

機械構造物の過渡応答の掃引開始振動数 による変化について

An Effect of Starting Frequencies on the Transient
Response of Machine Structure

高橋 伸晃*

Nobuaki TAKAHASHI

1. はじめに

機械構造物の定常応答試験による振動特性の抽出方法や時間とともに加振振動数が直線的に変化する掃引加振における過渡応答、およびその様相の掃引速度による変化を利用した振動特性の抽出法の概略については既に発表した^{1),2),3)}。本報では実際の過渡応答試験を行なう上で問題になる点を具体的に述べる。掃引開始振動数は振動試験ではゼロでない方が普通であるが、その影響はほとんど無視できるものと見ながちである。掃引開始振動数が変われば過渡応答位や共振振動数が変動する様相を理論的に確認することが本報の第一の目的とするところである。また定常的な強制振動を行なった後に加振振動数の掃引を行なえば、その定常強制振動の掃引を開始した瞬間の変位と速度を初期条件とした固有振動数による自由振動が残留するし、また掃引加振中の各瞬間の変位と速度を初期条件とする自由振動も生ずるので、それぞれが過渡応答に及ぼす影響の検討も行なう。

2. 掃引開始振動数の影響

時間とともに加振振動数が直線的に変化する掃引加振に対する機械構造物の動的応答の理論的解析法は既に述べたが³⁾、それを要すれば記号には同一の表示法を使用することとして次のようになる。

掃引速度を h 、掃引開始時の加振円振動数を p_0 、時刻 t での加振円振動数を p 、固有円振動数を ω 、減衰係数を ζ とすると

$$\nu = \frac{p_0}{\omega}, q_0 = \frac{(\omega - p_0)^2}{4\pi^2 h}, q = \frac{q_0}{(1 - \nu)^2},$$

$$r = \frac{1}{2\pi} (\omega - p_0) t \tag{1}$$

$$z_1 = -i\pi q_0 \left(\frac{r}{q_0} + \frac{\nu - u_1}{1 - \nu} \right)^2$$

ただし、 $u_1 = \sqrt{1 - \zeta^2} + i\zeta$ (2)

$$z_2 = -i\pi q_0 \left(\frac{r}{q_0} + \frac{\nu - u_2}{1 - \nu} \right)^2$$

ただし、 $u_2 = -\sqrt{1 - \zeta^2} + i\zeta$ (3)

$$b + ic = 2\sqrt{\pi} e^{z_1 K} + \int_0^\infty \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{z_1 + \nu}} d\nu - \int_0^\infty \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{z_1 + \nu}} d\nu \tag{4}$$

$$\left. \begin{aligned} \arg(z_1) \leq \pi & \text{で } K = 0 \\ \arg(z_2) > \pi & \text{で } K = 1 \end{aligned} \right\}$$

とすれば無次元時刻 r のときの過渡応答倍率 R 、位相差 θ はそれぞれ次の通りである。

$$R(r) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{1 - \nu} \frac{\sqrt{q_0}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sqrt{b^2 + c^2} \tag{5}$$

$$\tan \theta = -\frac{b - c}{b + c} \tag{6}$$

掃引開始振動数がゼロの場合には式(4)の右辺の計算を数値積分により行なえば応答倍率、位相差及び共振点の振動数が得られる。その結果の概略は文献(3)に報告済である。

掃引開始振動数がゼロでない場合には次の手順で過渡応答の計算を行なう。掃引開始振動数を式(1)により無次元化し、掃引開始振動数比 ν として取扱う。 q が同一のもの同志を比較しても h と ν は一義的に決定できぬから $h = \text{一定}$ としての比較ができない。そこで式(1)から q に対応する q_0 を求める。次に式(2)、(3)から z_1, z_2 を求めて式(4)に代入し、 b, c を計算すれば式(5)、(6)から ν による影響を受けた R, θ が求まる。

ところが掃引条件として $\nu = 0, q = q_1, \zeta = \zeta_0$ が与えられた場合に $\nu \neq 0, q = q_1 / (1 - \nu)^2, \zeta = (1 - \zeta_0) \zeta_1$ という条件の過渡応答と同一の点で同一の大きさの応答の極大値 R_0 となることが次のように説明できる。 $\nu \neq 0$ の場合について式(1)に $q = q_1 / (1 - \nu)^2$ を代入すれば $q_0 = q_1$ となり、また式(2)、(3)から z_1, z_2 の実部と虚部の関係はそれぞれ次のように書け、 ζ, ν は単独では表われない。

$$\left. \begin{aligned} I_m(z_1) &= -\frac{1}{4\pi q_0} \left(\frac{1}{\zeta_0} \right)^2 [R_e(z_1)]^2 + \pi q_0 \zeta_0^2 \\ I_m(z_2) &= -\frac{1}{4\pi q_0} \left(\frac{1}{\zeta_0} \right)^2 [R_e(z_2)]^2 + \pi q_0 \zeta_0^2 \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

ただし、 $\zeta_0 = \frac{\zeta}{1 - \nu}$

したがって $\zeta = (1 - \nu) \zeta_1$ の場合には $\zeta_0 = \zeta_1$ となる。 $\nu = 0$ の場合には $q = q_0, \zeta = \zeta_0$ となることは明らかであるから、上述の二つの掃引条件では式(4)、(5)から応答

* 東京大学生産技術研究所 第2部

研究速報
倍率が一致し、 z_1, z_2 を複素平面上に表示すれば同一の点で R_0 となる。

R_0 の大きさに関しては $\zeta = 0$ の場合には $\nu = 0, q = q_1$ の掃引条件と $\nu \neq 0, q = q_1 / (1-\nu)^2$ の掃引条件の応答は同じであるから、 q を一定にした状態で ν が大きくなることは $\nu = 0$ で q が小さくなること、つまり掃引速度が大きくなることと同じ効果を生ずることが数式の上から言える。 $\zeta \neq 0$ の場合には q と ζ の相互の関係を数式の上から判断することは困難であるから、図1の数値計算の結果を考察する。 ν が大きくなると R_0 はほぼ指

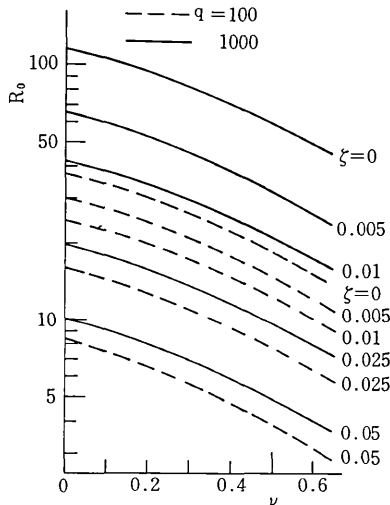


図1 応答倍率の極大値と掃引開始振動数比の関係
数曲線を描いて減少する。減少の割合は $\nu=0$ 付近で $\nu=1$ につき $\log R_0 = -0.47$ である。 q, ζ の大小による減少の割合の変化はこの対数グラフ上ではほとんどない。 ν が一定の場合には ν の値にかかわらず q が大きく ζ が小さいほど R_0 は大きい。

ν の影響による θ_0 の変化も R_0 と全く同じである。

λ_0 について検討する。 z_1, z_2 の実部はそれぞれ次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} R_e(z_1) &= -2\pi q_0 \frac{\zeta}{1-\nu} \left(\frac{r}{q_0} + \frac{\nu - \sqrt{1-\zeta^2}}{1-\nu} \right) \\ R_e(z_2) &= -2\pi q_0 \frac{\zeta}{1-\nu} \left(\frac{r}{q_0} + \frac{\nu + \sqrt{1-\zeta^2}}{1-\nu} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

複素平面上に表示した z_1, z_2 の R が R_0 となる時の点は ν にかかわらず定点であるが、その点に到達する時間は式(8)から ν の関数である。 $\nu = 0, q = q_1, \zeta = \zeta_1$ の掃引条件で応答が極大値となる λ_0 を λ_{01} 、また $\nu \neq 0, q = q_1 / (1-\nu)^2, \zeta = (1-\nu)\zeta_1$ の条件での λ_0 を λ_{02} とすれば、 R_0 に及ぼす z_2 の影響は z_1 の1%以下であるから無視し、 λ_{01} と λ_{02} の関係は次の式(9)のようになる。

$$\lambda_{02} \doteq (1-\nu)^2 (\lambda_{01} - \sqrt{1-\zeta_1^2}) - (1-\nu) [\nu - \sqrt{1-(1-\nu)^2 \zeta_1^2}] \quad (9)$$

$\zeta = 0$ の場合には $\nu \neq 0, q = q_1 / (1-\nu)^2$ での λ_{02} は $\nu = 0, q = q_1$ での λ_{01} を式(9)で修正すればよいから、 λ_0 については ν が大きくなることは $\nu = 0$ で掃引速度が大きい場合に対応する上にさらに式(9)による λ_0 の減少の効果が生じることになる。

$\zeta \neq 0$ の場合にはさらに複雑であるから図2の数値計算結果を考察する。 ν が大きくなると λ_0 はほぼ指数線的に増加する。増加の割合は $\nu = 0$ 付近で $\nu = 1$ につき $\log(\lambda_0 - 1) = 0.47$ である。 R_0 の場合と同様に q, ζ の大小による増加の割合の変化はほとんどない。

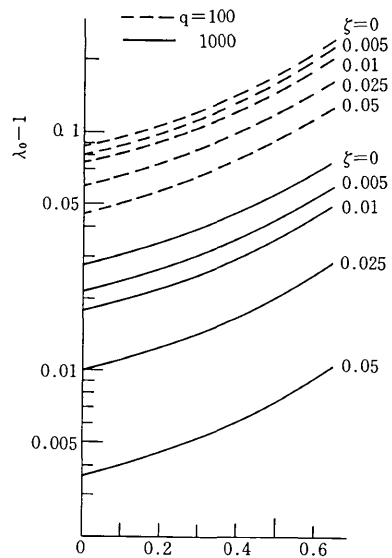


図2 λ_0 の1からのずれと掃引開始振動数比の関係

過渡応答曲線の共振点 ω での応答の極大値を R_0 とする時、 η を1より大きい定数として R_0 / η の値をとる共振点の低域側の振動数の幅を求め、それを仮に $\Delta \omega / 2$ として $\sqrt{\eta^2 - 1} \zeta' = \Delta \omega / \omega'$ として見かけの粘性減衰係数比を定義した時の ζ' と q の関係については既に述べたところ³⁾であるが、前述のように ν の増加によって R_0 が減少するのは減衰係数比が増加することとほぼ同じ効果のあることから類推できるように、 ζ' が ν によって変わる状況は図3のようになり、 ν が大きくなると見かけの減衰係数比は q にかかわらず直線的に減少する。

3. 自由振動の影響

振動試験を行なう場合には掃引開始時の振動数はゼロでない方が実際的と考えられるが、この場合にはそれまでの定常的な強制振動の掃引を開始した瞬間の変位と速度を初期条件とした固有振動数による自由振動が残留する。また掃引加振中に各瞬間の変位と速度を初期条件とする自由振動も生ずるので、それぞれが過渡応答倍率の極大値の大きさに及ぼす影響の検討を行なう。

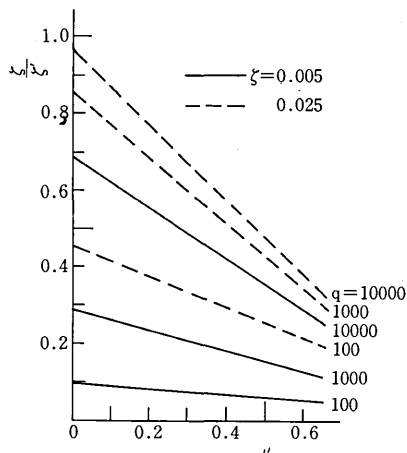


図3 見かけの減衰係数比と掃引開始振動数比の関係

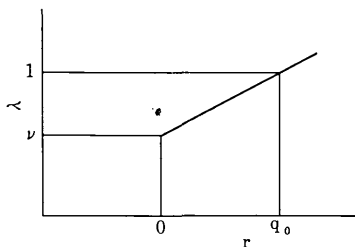


図4 加振振動数比の時刻による変化

加振振動数比 λ の時刻による変化が図4のようであるとする。 $r = 0$, すなわち $t = 0$ で $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ の時、過渡応答の一般解は式(5)で与えられる大きさの振幅をもつ強制振動と次の自由振動の解 x_1 の和で与えられる。

$$x_1 = \frac{1}{\alpha - \beta} (-\beta x_0 + \dot{x}_0) e^{\alpha t} + \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha x_0 - \dot{x}_0) e^{\beta t} \quad (10)$$

定常加振の状態では x_0 と \dot{x}_0 の間には次の関係が成立する。

$$x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\nu\omega}\right)^2 = \frac{d^2}{(1-\nu^2)^2 + 4\zeta^2\nu^2} \quad (11)$$

式(11)の条件のもとに式(10)の x_1 の絶対値の最大値 U_0 を求めることは複雑な計算となるので、そのかわりに x_0 , \dot{x}_0 の取りうる最大値を使用し式(10)を次式で置き換える。

$$x_1 = U_1 \cos(\sqrt{1-\zeta^2} \omega t + \theta) \quad (12)$$

ただし、

$$U_1^2 = \frac{d^2}{1-\zeta^2} \frac{1+2\zeta\nu+\nu^2}{(1-\nu^2)^2+4\zeta^2\nu^2} e^{-2\pi\zeta q(\lambda-\nu)} \geq U_0^2$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\zeta + \frac{\dot{x}_0}{x_0} \right) \right]$$

U_1/d と式(5)の極大値の比を作り R_f とすると、 $t = 0$ の時の初期条件で生じた自由振動の残留分の大きさと過

渡応答の比率をほぼ示すと考えてよく、 R_f は次式で表わされる。

$$R_f = \frac{1}{R_0\sqrt{1-\zeta^2}} \sqrt{\frac{1+2\zeta\nu+\nu^2}{(1-\nu^2)^2+4\zeta^2\nu^2}} e^{-2\pi\zeta q(\lambda-\nu)} \quad (13)$$

λ_0 の $\lambda = 1$ からのずれはわずかなことと、 λ が1より大きいほど U_1 は減少するので自由振動の影響を取除く立場から $\lambda_0 = 1$ として R_f の ν に対する変化を図示すると図5のようになる。 ζ , q が一定であれば ν が大きいほど R_f は大きくなるが、 ζ は大きいほど、 q は小さいほ

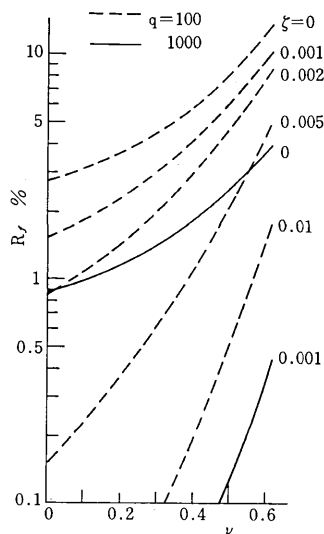


図5 残留する自由振動の割合と掃引開始振動数比の関係

ど R_f の大きくなる割合は大きい。また ν が一定ならば、 ζ も q も小さいほど R_f は大きい。しかし ζ がゼロで掃引速度の比較的早い $q = 100$ 程度でも ν がこの図4のように0.6程度以下であれば、 R_f は数%以下になることが判明する。まして U_0 は U_1 より小さく、実際の機械構造物では ζ が極めて小さな場合でもゼロになることはないから ν が小さい限り掃引開始前の振動の残留分による影響は無視できる。

また掃引加振中に生ずる自由振動の変位 x_2 には $t = 0$ における x_2 の振幅 U_2 を使用して次の関係の成立することが容易に確かめられる。

$$|x_2| \leq U_2 e^{-2\pi\frac{\zeta}{1-\nu}r} \leq \frac{d^2}{\sqrt{(1-\nu^2)^2+4\zeta^2\nu^2}} e^{-2\pi\zeta q(\lambda-\nu)} \leq U_1 \quad (14)$$

したがって別に掃引加振中に生ずる自由振動の影響を検討しなくとも、 x_2 の大きさは常に U_1 以下であるから、 $t = 0$ の時の初期条件による自由振動について R_f で評価すれば十分なことがわかる。

研究速報

4. ま と め

実際に掃引加振試験を行なう場合には掃引開始振動数がゼロでない方が一般的であるから、それが過渡応答に及ぼす影響を理論的に明らかにした。また掃引開始前の定常強制振動により生じた自由振動の残留分と掃引加振中に生ずる自由振動の大きさを評価しその影響も検討した。

本研究の数値計算の一部は東京大学大型計算機センターの施設を利用して得られたことを付記する。

(1977年1月24日受理)

参 考 文 献

- 1) 高橋, 生産研究, 25-10, (1973, 10), P, 55
- 2) 高橋, 生産研究, 26-3, (1974, 3), P, 17
- 3) 高橋, 生産研究, 27-2, (1975, 2), P, 48

次 号 予 告 (5月号)

地 震 工 学 小 特 集

巻 頭 言	耐震構造学の研究グループに期待する	武 藤 義 一
	ERS 10周年を迎えての所感	岡 本 舜 三
小 特 集	11F壁式共同住宅の試設計	坪 井 善 勝
	土木工学における耐震研究のあゆみ	久 保 慶 三 郎
	生研における耐震建築構造の研究	田 中 尚
	ERS を中心にした機器・配管系の耐震設計に関する研究の展開	柴 田 碧
	地中構造物の耐震設計法としての変位法に関して	田 村 重 四 郎
	地震動をうける高力ボルト接合部の挙動	{ 高 梨 晃 一 字 田 川 邦 明 田 中 尚
	移動境界を持つ弾性平板の有限要素の解析	{ 半 谷 裕 彦 国 田 二 郎
	2方向繰返し曲げ・せん断力と定軸力を受ける鉄筋コンクリート柱の復元力	{ 岡 田 恒 男 関 井 松 太 郎 浅 井 敏 司
	付加構造物系の最悪地震応答特性 - 床応答増幅係数による解析 -	鈴 木 浩 平
	A Discrete Analysis on Dynamic Collapse of a Beam under Impulsive Transverse Load	{ 川 井 忠 彦 都 井 裕