

円筒殻内の弾性波伝播解析の一考察

A Note on the Numerical Analysis of Elastic Wave Propagation in Cylindrical Shell

鈴木敬子*・中桐 滋*

Keiko SUZUKI and Shigeru NAKAGIRI

1. ま え が き

本報では、円筒殻内の軸対称、弾性波伝播の有限要素法による解析について述べる。爆発などの衝撃的な負荷を受ける殻体の過渡応答は、差分法¹⁾、有限要素法^{2,3)}などにより弾塑性大変形領域に至るまでの解析が数多くなされている。一方全体的な過渡応答とは別に、衝撃吸収部材として用いられるような薄肉円筒殻内の応力波の伝播解析⁴⁾はあまり多くない。運動方程式の時間積分のアルゴリズムと時間増分については既に多くの報告がある。この小論において採用したNewmark β 法は、 $\beta < 1/4$ の場合にも時間増分の安定限界を容易に定めることができる。この安定限界と実際に安定な解が得られる時間増分の値について、本論では計算例を示して検討する。

また、運動方程式を表すのに用いられる剛性マトリックスと質量マトリックスの基礎となる変位関数の吟味についても最初にふれることにする。そして、縦衝撃を受ける円筒殻について、衝撃速度と円筒殻内に発生する応力との関係を導き、中実棒において成立する関係と比較する。

2. 円筒殻の変位関数についての検討

円筒殻軸対称問題の解析には、図1のように変位 δ = $\{u_1, w_1, \theta_1, u_2, w_2, \theta_2\}$ として軸方向変位 u とたわみ w を次の変位関数で表すことはよく行われている。

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1-x' & 0 & 0 & x' \\ 0 & 1-3x'^2+2x'^3 & lx'(1-x')^2 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで l は要素の長さ、 $x' = x/l$ は軸方向無次元化座標を表す。 w に関するこの三次多項式表示は、はりの

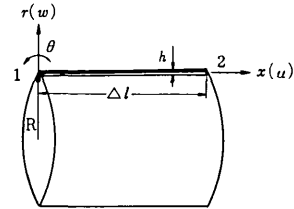


図1 要素の座標系

基礎方程式 $EI \cdot d^4 w / dx^4 = q$ (EI 曲げ剛性, q : 分布荷重) を満たすが、薄肉円筒軸対称問題の基礎方程式⁵⁾

$d^4 w / dx^4 + 4\beta^4 w = 0$, $\beta^4 = 3(1-\nu^2) / R^2 h^2$ (2) を満足させない。ここで R は半径, h は肉厚, ν はポアソン比とする。従って(1)式とは別に(2)式の補解

$$w = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad (3)$$

によりたわみの変位関数を定めることも可能である。変位関数の良否は、剛性変位モードに対する追従性によっても判定され、これは数値的には剛性マトリックスの最小固有値によって比較できる。弾性円筒殻の合応力、合モーメント $N_x, N_\varphi, M_x, M_\varphi$ 、とひずみの関係を

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\varphi \\ M_x \\ M_\varphi \end{Bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & \frac{h^2}{12} & \nu \frac{h^2}{12} \\ SYM. & & & \frac{h^2}{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ -w/R \\ -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / R^2 \partial \varphi^2 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

と表し、 $R = 50.0 \text{ mm}$, $h = 1.0 \text{ mm}$, $\Delta l = 10.0 \text{ mm}$, $E = 21000 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.3$ である円筒殻要素の剛性マトリックスの固有値の最大値と最小値について(1)式と(3)式により求めた結果を表1に示す。 λ_{max} には両者にほとんど差はないが、(3)式の λ_{min} は非常に小さく、(1)式のそれより剛体変位モードをよく表わし得ることを示している。

表2には有限要素解と解析解との比較を示す。一端に軸力を与えたときの中央部でのたわみ w を比較したもので、軸力 $N_0 = 1 \text{ kg/cm}^2$, $E = 21000 \text{ kg/cm}^2$, $h = 1.0 \text{ mm}$, 要素長 $\Delta l = 10 \text{ mm}$, 要素数5で計算した。軸力を受ける場

* 東京大学生産技術研究所 第1部

表1 剛性マトリックスの固有値の比較

	λ_{min}	λ_{max}
(1) 式	$0.6579572 \times 10^{-10}$	0.1455446×10^7
(3) 式	$0.1075241 \times 10^{-10}$	0.1454712×10^7

表2 解析解と有限要素解の比較

	中央部のたわみ w
解析解	$w_{\infty} = 0.7142857 \times 10^{-3}$
(1) 式	$w_{50} = 0.7139358 \times 10^{-3}$
(3) 式	$w_{50} = 0.7136414 \times 10^{-3}$

合の静的変形は、(1)式による場合も、(3)式による場合もいずれも解析解とよく一致していることがわかる。

つぎに一端にせん断力とモーメントを加えたときの同様の比較を図2に示す。要素長を $dl = 5 \text{ mm}$ 、要素数12とし、自由端 $x = 0$ で $Q = 1 \text{ kg/mm}$ 、 $M = 1 \text{ kg}$ を加えた場合の軸方向に沿うたわみとモーメントを比較してある。たわみはいずれも解析解と比較的一致しているが、内力モーメントの有限要素解は解析解とあまり一致していない。しかし弾性範囲内では、しかも軸方向の衝撃問題には、これらの変位関数は充分有効であると考えられる。計算処理のうえで(1)式の変位関数の方が容易であるので、以後全てこれを用いることにする。

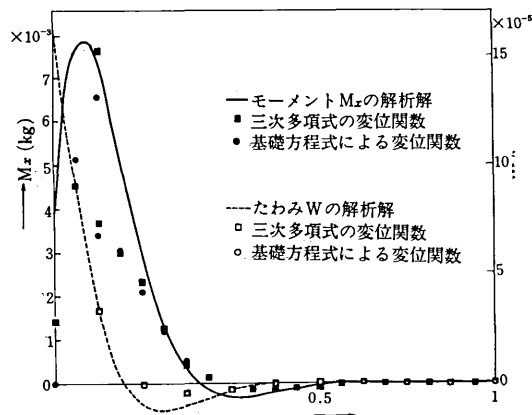


図2 二種の変位関数による解の比較
($Q = 1 \text{ kg/mm}$, $M = 1 \text{ kg}$)

3. 時間増分と安定性

せん断変形と回転慣性を考慮しない場合、軸対称円筒殻に生ずる縦波と曲げ波の伝播速度は、上記二つの影響を補正しないはりの曲げ波と同様に波長の関数であり、これは伝播波に分散が生ずることを意味する。⁶⁾ マトリックス表示された運動方程式を直接時間積分して波動伝播を追跡するときには、更に離散化による分散と時間積分

のアルゴリズムによる誤差を伴う。そのアルゴリズムとして本報では、Newmark β 法を用いる。ただし減衰項は省略してあり、回転慣性項を省略した分布質量マトリックスを採用し、時間増分 Δt の安定限界として、

$$\Delta t \leq 2 / (\omega_{max} \sqrt{1-4\beta}) = T_{min} / (\pi \sqrt{1-4\beta})^{7) 8)} \quad (6)$$

を用いる。ここで ω_{max} は要素の最大固有円振動数、 T_{min} は要素の最小固有周期を表わす。

今、質量密度 $\rho = 0.803 \times 10^{-9} \text{ kg sec}^2/\text{mm}^4$ として図2に示した例の要素について求めた固有円振動数を表3に示す。本表に示す六つの固有値 ω_i に対応する固有ベクトルには三つの振動モードと三つの剛体変位モードが含まれている。また、右欄には $\beta = 1/6$ として、 $\Delta t = 2 / (\omega_i \sqrt{1-4\beta})$ より求められる時間増分 Δt を示す。これによれば、時間積分の安定限界の Δt は $0.611 \mu \text{ sec}$. ということになるが、軸方向固有振動モードに対しては、 $\Delta t = 0.901 \mu \text{ sec}$. となっている。

表3 要素の固有円振動数 ω と振動モード

i	ω_i	振動モード 剛性モード	$\Delta t_i = \sqrt{2}/\omega_i$
1	5.67×10^6		$0.611 \mu \text{ s}$
2	3.85×10^6		$0.901 \mu \text{ s}$
3	1.66×10^6		$2.087 \mu \text{ s}$
4	1.07×10^5		
5	1.02×10^5		
6	2.56×10^{-2}		

4. 数値計算結果

筒内円筒殻の一端に V なる一定速度の縦衝撃が加わる場合を考える。この円筒を鋼管とし、図2の例の要素50個に均等に分割してある。与えた境界条件は、 $x = 0$ で $\dot{u} = V = 2 \text{ m/sec}$ 、 $w = 0$ 、 $x = l$ で $\partial w / \partial x = 0$ 、 $u = 0$ とし、安定限界内の $\Delta t = 0.6 \mu \text{ sec}$. とした場合と、安定限界を越えた $\Delta t = 0.9 \mu \text{ sec}$. とした場合の \dot{u} の伝播の様子を見る。図3に示すように、 $\Delta t = 0.9 \mu \text{ sec}$ の場合も解は安定に得られるが、 $\Delta t = 0.95 \mu \text{ sec}$ として計算した場合には解は収束せず発散した。 $\Delta t = 0.9 \mu \text{ sec}$ としたときのたわみ w と軸方向ひずみ ϵ_x の伝播の様子を図4に示す。本図は時間増分の値を安定限界より大きくしても、Newmark ($\beta = 1/6$) 法による時間積分が安定に行れる例を示している。軸方向ひずみ ϵ_x やたわみ w の計算結果に及ぼす Δt の値の影響を見るため、図5と図6に両者を比較する。たわみ w につ

いては時間増分の値にあまり関係なくはほぼ一致している。一方、軸方向ひずみ ϵ_x については両者に差があり、時間増分 $\Delta t = 0.6 \mu\text{sec.}$ とすると波頭に負値への行過ぎという乱れが見られ、 $\Delta t = 0.9 \mu\text{sec.}$ の方がむしろ妥当な結果を与えている。図4に示す縦衝撃速度 V と発生する軸方向ひずみの関係を検討した結果、つぎの正比例関係が成り立つことが判明した。

$$\epsilon_x = 0.185 \times 10^{-6} V \quad (7)$$

つぎに円筒殻の一端 $x = 0$ に $\dot{w} = V = 2 \text{ m/sec}$ の一定速度の横方向（外向き）衝撃を加えた場合を考える。このときの時間増分 Δt も $0.9 \mu\text{sec.}$ と安定限界より大きくとったが、解は収束している。図7にはこの場合のたわみ w と軸方向ひずみ ϵ_x の伝播の様子を示す。静的負荷の場合と同様に変形領域が衝撃端近傍に局限されていて、円筒殻内部にまで進行しないことが明らかである。

第三の計算例としては、水撃作用のように円筒殻の一端から順次に内圧が加わっていく場合である。鋼の音速は約 5200 m/sec で、内圧の進行速度を水の音速と等しく約 1600 m/sec とした。内圧負荷をうける領域の進展速度と変形の伝播速度の関係を勘案して、 $\Delta t = 0.78$

$\mu\text{sec.}$ として計算を行った。安定限界を越えたこの値を用いても、やはり解は収束した。図8には時間の経過に伴ってたわみ w が規則振動的に内部に進行していくことが示されている。

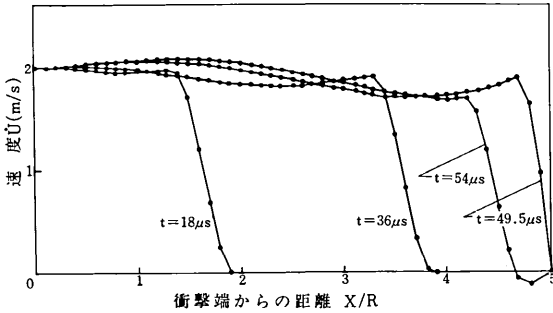


図3 縦衝撃の速度 \dot{U} の伝播 ($\Delta t = 0.9 \mu\text{s}$)

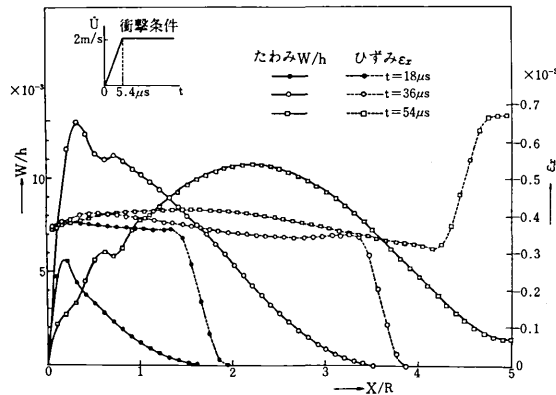


図4 自由端に縦衝撃を加えた場合のたわみと軸方向ひずみの進行

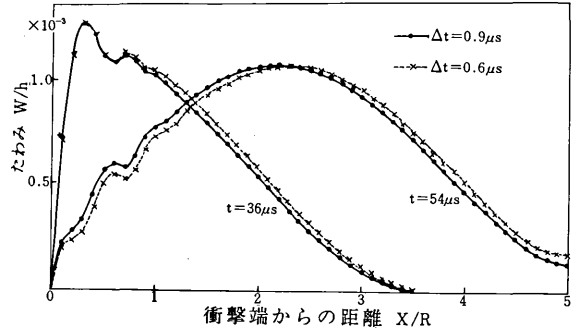


図5 時間増分 Δt をかえたときのたわみ w の伝播の比較

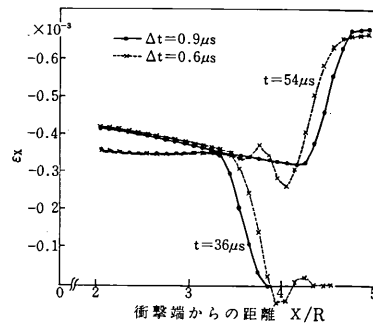


図6 時間増分 Δt をかえたときの軸方向ひずみ ϵ_x の伝播の比較

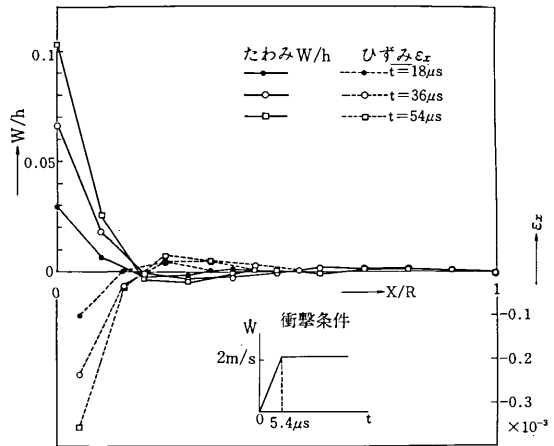


図7 自由端に横衝撃を加えた場合のたわみと軸方向ひずみの進行

研 究 速 報

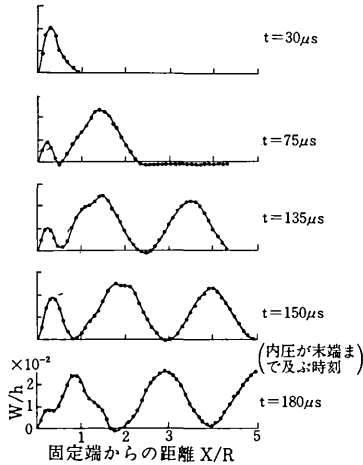


図8 内圧上昇が順次伝わっていく時のたわみ w の伝播

5. 考 察 と 結 論

本報で用いた変位関数では、板厚方向のせん断変形をとり入れることが不可能であり、図2に示すように内力分布についてはかなりの誤差があるので、応力値自体が問題となる材料非線形問題への応用には問題は残るが、弾性範囲内のしかも縦衝撃問題への応用は可能と考えられる。

縦衝撃の場合には、与えた衝撃速度 V と円筒殻内に伝播していく軸方向ひずみ ϵ_x との関係は(7)式で与えられるので、 ϵ_x を弾性応力 σ に変換すると、

$$\sigma = 0.9024 \rho c V \tag{8}$$

という関係が得られる。これは、中実棒の一次元衝撃における $\sigma = \rho c V$ なる関係に対応するものである。円筒

殻の場合は、たわみ変形により歪エネルギーが吸収されるので、発生する軸方向応力は $\rho c V$ より小さくなっている。

時間増分 Δt の値と解の安定性については、表3に示したように、振動モードとの関係から説明することができる。最初に示した解析例の縦衝撃を受ける場合及び第三の計算例の水撃的な負荷が作用する場合は、表3に示す1の振動モードがほとんど存在していない。従って、1の振動モードの固有振動数 ω から求められる $0.611 \mu \text{ sec.}$ よりも大きな Δt をとって解は収束したものと考えられる。第二の横衝撃を受ける場合では、振動モード1が存在しているはずであるが、図6に示されるように、波の進行が円筒内部にまで及ばないので、誤差が現れにくかったものと思われる。上述のように、Newmark β 法において(6)式に示す時間増分の安定限界よりも大きい Δt を用いても、振動モードに応じて必ずしも解が発散しない例のあることを示した。

(1977年1月25日受理)

参 考 文 献

- 1) Witmer, A. et al : AIAA J. 1. 8 (1963), 1848
- 2) Stricklin, J. A. et al : AIAA J. 9. 4 (1971), 629
- 3) Belyschko, T. et al : I. J. NME, 7. 3 (1973), 255
- 4) Berkowitz, H. M. : J. Appl. Mech. 30. (1963), 347
- 5) Timoshenko, S. et al : Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1959
- 6) Graff : Wave Motion in Elastic Solids, Ohio State Univ., 1975
- 7) Newmark, N. M. : Trans, ASCE 127.(1962), 1406
- 8) 中桐 滋 : 生産研究 28. 4 (1976), 199

正 誤 表 (3月号)

頁	段	行	種 別	正	誤
140	左	↓ 10	本 文	高 出 力	高 出 力
"	右	↓ 5	"	Lambert-Beer	Lombert-beer
142	右	↓ 9	"	ソ フ ト ウ ェ ア	リ フ ト ウ ェ ア
144	右	↑ 2	"	削 除	で指導いただいた村井助教授…及び
161		↓ 8	表 - 1	東 跨 線 橋	記 載 な し
162	右	↓ 2	表 - 2	j	J
"	"	"	"	k	K