

特集 7

移動境界をもつ弾性平板の有限要素解析

Finite Element Analysis of Elastic Plates with Unknown Boundary Lines

半谷 裕彦*・国田 二郎*

Yasuhiko HANGAI and Jiro KUNITA

1. 問題の定義

簡単なモデルを用いて本論文で扱う弾性問題の概念を説明する。図-1に示すような孔(A-A)のある床上に置かれた弾性平板を考えてみる。無荷重状態では、床と平板とはA-Bにおいて接触している。今、この板に等分布外力 p を作用すると、図-1(b)のように変形し、C点に新しい境界が出現し、A-C間では床と平板とは離れる。このモデルを接触領域の変化という視点より考察すると、無荷重状態における接触領域A-Bが外力の作用によってA点およびC-Bに後退したことになる。

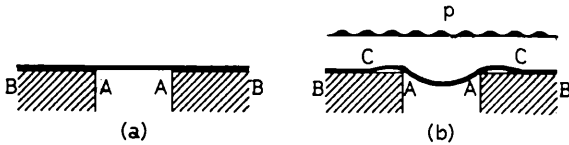


図-1 構造モデル

このモデルのように、外力の作用あるいは外力の増加過程において、構造体相互の接触領域が変化し、それによって、境界の位置および境界条件が外力の関数となる問題をここでは「移動境界を持つ弾性問題」と名付ける。¹⁾ この問題の特徴は、前述したモデルでも理解できるように、変形前・後の形態(境界条件も含めて)が連続しない場合が生じ、通常の増分型の解法が使用出来ないことにある。また、解析上では、接触境界が未知であることから、境界決定のための新たな条件の設定が必要となる。

ここで、「移動境界を持つ弾性問題」の分類とそれに属する構造モデルを図-2に示す。この図は、外力の増加過程に従って接触領域が変化する状態にもとづいて作成したもので、Dundurs²⁾の文献を加筆、整理したものである。

本論文は、要素の節点座標値を未知量に付加する有限要素法の定式化を行ない、上述した問題に対する一つの解法を示すことを目的としている。

2. 移動境界上の境界条件

本論文では、図-1に示す剛体床上にある平板を解析例として採用し、境界条件の設定および移動境界をもつ有限要素法の定式化を行なう。本節では、片側変分¹⁾の

手法を応用してそれらの境界条件を求め、次節への準備とする。

図-3に示すような $r-w$ 座標系を採用する。汎関数を

$$v = \int_{r_0}^{r^2} F(r, w, w', w'') dr \quad (1)$$

で表し、図-3に示す比較曲線と停留曲線との差を作る

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 \quad (2)$$

分類名	接触領域	構造モデル	領域-外力
進行型 (ADVANCING CONTACT)			
後退型 (RECEDING CONTACT)			
混合型 (MIXED CONTACT)			
停留型 (STATIONARY CONTACT)			

図-2 分類図

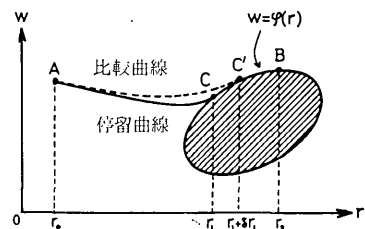


図-3 片側変分問題

*東京大学生産技術研究所 第5部

$$\Delta v_1 = \int_{r_0}^{r_1+\delta r_1} F(r, w, \dot{w}, \ddot{w}) dr - \int_{r_0}^{r_1} F(r, w, \dot{w}, \ddot{w}) dr \quad (2a)$$

$$\Delta v_2 = \int_{r_1+\delta r_1}^{r_2} F(r, w, \dot{w}, \ddot{w}) dr - \int_{r_1}^{r_2} F(r, w, \dot{w}, \ddot{w}) dr \quad (2b)$$

上式において、移動境界 $C(r_1, w_1)$ は、剛体の境界線 $w = \varphi(r)$ に沿って動くものとする、

$$\delta w_1 = \varphi'(r_1) \delta r_1 = [\delta w]_{r=r_1} + w'(r_1) \delta r_1 \quad (3a)$$

$$\delta w'_1 = \varphi''(r_1) \delta r_1 = [\delta w']_{r=r_1} + w''(r_1) \delta r_1 \quad (3b)$$

Taylor 展開と上式を用いて (2a), (2b) 式の第1変分を求めると、

$$\delta v_1 = [F + \left\{ \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) \right\} (\varphi' - w')]_{r_1} \delta r_1 + \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial w'} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) \right\} \delta w + \frac{\partial F}{\partial w''} \delta w' \right]_{r_0} + \int_{r_0}^{r_1} \left[\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) \right] \delta w dr \quad (4a)$$

$$\delta v_2 = [-F(r, \varphi, \varphi', \varphi'')]_{r_1} \delta r_1 \quad (4b)$$

$\delta v = \delta v_1 + \delta v_2 = 0$ より $r = r_1$ における境界条件は、

$$[F(r, w, \dot{w}, \ddot{w}) - F(r, \varphi, \varphi', \varphi'')] + \left\{ \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) \right\} (\varphi' - w') + \frac{\partial F}{\partial w''} (\varphi'' - w'')_{r_1} = 0 \quad (5)$$

平均値の定理より、

$$F(r, w, \dot{w}, \ddot{w}) - F(r, \varphi, \varphi', \varphi'') = (w' - \varphi') \times \frac{\partial F}{\partial w'}(r, w, p, q) + (w'' - \varphi'') \frac{\partial F}{\partial w''}(r, w, p, q) \quad (6a)$$

$$p = \varphi' + h(w' - \varphi') \quad q = \varphi'' + k(w'' - \varphi''), \quad 0 < h, k < 1 \quad (6b)$$

上式を(5)式に代入すると、けっきょく

$$[(w' - \varphi') \{ \dots \} + (w'' - \varphi'') \{ \dots \}]_{r_1} = 0 \quad (7)$$

の形となり、連続条件式 $w(r_1) = \varphi(r_1)$ および $w'(r_1) = \varphi'(r_1)$ を利用すると、移動境界線上の境界条件には、 $w'' = \varphi''$ (8)

が追加される。本論で扱う水平な床の場合には、 $\varphi' = 0$ より $w'' = 0$ となっている。

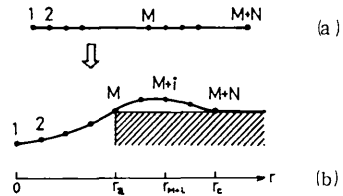


図-4 分割法

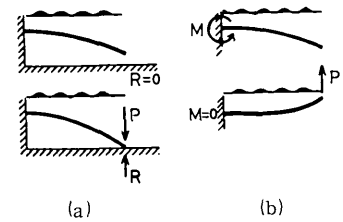


図-5 反力の発生と消滅

3. 節点座標を未知量とする有限要素法

本論で扱っている境界は、外力の作用あるいは増加過程で移動することから、境界線上の座標値を未知量に加えた有限要素法の定式化を行なう。

まず、座標値が不確定な要素の分割法を、図-4のモデルに従って述べる。構造物を必要とされる数の要素に分割し、節点番号を付ける。この時、節点座標は、未定であるから、要素の大きさも未定であり、分割も単なる見取図(図-4(a))となっている。この分割見取図の $(M+N)$ 点を移動境界と考えて、構造物に写すと(図-4(b))、座標値 r_a は確定、 r_c は未定であるから、節点座標 $1 \sim M$ は確定され、 $M+1 \sim M+N$ は未定となる。このモデルの場合、等分割を行なったとすると、各節点座標値は次式で得られる。

$$r_M = r_a, \quad r_{M+i} = r_a + \frac{i}{N} (r_c - r_a), \quad r_{M+N} = r_c \text{ (未定)} \quad (9)$$

以上の分割法を行なうことによって、節点座標値はすべて、移動境界線上の未定の節点座標値によって表されることになり、かつ未知量の数は、前節で追加された境界条件の数と一致することになる。

次に、有限要素法の定式化を行なう。境界処理を行なう前の釣合式を次式で表す。

$$\{R\} = [K]\{d\} - \{F\} \quad (10)$$

ここに $\{R\}$: 反力 (反モーメントを含む) ベクトル、 $[K]$: 剛性マトリクス、 $\{d\}$: 節点変位 (回転を含む)、 $\{F\}$: 外力ベクトルである。境界条件が確定している通常の場合には、境界処理を行なうことによって、(10) 式を

$$\begin{Bmatrix} O \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

と変形し $(R_3 \neq 0, d_3 = 0)$,

$$\{O\} = [K_{11}]\{d_1\} - \{F_1\}$$

$$\text{または } \{F_1\} = [K_{11}]\{d_1\} \quad (12)$$

を解くことになる。本論文で扱う、移動境界の場合は、たとえば、図-5に示すように、反力が0であったものが0でなくなったり(a)、0でなかった反力が0になったり(b)する。そのため、移動境界における反力を、0の場合も含めて、形式的に $\{R_2\}$ で表わし、(11)式を次のように変形する。

$$\begin{Bmatrix} O \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

上式において、剛性行列 $[K]$ および外力ベクトル $\{F\}$ は要素の節点座標が境界上の未知節点座標値 $\{r_c\}$ の関数であるため、 $\{r_c\}$ の関数となっている。すなわち $[K(r_c)]$ 、 $\{F(r_c)\}$ 。

以下、本論で扱う解析例は図-5(b)に属するので、ここでは、力 $\{R_2\}$ が消失する場合の定式化のみを示すことにする。 $\{R_2\} = \{O\}$ 、かつ、2節で述べたように、変位が規定されていることを利用すると、確定境界の境界処理を行なって、(13)式は、

$$\begin{Bmatrix} O \\ O \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}(r_c) \\ K_{21}(r_c) \end{bmatrix} \{d_1\} + \begin{bmatrix} K_{12}(r_c) \\ K_{22}(r_c) \end{bmatrix} \{d_2\} - \begin{Bmatrix} F_1(r_c) \\ F_2(r_c) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

と変形できる。ここで $\{d_2\}$ は与えられているから

$$\begin{Bmatrix} g_1(r_c) \\ g_2(r_c) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{12}(r_c) \\ K_{22}(r_c) \end{bmatrix} \{d_2\} - \begin{Bmatrix} F_1(r_c) \\ F_2(r_c) \end{Bmatrix} \quad (15)$$

とおき、さらに $\{d_1\}$ の係数マトリックスを正方行列にすることと、未知節点座標 $\{r_c\}$ を組みこむために(14)式を次のように変形する。

$$\begin{Bmatrix} O \\ O \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}(r_c) & O \\ K_{21}(r_c) & O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ r_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g_1(r_c) \\ g_2(r_c) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

上式は、節点変位 $\{d_1\}$ と $\{r_c\}$ を未知量とする連立非線形方程式となっており、この式が「移動境界値問題」の有限要素法の定式化による基礎式となる。

4. Newton-Raphson 法による数値解析

(16)式を

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}(r_c) & O \\ K_{21}(r_c) & O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ r_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g_1(r_c) \\ g_2(r_c) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} O \\ O \end{Bmatrix} \quad (17)$$

とおき、Newton-Raphson 法を用いる。 $\{d_1\}$ の各成分による偏微分を形式的に

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial d_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial d_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial d_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial d_k} \end{bmatrix}, \quad k: \{d_1\} \text{の成分の数} \quad (18)$$

で表すことにすると(17)式の不釣合量修正方程式は

$$\begin{Bmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial d_1} & \frac{\partial f_1}{\partial r_c} \\ \frac{\partial f_2}{\partial d_1} & \frac{\partial f_2}{\partial r_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta d_1 \\ \Delta r_c \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{11} & \frac{\partial K_{11}}{\partial r_c} \{d_1\} + \frac{\partial g_1}{\partial r_c} \\ K_{21} & \frac{\partial K_{21}}{\partial r_c} \{d_1\} + \frac{\partial g_2}{\partial r_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta d_1 \\ \Delta r_c \end{Bmatrix} \quad (19)$$

となる。 $\{d_1, r_c\}$ の初期値を仮定し、(17)、(19)式を交互に用いて収束させる。

5. 解析例

貯蔵タンクの基礎の一部が不同沈下などにより欠落し、底板が図-6に示すように変形したときの移動境界 r_c とその時の変形性状を求める。有限要素はツェンキービッツ³⁾による軸対称シェル要素の曲げ部分を採用した。移動境界線上の境界条件としては $M_r = 0$ が $w'' = 0$ と等価であるとしてこれを用いる。要素の分割は、図-7の右上図に示すように、孔の部分を5分割、A-C部分を $N=1$ 、 $N=4$ の2種類の分割としている。図-7は r_c の初期値として $r_c = 1.5a$ 、および $r_c = 2.0a$ を用いた時の収束の様子を示したものである。この例の場合軸対称円板の基礎方程式を r_c を未知量とし、(8)式を境界条件に追加して求めた理論解による正解は $r_c = 1.6022a$ である。図-8、図-9に理論解と有限要素法による数値解の比較を示す。図8はたわみの様子、図-9は回転角の様子を示したものである。両者の解は良く一致している。

薄肉平板の変形性状には、たわみ w が板厚の2分の1程度を越えると、面内剛性が重要な役割をはたすようになる。そこで本論文では、面内ひずみを

$$\epsilon_r = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \quad (20)$$

で表した有限要素を用いて数値解析を行なった。要素の精度はTimoshenko⁶⁾の近似解と比較してある(図-10)。この要素を用いて図-6に示したモデルの解析を行なった結果を図-11に示す。図には中央点のたわみ w と接触開始点 r_c を示す。case 1は端部で面内変位を拘束したもの、case 2は拘束しなかったものである。 r_c の位置は面内剛性の影響により移動するが、ここでは先に示した収束計算は行なわず、C点でのたわみ角から判断して $0.02a$ ずつの増減をした。図の実験結果は、

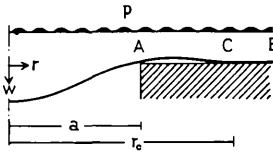


図-6 解析モデル

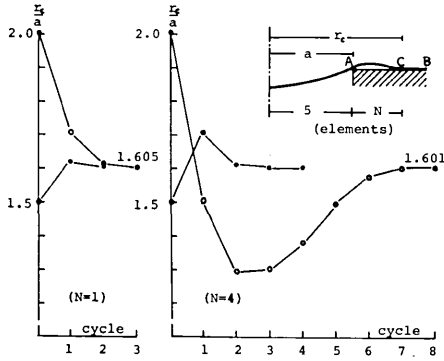


図-7 接触点座標の収束

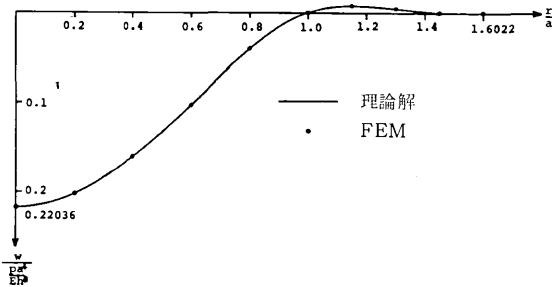


図-8 た わ み

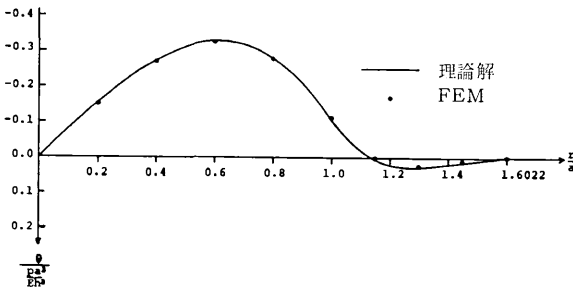


図-9 た わ み 角

図-11に示した圧力装置を利用して測定した値である。

謝 辞

本研究を行なうにあたり、本所第5部田中尚教授には、種々のご教示をいただき、また、実験は法政大学工学部本間正彰・山口修由・村山浩久氏の協力を得て行なったものの一部を採用したものである。(1977年3月23日受理)

参 考 文 献

1) エルスゴルトツ「変分法」ブレイン図書出版 1972

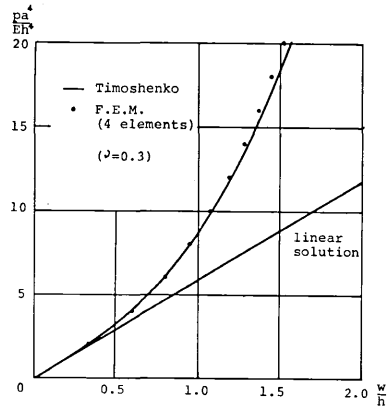


図-10 要素の精度

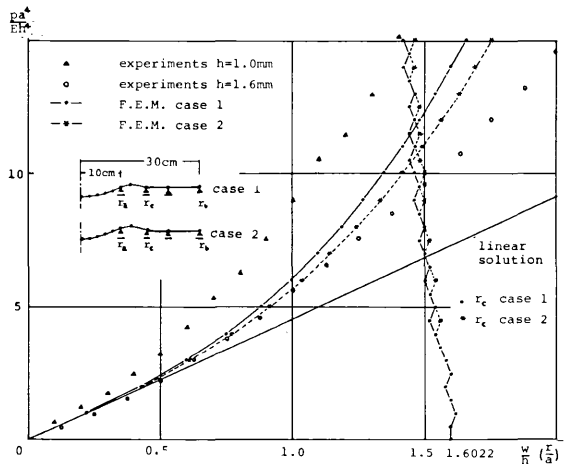


図-11 面内力を考慮した解析例

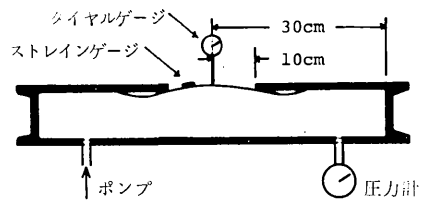


図-12 実験装置概念図

2) J. Dundurs "Properties of elastic bodies in contact" The mechanics of the contact between deformable bodies, Delft University Press 1975
 3) O. C. ツェンキービッツ, Y. K. チェン, 吉識雅夫監訳 マトリックス有限要素法 培風館 1970
 4) 葛, 山地 "接触問題の有限要素解析法に関する研究" 日本機械学会誌 第76巻 1973
 5) A. S. Wifi, Y. Yamada "Elastic-Plastic Large Strain Analysis of Metal Forming by The Finite Element Method" 第28巻10号 1976
 6) Timoshenko Woinowsky Krieger "Theory of Plate and Shells McGraw Hill Kogakusha 1959