

多自由度系衝突振動の解析手法について(第3報)

An Analytical Method for the Vibrations of the Multi-degree-of-freedom System with Mutual Impact Interactions (III)

藤田隆史*

Takafumi FUJITA

1. ま え が き

前2報^{1), 2)}では、対象とする多自由度系衝突振動における周期解とその安定性の解析方法について述べた。本報では、そこで用いられている反撓力モデル(以後、指数関数形反撓力モデルと呼ぶ)について、特に衝突速度と反撓係数、反撓力の関係を考察する。また、基礎的な実験によるパラメータの同定についても述べる。

2. 指数関数形反撓力モデルについて

指数関数形反撓力モデルが表現する衝突速度と反撓係数、反撓力の関係を求めるために、次のような簡単な力学系を考える。

等しい質量を持つ2個の球が中心線上を運動し、衝突する場合を考える。指数関数形反撓力モデルによれば、この場合の運動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\{a+b(\dot{x}_1-\dot{x}_2)\}\exp\{\alpha_*(x_1-x_2+d)\} \\ m\ddot{x}_2 &= \{a+b(\dot{x}_1-\dot{x}_2)\}\exp\{\alpha_*(x_1-x_2+d)\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ は各々球の中心の位置を表し、 m は質量、 d は2個の球が接した時の中心間距離である。また、 $\alpha_* \gg 1, a, b > 0$ である。

(1)式を次の初期条件のもとで解く。

$$\left. \begin{aligned} x_1(0) &= X_1, & x_2(0) &= X_2 & (X_1 + d < X_2) \\ \dot{x}_1(0) &= U_1, & \dot{x}_2(0) &= U_2 & (U_1 > U_2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 $x_1 - x_2 + d = x, X_1 - X_2 + d = -X, U_1 - U_2 = U$

とおくと、(1), (2)式は次のようになる。

$$m\ddot{x} = -2(a+b\dot{x})\exp(\alpha_* x) \quad (4)$$

$$x(0) = -X, \dot{x}(0) = U \quad (X > 0, U > 0) \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{さらに、(4)式を} & \quad \dot{x} = y \\ & \quad \dot{y} = -2(a+by)\exp(\alpha_* x) / m \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

と変形すると、上2式より次の微分方程式が得られる。

$$dy/dx = -\{2(a+by)/my\}\exp(\alpha_* x) \quad (7)$$

(7)式を(5)式の初期条件のもとで積分すると、

$$\begin{aligned} & (1/\alpha_*)\exp(\alpha_* x) + (m/2b)\{y - (a/b)\log(a+by)\} \\ & = (1/\alpha_*)\exp(-\alpha_* X) + (m/2b)\{U - (a/b)\log(a+bU)\} \end{aligned} \quad (8)$$

(8)式は、(1)式で記述される2個の球の相対運動を位相平面上に描いた場合の軌跡を表している。 $\alpha_* \gg 1$ であるから、 $(1/\alpha_*)\exp(-\alpha_* X) \approx 0$ であり、同様に、 $x < 0$ のときには $(1/\alpha_*)\exp(\alpha_* x) \approx 0$ である。したがって、(8)式による位相平面上の軌跡は大略、図1のようになる。

次に、上述の軌跡から衝突速度と反撓係数の関係を求めてみよう。

$x = X$ のとき、 $y = U, -eU$ が(8)式を満たすものとすれば、 U は衝突速度、 e は反撓係数であると考えられる。

* 東京大学生産技術研究所 第2部

そこで, $x = X, y = -eU$ を(8)式に代入し,

$$V \cong U / (a/b) \quad : \text{無次元衝突速度} \tag{9}$$

とすれば, e と V の関係式として次式が得られる.

$$e = 1/V - (1+1/V) \exp \{-V(e+1)\} \tag{10}$$

上式は,

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= 1 \\ e_{i+1} &= 1/V - (1+1/V) \exp \{-V(e_i+1)\} \quad (i=0, 1, \dots) \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

による繰返し計算によって, e を V の関数として求めることができる.

図2は(11)式による計算結果であって, 衝突速度と反撓係数の一般的な関係として知られている傾向を示している. また, この図と, 実験によって得られる衝突速度と反撓係数の関係から, a/b の値が同定されるが, これについては後で述べることにする.

次に, 衝突速度と反撓力(衝突加速度)の関係を求めてみよう.

(8)式において, $\exp(-\alpha_* X) \cong 0$ であるから, この項を省略すれば,

$$\exp(\alpha_* x) = (m\alpha_*/2b) [U - y + (a/b) \log \{(a+by)/(a+bU)\}] \tag{12}$$

また, 反撓力 F は次式で与えられる.

$$F = (a+by) \exp(\alpha_* x) \tag{13}$$

$$\text{ここで, } f \cong F / \{m\alpha_*(a/b)^2/2\} = (F/m) / \{\alpha_*(a/b)^2/2\} \tag{14}$$

: 無次元反撓力 (無次元衝突加速度)

$$w \cong y / (a/b)$$

とおくと, (12)~(14)式より,

$$f = (1+w) [V - w + \log \{(1+w)/(1+V)\}] \tag{15}$$

(15)式において, $df/dw = 0$ となるとき w を w^* とすれば,

$$f_{max} = w^* (1+w^*) \tag{16}$$

$$\text{ただし, } 2w^* = \log \{(1+w^*)/(1+V)\} + V \tag{17}$$

$$(17) \text{式は } w_0^* = V \tag{18}$$

$$2w_{i+1}^* = \log \{(1+w_i^*)/(1+V)\} + V \quad (i=0, 1, \dots)$$

による繰返し計算によって, w^* , したがって, f_{max} を V の関数として求めることができる.

図3は(16), (18)式による計算結果である. 同図のように曲線が下に凸となる傾向は, 黒鉛ブロックの衝突実験によれば, 平面同志の衝突の場合に顕著であり, (衝突加速度は衝突速度の1.7~1.8乗に比例), 衝突面の曲率が大きくなると目立たなくなり, 直線に近づくようである.³⁾ また, この図と, 実験によって得られる衝突速度と衝突加速度の関係から,

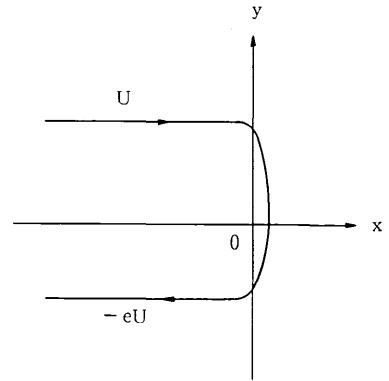


図1 衝突する2個の球の相対運動の軌跡

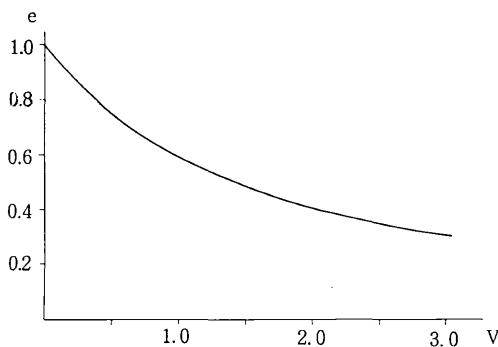


図2 無次元衝突速度と反撓係数の関係

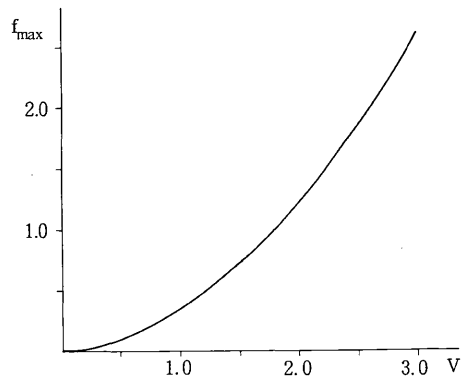


図3 無次元衝突速度と無次元反撓力 (無次元衝突加速度) の関係

研究速報
 α^* の値が同定されるが、これについては次節で述べることにする。

3. 基礎実験によるパラメーターの同定

本研究では、振動子として、支点からの長さ 171 mm の丸棒の先端に直径 38.1 mm の綱球を取付けた振子 ($\omega_0 = 7.41 \text{ rad/sec}$ (1.18Hz), $\zeta = 0.013$) を用い、端点は同じ大きさの綱球を鉛直上下と水平の 3 方向から丸棒によって支持枠に固定している。このような実験装置において、以下に述べる基礎実験を行い、パラメーターの同定を行った。

(i) 振動子間の衝突における衝突速度と反撓係数の関係

図 4 は振動子間の衝突における衝突速度と反撓係数の測定結果を示したもので、図中の実線は、(9), (10) 式において、 $a/b = 120 \text{ (cm/sec)}$ とした時の計算結果である。同図に示されている通り、本モデルによって衝突速度と反撓係数の関係はよく表現されることがわかる。

(ii) 振動子間の衝突における衝突速度と衝突加速度の関係

図 5 は振動子間の衝突における衝突速度と衝突加速度 (14 式の F/m) の測定結果を示したもので、図中の実線は (14), (16), (17) 式において $a/b = 120 \text{ (cm/sec)}$, $\alpha_* = 1300 \text{ (1/cm)}$ とした時の計算結果である。

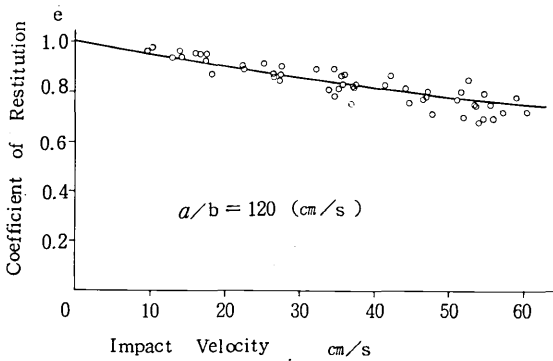


図 4 振動子間の衝突における衝突速度と反撓係数の関係

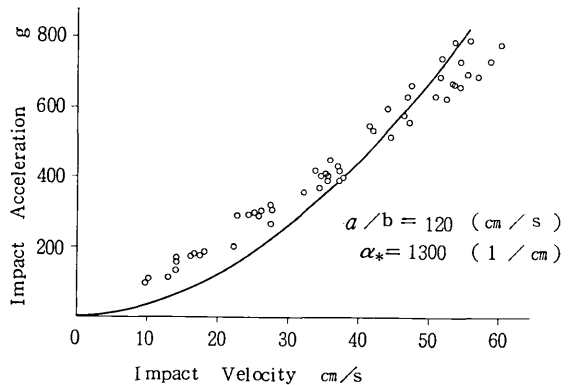


図 5 振動子間の衝突における衝突速度と衝突加速度の関係

前にも述べた通り、衝突速度と衝突加速度の関係は一般に下に凸の曲線となり、本実験の場合にも、わずかにその傾向が見られる。しかしながら、この場合には、上述の反撓係数ほど十分な表現にはなっていない。したがって、本モデルによる衝突速度と衝突加速度の関係は、定量的にはかならずしも満足なものとは言えないが、多自由度系衝突振動における周期解とその安定性の解析のためには十分であろうと思われる。

4. あとがき

本報では、指数関係形反撓力モデルについて、衝突速度と反撓係数、反撓力 (衝突加速度) の関係を明らかにし、実験結果との比較により、多自由度系衝突振動における周期解とその安定性の解析やその他の定性的な議論のためには十分満足し得るものであることを述べた。

なお、衝突加速度の測定に関して、富士電機KK中央研究所第3部のご厚意により圧電式加速度変換器を拝借することができ、測定値をより精度の高いものとすることができた。末筆ながら、同研究所新員和照氏をはじめ、関係諸氏に心から感謝の意を表したい。

(1977年3月25日受理)

参考文献

- 1) 藤田隆史：多自由度系衝突振動の解析手法について、生産研究, Vol. 29, No. 1, pp 15-18, 1977
- 2) 藤田隆史：同上 (第2報), 生産研究, Vol. 29, No. 6, pp 44-47, 1977
- 3) 石塚 宏, 井出 朗, 山田兼男：高温ガス冷却炉炉心の耐震性実験(II), 富士時報, Vol. 48, No. 10, 1975