\nu\sin\nu(\theta-\phi_{N+1}^{(0)})\right\}\right] \end{aligned} \tag{56}$$

ここで，上式やその他の所で現われる $\exp\{\alpha(Z_n^{(0)} - 2/(N+1))\}$ は，$\alpha \gg 1$ であるから，$Z_n^{(0)} < 2/(N+1)$ の場合（すなわち，$n-1$ 番目と n 番目の振動子間に衝突がない場合），ほとんど0であり，したがって，これを含む項もほとんど0となることを述べておく．

4. あ　と　が　き

本報では，周解期の安定性の解析については省略した．これを行うには，(13)式から，v_n（$n = 1, 2, \cdots, N$）に関する変分方程式を求め，前報で述べた方法によって解析することができる．

（1977年3月22日受理）

参　考　文　献

1）藤田隆史：多自由度系衝突振動の解析手法について，生産研究，Vol. 29，No.1，pp 15 − 18，1977