

波動エネルギーの地下逸散を考慮した 地盤振動の一解析方法

A Numerical Method for Analysis of Vibration of the Ground
of Finite Area taking Account of Energy Dissipation

田村 重四郎*・中村 豊*

Choshiro TAMURA and Yutaka NAKAMURA

1. まえがき

自動車走行による地盤の振動、地下鉄走行による地下構築及び地盤の振動など、地盤のみの系または地盤と構造物が連成する系の動力学的問題を取り扱う場合、地中へ逸散する波動エネルギーを考慮する必要がある。しかしながら、数値解析では一般に有限な領域をもつモデルが解析対象となっているため、解析結果に境界の影響があらわれる。Lysmerら¹⁾はこの境界からの波動の反射をなくすように特別な境界条件の設定を行い、清水ら²⁾は距離減衰を利用して、波動エネルギーを吸収させる方法を示している。しかし、Lysmerの方法では、吸収される波動の形態が限定されており、また清水らの方法は定常状態に対するもので、これらの方法は構造物を含む複雑な地盤での波動の伝播状況を検討する場合には適当ではない。

一つの衝撃が系に入力された場合、入力波が解析モデルの境界で反射され、応答をみるために着目している点に到達するまでの間は、この着目点は境界の有無に関係なく応答する。著者らはこの事実を利用して無限の拡がりをもつモデル内部の振動応答を算定する方法を見出した。この方法は二つの部分から成り立っている。第1は、単一の三角形パルスに対する応答(以下SHOCK応答という)を求め、入力波形をこの三角形パルスに分割してそれぞれに対する系の応答を重ね合わせることにより入力波形に対する系の応答を算定するものであり、第2は、境界条件を工夫することによって計算の対象となるモデルの縮小を図るものである。以下これについて説明する。

2. 計算方法

2-1 SHOCK応答 まず、離散化された系の運動方程式を、各次モードに対応する1自由度系の方程式に変換する。

三角形のパルス入力に対する各1自由度系の応答は、N. C. Nigam³⁾らの方法を用いれば、丸め誤差だけを含む正確解が得られ、時間刻み Δt のとり方によって解が発散する現象はみられない。これを重ね合わせて系のSHOCK応答を求めると、任意形状の入力に対するモデルの応答は、次式によって示すことができる。

$$C(j\Delta t) = \sum_{i=0}^j A(i\Delta t) B((j-i)\Delta t) \quad (1)$$

ここに、 $C(k\Delta t)$ は入力に対する応答、 $A(k\Delta t)$ は入力波形、 $B(k\Delta t)$ はSHOCK応答波形である。このSHOCK応答の重ね合わせを当該地点に反射波が到達するまで行えば、これは境界がない場合の応答と同じである。応答波形を求めることのできる時間はモデルの領域の広さによって限定される。計算上の視点からは、対象とするモデルの領域は狭いほど有利であり、これは第1反射波を消すことによってある程度達成することができる。次にこのための境界条件を検討する。

2-2 境界条件の検討 二次元半無限弾性体の表面に直応力 $\sigma = a\rho V_p \dot{w}$ 、せん断応力 $\tau = b\rho V_s \dot{u}$ が作用する場合を考える。ここに a, b は無次元のパラメータ、 ρ は密度、 V_p, V_s はそれぞれP波速度、S波速度、 \dot{w}, \dot{u} はそれぞれ境界面直交方向及び境界面に平行な方向の粒子速度である。この境界に図1に示すように、平面P波が入射すると境界によってP波とS波(SV波)が反射される。入射P波の振巾を1、反射P波の振巾をA、反射S波の振巾をBとすると、A, Bは次の連立方程式の解として得られる。

$$\begin{aligned} (-\cos 2\nu + a \sin \theta)A + (\sin 2\nu + a \sin \theta)B \\ = \cos 2\nu + a \sin \theta \\ (b \cos \nu + s^2 \sin \theta)A + (\cos 2\nu - b \sin \nu)B \\ = s^2 \sin 2\theta - b \cos \nu \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{ただし、} s^2 = \frac{V_s^2}{V_p^2} = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}, \quad \cos \nu = s \cos \theta,$$

μ はポアソン比

同様に振巾1のS波が境界に入射した場合の反射P波の振巾C、反射S波の振巾Dは次の連立方程式の解として得られる。

$$\begin{aligned} (s^2 \sin 2\theta + b \cos \nu)C + (\cos 2\nu - b \sin \nu)D \\ = -\cos 2\nu - b \sin \nu \\ (-\cos 2\nu + a \sin \theta)C + (\sin 2\nu + a \cos \theta)D \\ = \sin 2\nu - a \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $\nu < \nu_{cr}$ ($\cos \nu_{cr} = s$) の場合、 $\cos \theta = \frac{\cos \nu}{s} > 1$ 、 $\sin \theta = -i\sqrt{\cos^2 \theta - 1}$ (虚数) とする。

次に表面に沿う変位(X方向変位)を自由とし、これ

* 東京大学生産技術研究所 第1部

研究速報

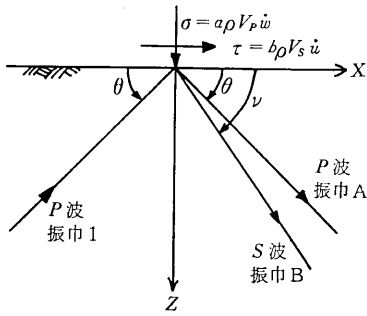


図 1

と直交する方向の変位 (Z方向変位) を拘束した境界条件を(I)とし, X方向の変位を拘束して, Z方向の変位を自由とした境界条件を(II)とすると, (I)は式(2), (3)において $a \rightarrow \infty, b \rightarrow 0$ とした場合, (II)は $a \rightarrow 0, b \rightarrow \infty$ とした場合にそれぞれ対応する. (I), (II)の場合をそれぞれ suffix 1.2 で表わすと式(2), (3)より $A_1 = 1, B_1 = 0, C_1 = 0, D_1 = -1, A_2 = -1, B_2 = 0, C_2 = 0, D_2 = 1$ が得られる. このことは(I), (II)の境界での反射波が入射波と同じ種類の波だけであり, また, (I)と(II)とは反射波の位相が逆になることをあらわしている. 従って, (I)の境界条件をもつモデルの反射波と(II)の境界条件をもつモデルの反射波とを加え合わせると反射波は互いに打ち消し合い消去される.

このようにして, 見かけ上の領域を拡大し, 境界のないモデルとしての応答を計算し得る時間を増大することができる. このことは計算対象モデルの領域を狭くとり得ることを意味する.

そこで, (I)または(II)の境界条件をもつ二つの振動系を一对のものと考え, この二つを合わせた系を原系の変換系と以下呼ぶことにする.

2-3 距離減衰効果の組み込み 一般に幾何減衰以外の距離による減衰の効果は $\exp(-\alpha r)$ で表わされる. ここに r は振動源からの距離であり, α は距離減衰係数で $[L^{-1}]$ の次元をもつ. 本方法では波動を固有モードの合成として取り扱っているから距離減衰係数 α と減衰定数 h の関係が求まれば, α の効果を計算に組み入れることができる.

対数減衰率 δ は $\delta = 2\pi h / \sqrt{1-h^2}$ であり, また距離減衰 α による 1 波長進む間の減衰率は $e^{\alpha\lambda}$ (λ : 波長) であるから,

$$\alpha = \frac{2\pi h}{\lambda\sqrt{1-h^2}} \text{ または } h = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2\pi^2}{\alpha\lambda}}} \quad (4)$$

が得られる.

3. 解析例

計算例として二次元の無限弾性体中の円孔の内面に一様に圧縮応力が加わった場合の変位応答を取り扱うことにする.

3-1 解析モデル 本計算では中心角 20° の扇形部分の内面は自由境界面とし, 外面は前述のように, 境界条件(I)または(II)の面を採用した. 円孔の半径 $a = 3m$, 弾性

体のP波速度 $V_p = 100 \text{ m/s}$, ポアソン比 $\mu = 0.25$, 密度 $\rho = 1.0 \text{ g/cm}^3$ の場合を平面歪で数値解析する.

解析にあたっては, 有限要素法を使用した. 要素の定式化は, 要素境界での応力分布を仮定するハイブリッド法により行い, 1要素8自由度の四辺形要素を用いた. また質量マトリクスは, 波動伝播の問題に対して有効とされており, しかも簡略な集中質量マトリクスを採用した. モデルの節点は半径方向のみに自由度をもつスライド節点で構成する. 要素分割図を図2に示す.

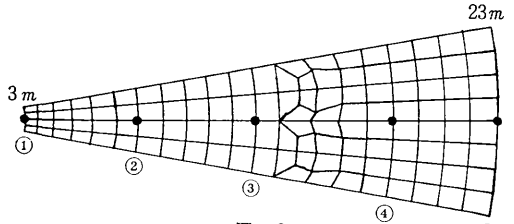


図 2

3-2 要素寸法と解析波長の関係 2-1で述べたように SHOCK 応答を固有モードの合成として解析する関係上, 十分正確な固有値及び固有ベクトルを計算する必要がある.

ℓ を要素最大寸法, λ を波長とすると, 節点が一樣に離散している場合, この節点で表現し得る波長 λ は, 2ℓ 以上であり, 上原の提案する固有値解析の精度と要素寸法を結びつけるパラメーター $\phi (=2\pi \cdot \dots)$ が $\phi \leq \pi$ となる波長までである. 節点間隔が一樣でない場合は

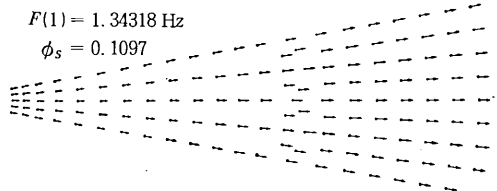


図3 (a) 境界条件IIの系の固有モード1次

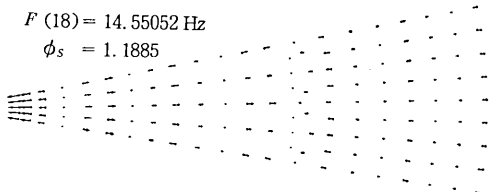


図3 (b) 境界条件IIの系の固有モード18次

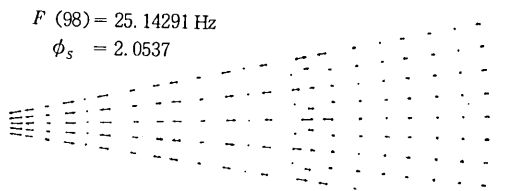


図3 (c) 境界条件IIの系の固有モード(98次)

これより小さい ϕ 値をとる波長までしか表現できないと考えられ、上原によれば、梁の場合一般に精度よく固有値、固有ベクトルを算出できるのは $\phi \leq 1$ に対する波長までである。

固有振動数と固有モードの例を ϕ 値とともに図3に示す。要素寸法 l としては、波動進行方向に最大の要素寸法をとっている。

3-3 SHOCK 応答波形 図4に示す三角形パルスにおいて $\Delta t = 5/1000$ 秒、 $\sigma_0 = 3.821 \times 10^{-4}$ kg/cm²とした場合の加振点の応答変位を図5に示す。これは境界条件(I)に対する計算結果で、 ϕ 値は重ね合わせモードのうち最高次の波長をとって算定したものである。 $\phi = 4.84$ までのモードを用いた変位波形には短周期の振動成分が卓越してあらわれていて、3-2で述べたようにモード計算の誤差が顕著にあらわれたものとみられる。 $\phi \leq 2.6035$ の範囲で計算した波形は、前者に比して著しく平滑化し、 ϕ の値の減少に従ってこの傾向が進行する。この結果にもとづいてここでは、SHOCK 応答は境界条件(I)で $\phi_I = 2.22$ 、境界条件(II)で $\phi_{II} = 2.08$ までのモード(いずれも100次まで)をとって計算することにした。

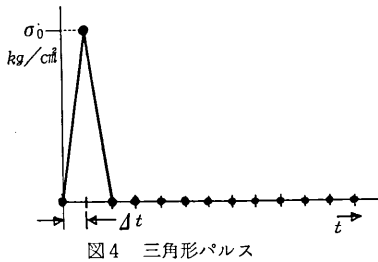


図4 三角形パルス

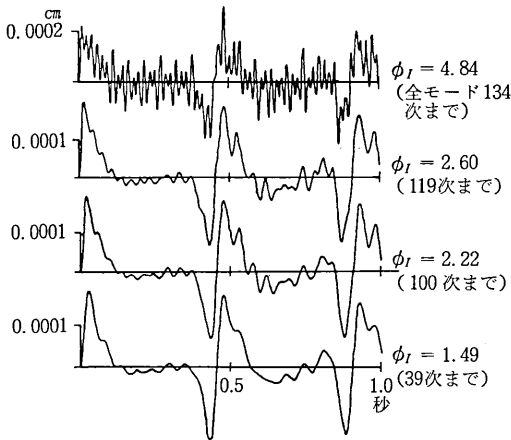


図5 加振点①境界条件(I)SHOCK 応答波形

図2に示す節点①、②、③、④、⑤について、変換系のSHOCK 応答波形(変位)を図6に示す。図6の①の一点鎖線は入力波形である。図5と図6とを比較すると、解析した実境界からの第1回反射が変換系に対する波形では消滅していることがわかる。このSHOCK 応答波形を式(1)に従って重ね合わせ、8.33 Hzの正弦波半波に対する応答を求めたものが図7である。図7の①の一点鎖

線は入力波形である。

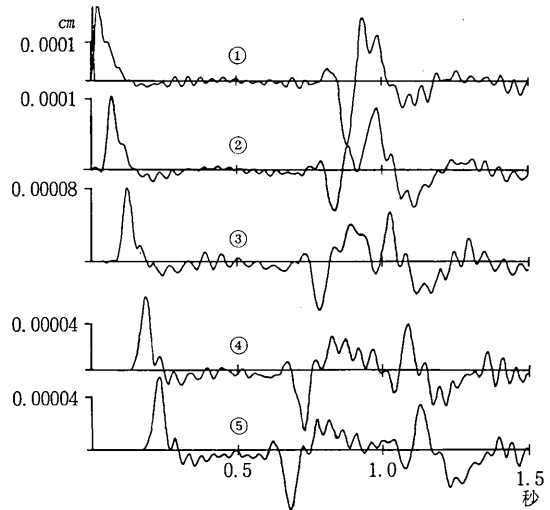


図6 SYSTEM (I) $\phi_I = 2.22$, SYSTEM (II) $\phi_{II} = 2.08$

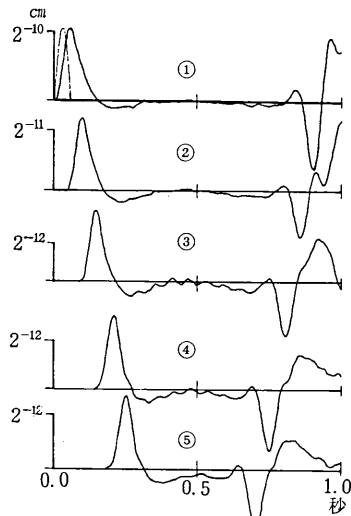


図7

図6、図7の変位波形から波動の走時曲線を描くと図8のようになる。図8で三角印は波形の立ち上がりから読みとったもので、丸印は波形のピークから読みとったものである。また白ぬきは正弦波半波入力、黒ぬきは三角形パルス入力に対するものである。応答波形の立ち上がりは重ね合わせたモードの最高次数と入力波形の立ち上がりに依存する。モードの最高次数は前述のように定められているため、立ち上がりがするどいほど誤差が大きく、図8もそのことを示している。ピークの伝播から読みとった値は、三角波の場合95.9%、正弦波の場合101.5%となり、理論値100%とほぼ一致している。

また、これらの応答波形の最大値を半径 r に対してプロットすると、図9のようになる。図9をみると三角波入力の応答変位は波動エネルギーの拡散から考えた幾何

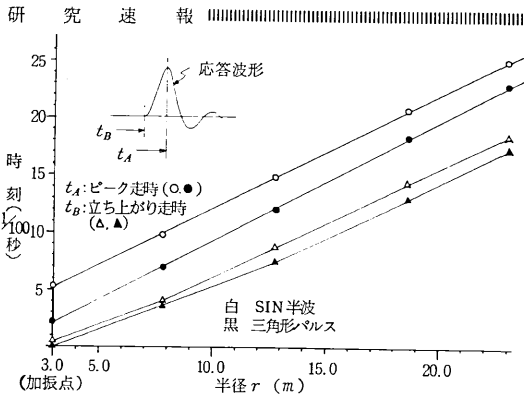


図 8

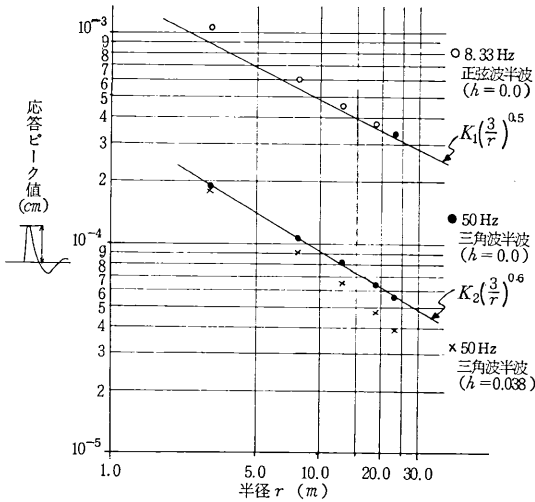


図 9

減衰 $r^{-0.5}$ より大きな減衰 $r^{-0.6}$ を示している。また正弦波を入力した場合は半径 r の増大とともに $r^{-0.5}$ の減衰に漸近していくように見える。

3-4 正弦波応答 次に、SHOCK 応答を重ね合わせて定常正弦波入力に対する応答を求め、この応答値と理論解を比較した。図10は振動数 8.33 Hz ($\phi = 0.681$) で振幅 $\sigma_0 = 3.821 \times 10^{-4} \text{ kg/cm}^2$ の正弦波を入力した場合の入力波形と、加振点から 15.6 m 離れた節点④の応答波形である。図10より、応答波形はすぐ定常状態になることがわかる。そこで反射波が到達する前のほぼ定常状態の変位全振幅と位相差を読みとって、図11に○印で示す。実線は理論解を示している。 $f = 8.33 \text{ Hz}$ に対する理論解と本計算方法で求めた解とはよく一致している。

また図11には $f = 16.67 \text{ Hz}$ ($\phi = 1.362$) に対する解が●印で示されていて、理論解とはほぼ一致しているのがわかる。

3-5 距離減衰 次に減衰の効果を考慮した計算例を示す。入力正弦波の振動数が 8.33 Hz で距離減衰係数 $\alpha = 0.02$ となるような h として(4)式より 0.038 が得られる。この h を用いて SHOCK 応答を求め、そのピーク値を図9に×印で示す。また、この SHOCK 応答を重ね合わせて 8.33 Hz の正弦波入力に対する応答を求め、その全振幅及び位相を図11に×印で示す。図11(イ)に示された破線

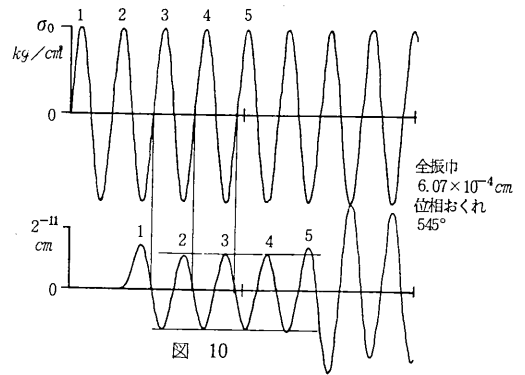


図 10

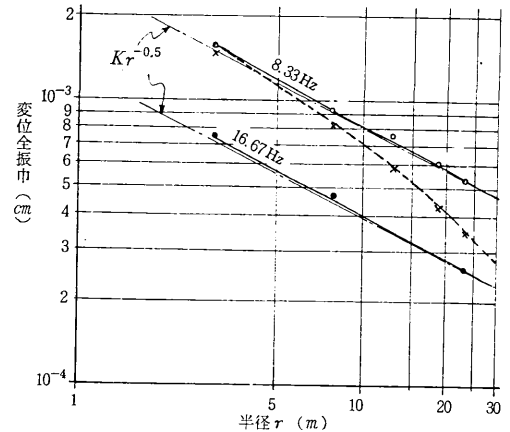


図11 (イ)

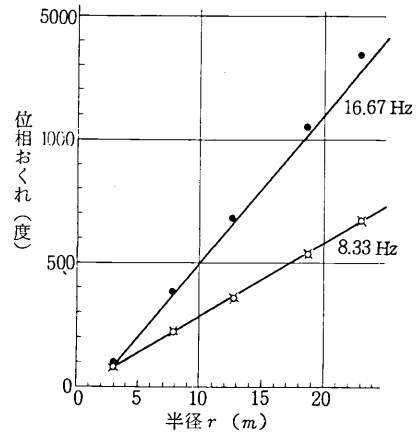


図 11 (ロ)

は $\alpha = 0.02$ に対する理論解で本方法による解と理論解とはよい一致を示している。なお、減衰のある場合の SHOCK 応答波形の高周波成分は無減衰の場合に比べると少ない。

4. むすび

以上のように距離減衰を考慮し、所定の精度を得るに必要な領域の広さをとることによって、本方法を実際問題に適用することができる。筆者らは現在、本方法を適用して、地下鉄構築及び周辺地盤の振動の解析を行っている。—参考文献は20ページに掲載— (1976年6月5日受理)

るときに用いた a/ρ の値は文献²⁸⁾による。Kurosawa の計算値は実験値より1桁近く大きい、これは当時の電子計算機の性能が今日ほど進んでいなかったために、十分に精度を上げることができなかったことによる。しかし、Kurosawa の計算方法は、パイエルス力が小さい場合には最も妥当なものである。

筆者ら¹³⁾は $a/\rho = 10.0$ の場合について、Kurosawa と同様の方法で十分精度のよい計算を行った。そのとき転位芯に含まれるイオン列の数は200本にまで拡張し、それらの位置は 10^{-5} の精度で決定された。計算の結果はつぎのようになる。(1) 刃状転位の二つの対称なイオン構造のうちで、Kurosawa がパイエルス力を計算した方の配列は、実は不安定平衡である。(2) 安定配列の方では $\tau_p/\mu \approx 1.5 \times 10^{-3}$ となる。この値は NaCl の実験値の約3倍で KCl の実験値に近い。

6. おわりに

イオン結晶の低温塑性とパイエルス力について系統的に行ってきた研究の結果をまとめると以下の通りである。

- (1) イオン結晶の低温塑性はパイエルス機構によって理解することができて、降伏応力から推定したパイエルス力は $1 \sim 3 \text{ kg/mm}^2$ である。これは f.c.c. 金属よりかなり大きく、b.c.c. 金属より約1桁小さい。
- (2) LiF においては、転位速度の測定によって、刃状転位のパイエルス力が転位の運動、したがって塑性変形を支配していることが示された。また、熱活性化過程の頻度因子の問題も含めてパイエルス機構の理論に詳細な検討が加えられた。
- (3) 電子計算機によるパイエルス力の計算を Kurosawa の方法に従い、かつ十分に拡張した規模で行った結果、実験値と比較し得る値を得た。

本研究は、昭和49年度の本所選定研究費による。

(1951年6月10日受理)

文 献

- 1) R. Peierls: Proc. Phys. Soc., **52** (1940) 23.
- 2) F. R. N. Nabarro: Proc. Phys. Soc., **59** (1947) 256.
- 3) 鈴木秀次: 転位論入門 (アグネ, 1967) p. 233.
- 4) R. Labusch: Phys. Status solidi, **10** (1965) 645.
- 5) H. Teichler: Phys. Status solidi, **23** (1967) 341.
- 6) 竹内伸: 金属学会会報, **7** (1968) 14.
- 7) J. W. Christian: *2nd Intern. Conf. Strength of Metals and Alloys* (American Soc. Metals, 1970) p. 31.
- 8) P. Guyot and J. E. Dorn: Canad. J. Phys., **45** (1967) 983.
- 9) T. Suzuki and H. Kim: J. Phys. Soc. Japan, **39** (1975) 1566.
- 10) T. Suzuki and H. Kim: J. Phys. Soc. Japan, **40** (1976) 1703.

- 11) 鈴木敬愛, 金鉉奎: 日本物理学会講演(1975年秋の分科会予稿集No. 2, p. 155) 生産研究 **28** (1976) 222.
- 12) 鈴木敬愛, 中村和夫: 日本物理学会講演(1975年年会予稿集No. 2, p. 70) 生産研究 **27** (1975) 515.
- 13) 鈴木敬愛, 金鉉奎: 日本物理学会講演(1976年年会予稿集No. 2, p. 236.)
- 14) A. Seeger: Phil. Mag., **1** (1956) 651.
- 15) A. Seeger, H. Dorn and F. Pfaff: Disc. Faraday Soc., **23** (1957) 19.
- 16) J. Lothe and J. P. Hirth: Phys. Rev., **115** (1959) 543.
- 17) A. Seeger and P. Schiller: Acta Metallurgica, **10** (1962) 348.
- 18) V. Celli, M. Kabler, T. Ninomiya and R. Thomson: Phys. Rev., **131** (1963) 58.
- 19) J. E. Dorn and S. Rajnak: Trans. AIME, **230** (1964) 1052.
- 20) J. Friedel: *Dislocations* (Pergamon Press, London, 1964).
- 21) F. Minami, E. Kuramoto and S. Takeuchi: Phys. Status solidi, (a) **12** (1972) 581.
- 22) A. J. Foreman, M. A. Jaswan and J. K. Wood: Proc. Phys. Soc., **A64** (1951) 156.
- 23) H. B. Huntington, J. E. Dickey and R. Thomson: Phys. Rev. **100** (1955) 1117.
- 24) T. Kurosawa: J. Phys. Soc. Japan, **19** (1964) 2096.
- 25) H. Suzuki: *Dislocation Dynamics*, ed. A. R. Rosenfield, G. T. Hahn, A. L. Bement and R. I. Jaffe (McGraw-Hill, 1968) p. 679.
- 26) Z. S. Basinski, M. S. Duesbery and R. Taylor: Canad. J. Phys., **49** (1971) 2160.
- 27) F. Minami, E. Kuramoto and S. Takeuchi: Phys. Status solidi, (a) **22** (1974) 81.
- 28) C. Kittel: *Introduction to Solid State Physics*, 3rd ed. (John Wiley, 1966).

(46ページよりつづく)

参 考 文 献

- 1) John Lysmer, Roger L. Kuhlemeyer: FINITE DYNAMIC MODEL FOR INFINITE MEDIA, vol. 95 No. EM 4. ASCE. 1969. P.P. 859 - 877
- 2) 清水信行他4名: 簿層要素による地中に深く埋めこまれた原子炉建物の地震応答解析, Proceedings of the Fourth Japan Earthquake Engineering Symposium - 1975. P.P. 297 - 304
- 3) N. C. Nigam, P. C. Jennings: Calculation of Response Spectra from Strong - Motion Earthquake Records, Bull. Seism. Soc. Amer. vol. 59 No. 2 P.P. 909 - 922
- 4) 上原七司: 構造力学における振動解析に関する計算的研究, S. 50.4 学位請求論文