

ソリトン (SOLITON) の有限要素解析

—非線形波動方程式解析の新しいアプローチ—

Finite Element Analysis of Solitons

—A New Approach to Analysis of Nonlinear Wave Propagation Problems—

川井忠彦*・渡辺正明*

Tadahiko KAWAI and Masaaki WATANABE

浅水波 (shallow water wave) の問題に現れるKdV方程式が近年プラズマ中の電磁波、非線形格子 (戸田格子) の波動、弾性棒中を伝わる縦分散波、水と泡の混相流中の圧力波等の伝播をも支配することが次々に報告された。そしてその有力な解析法である逆散乱の方法 (inverse scattering method) が多くの科学者、技術者の注目を集めているが、著者らはこの問題の有限要素解析を試み、ある程度の成果を得たので報告する。

1. 緒言

近年種々の分散性媒質に対して孤立波 (solitary wave) と呼ばれる有限振幅の波動現象が存在することが次々に報告され、その独特な挙動が多くの分野の研究者の注目を集めている。

孤立波を支配する非線形波動方程式はKdV方程式と呼ばれ、その有力な解法の一つとして逆散乱の方法が最近脚光を浴びてきた。この様な解析的手法に対して、著者らはKdV方程式の有限要素法による数値解析を試み、ある程度の成果が得られたと考えるので報告する次第である。

2. ソリトン (Soliton) の由来

話は132年前の19世紀半ばに遡る。すなわち1844年英国のJ.Scott Russellは2頭の馬で運河を高速曳航中のボートを見ていた。その時、ボートが急に停止すると船首付近の水が盛り上がり、ボートを後に残してかなりの速度で一つの波が進んでゆくのを目撃した。そこで彼は馬に乗ってその波を追いかけたところ、2マイル離れた運河が急に広くなるところまで波の形がほとんど変らなかったという。そして彼はよほど感動したのか特異な美しい現象を目撃する幸運をもてたものだとも言った。

彼が目撃した波こそここで問題にしている孤立波 (solitary wave) であつたのである。この孤立波の存在の理論的裏付けができるまでにはさらに半世紀を必要とした。孤立波に関する理論は1895年オランダの数学者のKortewegおよびde Vries によって初めて提案され、その導かれた支配方程式は今日彼等の名にちなんでKdV方程式と呼ばれている。彼らは浅水中の有限振幅波を考えるにあたって、散逸性を無視し

(粘性を無視すること、この仮定は水波を考える場合普通に行われている) 分散性と非線形性とを適当にうまくバランスさせることによって、KdV方程式を導いた。そしてその定常解として、クノイダル波 (cnoidal wave) またその一つの極限として孤立波を求めた。

しかしながらKortewegとde Vriesの発表した孤立波の理論は半世紀の間不幸にして陽の目を見ることがなかった。それはある意味では特殊な条件下で導かれた式であるという理由によるものと思われる。

ところが、近年プラズマ波動、格子振動等においてもやはり特殊な仮定下においてKdV方程式に類似な波動方程式が存在し得ることが発見されるにつれ、俄然物理学者の注目を集めるようになり、その後KdV方程式を通じていくつかの画期的な発見が相次いでなされたのである。

そして、現在分散性媒質に対しては、このKdV方程式に類似な分散性非線形波動方程式が存在し得るということ、そしてKdV方程式はこの種の方程式中で最も簡単でまた最も基礎的なものであるということが定説となっている。

1960年、ニューヨーク大学のGardnerとMorikawaは冷いプラズマ (cold plasma) 中の磁気流体波 (hydromagnetic wave) に対してKdV方程式が存在することを導いた。

これを導く手法は、今日通減摂動法 (reductive perturbation method) と呼ばれ、線形理論における分散関係を非常に巧妙に用いる方法である。

また1965年にはZabuskyとKruskalによって、その当時目ざましく進歩してきた電子計算機を用いて数値実験が行われ、これによりKdV方程式が有する特性が明らかにされ、多くの人々に注目されるきっかけを作った。後に示すように孤立波の伝播速度はその振幅に比例しているので高い振幅の孤立波が低い振幅の孤

* 東京大学生産技術研究所 第2部

立波を追い込すという現象を考えることができる。

彼らの数値解によれば、衝突時には複雑な相互作用が見られるが、ある時間を経過すると二つの波は衝突前とまったく同一の状態に戻り、それぞれ別個に進行していくということが示された。つまり孤立波は粒子のようなふるまいを示し極めて安定であるということがわかり、ソリトン(soliton)と名付けられるようになったのである。

次いで、P.D.Laxによって、先の二つのソリトンの衝突という現象が解析的に解かれ、Zabuskyらの数値実験結果と一致すること、そして衝突によって位相が変化し、大振幅のソリトンは位相が進み、小振幅のソリトンは逆に位相が遅れるということが示された。

これらの論文がきっかけとなり、解析的にも多くの人々によって研究がなされ、KdV方程式には無限個の保存量が存在することが示され、またこれらの保存量と関連して最近提案された逆散乱の方法が非線形波動方程式の有力な解析法として脚光を浴びることとなった。

次節で、水波やプラズマ波動におけるKdV方程式を逐減摂動法によって導き、その後で有限要素法による解析法と数値計算例を示す。

3. 浅水波およびプラズマ波動問題におけるKdV方程式

まず Korteweg と de Vries が初めて KdV 方程式を導いた浅水波問題について理論の概要を紹介しよう。

3-1 浅水波問題

非圧縮、非回転性を仮定すれば、速度ポテンシャル ϕ が導入出来、二次元流れを支配する基礎方程式はよく知られている様に ϕ に関する Laplace の方程式となる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } V \quad \dots\dots\dots(1)$$

境界条件は自由表面に対して、この表面を通じて流体の流れはないということより、 $\eta(x, t)$ を波高として

$$\frac{D}{Dt} \{y - (\eta + h)\} = 0 \quad \text{at } y = \eta + h \quad \dots\dots\dots(2-a)$$

となる。ここに、 h は一定水深であり、 D/Dt は物質導関数であり次式で定義される。

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \quad \dots\dots\dots(2-b)$$

また、圧力は大気圧と連続であらねばならぬことより、ベルヌーイの式は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} + g\eta = 0$$

$$\text{at } y = \eta + h \quad \dots\dots\dots(3)$$

とかける。 g は重力加速度を示す。

そして、水底の条件もやはりこの面を通じての流れ

はないということより

$$\frac{D}{Dt} (y - h) = 0, \quad \text{at } y = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

となる。(2-a),(4)式は具体的には次のようになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{at } y = \eta + h \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

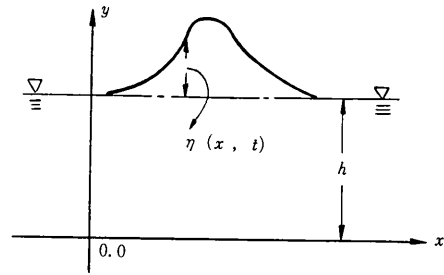


図1 座標系

さてここで、代表量、 $L_0 = h$ 、 $C_0 = \sqrt{gh}$ (微小振幅長波の伝播速度)を用いて、(1), (5), (3), (6)式を無次元化すれば、それぞれ次式で表わされる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } V \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{at } y = \eta + 1 \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} + \eta = 0 \quad \text{at } y = 1 + \eta \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

前節で触れておいたように逐減摂動法によって、上の(4)式より KdV 方程式を導く。

まず、静止解、 $\phi = \phi_0 = 0$ 、 $\eta = \eta_0 = 0$ は、確かに解である。この非摂動解に微小項、 $\delta\phi$ 、 $\delta\eta$ をそれぞれ加え、代入し、2次以上の項を無視して線形化すれば、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \delta\phi = 0 \quad \text{in } V$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \delta\phi = \frac{\partial}{\partial t} \delta\eta \quad \text{at } y = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\phi + \delta\eta = 0 \quad \text{at } y = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \delta\phi = 0 \quad \text{at } y = 0$$

となる。これらに、 $\delta\phi = \delta\phi_k(y) e^{ikx - \omega t}$ 、 $\delta\eta = \delta\eta_k e^{ikx - \omega t}$ を代入して、分散関係

$$\omega^2 = k \tanh k \quad \dots\dots\dots(11)$$

が得られる。ここに、 ω は円振動数、 k は波数である。通減摂動法においては、この線形理論の分散関係が基本となる。

さて、 $k \ll 1$ と仮定し、(11)式を展開すれば、

$$\omega \doteq k \left(1 - \frac{k^2}{6} \right)$$

となり、また

$$kx - \omega t = k(x - t) + \frac{k^3}{6} t$$

となることより、分散性を表わすパラメーター ε を導入し、次の独立変数の変換を行う。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varepsilon^{1/2}(x - t) \\ \tau &= \varepsilon^{3/2} t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

(7) - (10)式は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= 0 & in V \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\varepsilon^{1/2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \varepsilon^{3/2} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ at \ y = 1 + \eta, \quad -\varepsilon^{1/2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \varepsilon^{3/2} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \\ \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} + \eta &= 0 \quad at \ y = 1 + \eta \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 \quad at \ y = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

となる。さらに、 η, ϕ も ε に関して

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \varepsilon \eta^{(1)}(\xi, \tau) + \varepsilon^2 \eta^{(2)}(\xi, \tau) + \dots\dots \\ \phi &= \varepsilon^{1/2} \left\{ \phi^{(1)}(\xi, y, \tau) + \varepsilon \phi^{(2)}(\xi, y, \tau) + \dots\dots \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

のように展開できるものと仮定する。つまり、 ε は非線形性をも表わすパラメーターと考えるわけである。

この展開式を(13)式に代入し、 ε のべきについて整理すれば、 ε に関しては、

$$\phi^{(1)} = \phi^{(1)}(\xi, \tau), \quad \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} = \eta^{(1)} \dots\dots\dots (15)$$

が得られる。つまり、ポテンシャルの第一摂動項は y とは無関係であることがわかる。これは、長波の理論における、鉛直方向速度を無視し、また圧力は静水圧に等しいという基本的仮定に対応している。

さらに近似度を進めて、 ε^2 に関しては

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(2)} &= -\frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} + F(\xi, \tau), \quad -\eta^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial \xi} \\ + \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{6} \frac{\partial^4 \phi^{(1)}}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial \xi^3} \\ - \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} \right)^2 + \eta^{(2)} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

を得る。ここに $F(\xi, \tau)$ は任意関数である。

(15)式を用いて整理し、 $\eta^{(1)}$ の満足すべき微分方程式を求めれば、

$$\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \eta^{(1)} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

を得る。これが浅水波に対するKdV方程式である。もとの座標系に書き改めれば

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + C_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right) = 0 \dots\dots\dots (17)$$

となり、Korteweg と de Vries が導びいた式に一致する。

さて、(17)式の定常解、 $\eta = f(x - ct) = f(s)$ 型の解を求めることを考える。この時、(17)式は

$$\left(1 - \frac{C}{C_0} \right) \frac{d\eta}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{3}{4} \frac{\eta^2}{h} + \frac{h^2}{6} \frac{d^2 \eta}{ds^2} \right) = 0 \dots\dots (18)$$

となるので、容易に積分でき、

$$\eta = -h_2 + (h_1 + h_2) cn^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3(h_1 + h_3)}{h^3}} s; k \right] \dots\dots (19)$$

$$k = \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{h_1 + h_3}}$$

$$C = C_0 \left(1 + \frac{h_1 - h_2 - h_3}{2h} \right)$$

なる周期 $2K(k)$ の一般的な定常解を得る。ここに、 h_1, h_2, h_3 は積分定数、 $K(k)$ は第一種の完全楕円積分、 cn はヤコビの楕円関数である。(19)式の波形は cn 関数で表わされることより、クノイダル波 (cnoidal wave) と呼ばれており、正弦波 (sinusoidal wave) と異なり、波頂 (crest) と波谷 (trough) とが等しくなく、波頂のほうが大きい。

今、積分定数を $h_1 = H, h_2 = h_3 = 0$ と選べば、(19)式の周期を無限大にすることになり、ソリトンが次式のように求められる。

$$\eta = H \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3H}{h^3}} s \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$C = C_0 \left(1 + \frac{H}{2h} \right)$$

ここで注意しておきたいことは、伝播速度 C は長波のそれよりも大きく、ソリトンの振幅に比例していることである。

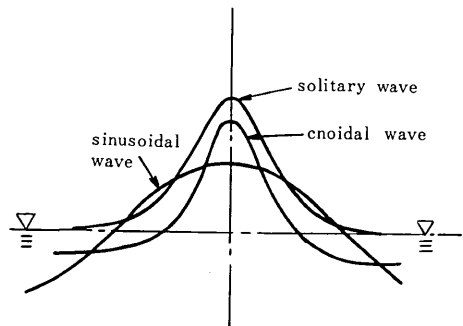


図2 孤立波、クノイダル波および正弦波の形状比較

さて、

$$\left. \begin{aligned} r &= (x - C_0 t) / h \\ \tau &= C_0 t / 6h \\ u(r, \tau) &= 3\eta(x, t) / 2h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

を用いて、(17)式を変換すれば、

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + 6u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} = 0 \dots\dots\dots (22)$$

となり、一般化されたKdV方程式を得る。

3-2 KdV方程式の固有値

(22)式を次の境界値

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} u = \lim_{r \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u}{\partial r} = \lim_{r \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0 \dots\dots\dots (23-a)$$

と、初期値

$$u(r, 0) = g(r) \dots\dots\dots (23-b)$$

で解く初期値—境界値問題を考える。

ここで、特に、

$$g(r) = A \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{A}{2}} r \right) \dots\dots\dots (23-c)$$

とすると、(22)式の解は

$$u(r, \tau) = A \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{A}{2}} (r - 2A\tau) \right\} \dots\dots\dots (24)$$

であり、ソリトン解となることは容易に確かめられる。

さて、次の固有値問題を考えてみよう。

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + u(x, \tau) \right\} \Psi = \lambda \Psi \dots\dots\dots (25)$$

ここに、 τ をパラメーターとして考え、 $u(x, \tau)$ は(22)式のKdV方程式を満足するものとする。そして、 λ は固有値、 Ψ は固有関数とする。

上式において、 $|x| \rightarrow \infty$ なるとき、 u が有限ならば、 λ が時間 τ に無関係であることが、C.S.Gardner, R.M.Miuraら (1967年) によって示された。つまり(25)において、 $u(x, \tau)$ を $u(x, 0)$ に選んでもよいことである。

(24)式の $u(x, 0) = A \operatorname{sech}^2(\sqrt{A/2} x)$ とした場合、固有関数は、 $\Psi = C \operatorname{sech} \sqrt{A/2} x$ (C は定数)となり、固有値は $\lambda = A/2$ となることがわかる。この一つの固有値 λ に対して、一つのソリトンが対応し、(22)式のソリトン解は、 λ を用いて、

$$v(r, \tau) = 2\lambda \operatorname{sech}^2 \sqrt{\lambda} (r - 4\lambda\tau) \dots\dots\dots (26)$$

と書けることも、(24)式よりわかる。

しかし、これと逆な問題の方が重要なわけであって、すなわち初期値 $u(x, 0)$ に対する(26)式の固有方程式を解いて、離散的な固有値 λ_i が n 個求まった時、それぞれの固有値に対応して、(26)式で示されるソリトンが、はたして存在するか、否かである。これは実際、解析的に証明され、確かに $\tau \rightarrow \infty$ の段階では n 個のソリトンが発生することが示された。

例えば、 $v(x, 0) = A \operatorname{sech}^2 x$ とすれば、(25)式は $Z = \tanh x$ の変換で、次のLegendreの陪微分方程式になる。

$$\frac{d}{dZ} \left[(1 - Z^2) \frac{d\Psi}{dZ} \right] + \left(A - \frac{\lambda}{1 - Z^2} \right) \Psi = 0$$

この時、固有値は、もし、 $A = n(n+1)$ ならば、 $\lambda = m^2$ (ただし、 $m \leq n$, m, n ともに整数)となり、また固有関数は m 位のLegendreの陪関数となることがわかる。簡単な例題として、 $v(x, 0) = 6 \operatorname{sech}^2 x$ とすれば、2個の固有値は、それぞれ、 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ となることより、この初期値から出発すれば、 τ が十分に大きくなると (ソリトンがほとんど分裂している時間)、その解は、 $u(r, \tau) = 2 \operatorname{sech}^2(r - 4\tau - \theta_1^0) + 8 \operatorname{sech}^2(2r - 32\tau - \theta_2^0)$ と、線形重ね合わせによって書けることも、容易にわかる。ここに、 θ_1^0 , θ_2^0 は、それぞれのソリトンの位相差である。

上の簡単な例題においては、たまたま固有値 λ を求めることができたが、これはまれであると言ったほうがよいであろう。また、逆散乱の方法で初期値問題を解くためには、固有関数の $x \rightarrow \infty$ のときの挙動 (散乱データ)を知る必要があるが、上の例のような簡単な場合以外、求めがたいらしい。

それにも拘らずこの逆散乱の方法が注目を集めているのは、非線形偏微分方程式の初期値問題の解析的手法の展開は、今まで不可能であると考えられていたのに、非常に複雑ではあるが、一応解き得る手段がみつかったこと、そして非線形性をうまく回避して線形問題を次々に解いて、解を求めることができることがわかった点にあると思われる。またある研究者達は、線形初期値問題においてフーリエ解析が重要な役割をはたしたように、KdV方程式ばかりでなく一般の非線形初期値問題において逆散乱の方法が、有効な手段となるのではないかと期待している。くわしいことは、A.C.Scott, らによる解説、あるいは、和達氏の最近の解説を参照されたい。

3-3 プラズマの波動問題

エネルギー問題に関連して核融合炉の開発が脚光を浴びているが、そのためにはプラズマ (plasma) の研究が不可欠である。プラズマは普通、電子、イオン、中性子からなる電離した流体で電気的には中性に近いが、電気を導き、一般に流体力学的現象と電磁気学的現象とが連成して起こるといわれている。

このようなプラズマ中に起こる波動の一例としてイオン音波 (ion-acoustic wave) を考えよう。プラズマ物理学の基礎については、この分野の適当な教科書を参照して頂くことにしてここでは単刀直入、本題に入ることをお許し願いたい。

粒子の衝突が無視できるか、ほとんど無視できる場合はBoltzmannの式における衝突項を無視するVlasovの式が用いられる。その時、 ν 粒子に対する連続の式、運動の方程式は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\nu \mathbf{V}_\nu) &= 0 \\ m_\nu n_\nu \frac{D\mathbf{V}_\nu}{Dt} &= -\nabla P_\nu + n_\nu e_\nu (\mathbf{E} + \frac{1}{C} \mathbf{V}_\nu \times \mathbf{B}) \end{aligned} \right\} \dots(27)$$

で表わされる。ここに、 n_ν は ν 粒子の密度、 \mathbf{V}_ν ；平均速度、 m_ν ；質量、 P_ν ；圧力、 e_ν ；電荷、 C ；光速、

\mathbf{E} ；電界、 \mathbf{B} ；磁界であり、微分演算子は $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ 、 $D/Dt = \partial/\partial t + (\mathbf{V}_\nu \cdot \nabla)$ である。Gauss 単位系を用いている。これにMaxwellの方程式

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{C} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{C} \sum_\nu e_\nu n_\nu \mathbf{V}_\nu - \nabla \times \mathbf{E} & \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \sum_\nu e_\nu n_\nu \end{aligned} \right\} \dots(28)$$

と、理想気体の状態方程式

$$P_\nu = P_\nu(n_\nu) \dots(29)$$

を加えれば、一応閉じた形の基礎方程式系が完成するわけであるが、非常に複雑な連成問題である。そこで次のような仮定を設ける。

プラズマは冷たいイオン(cold ion)と温い電子(warm electron)の二成分から構成されているものとする。また磁場は存在しないものとし、運動は一次元的に扱える、そして、 $m_i \gg m_e$ 、 $T_i \ll T_e$ (i, e はそれぞれイオン、電子を示す)としMaxwellの変位電流は無視できるものとする。

さて、次の代表量、 $x_0 = (\chi T_e / 4\pi e^2 n_0)^{1/2} \dots$ Debye 長、 $v_0 = (\chi T_e / m_i)^{1/2} \dots$ 中性仮定下のイオン音速、 $= E_0 (4\pi n_0 \chi T_e)^{1/2}$ 、(ここに、 n_0 ；イオン代表密度、 χ ；Boltzmann定数、 e ；単位電荷)を導入し、(27)、(28)、(29)式を無次元化し、意味のある式を残せば、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= E \\ \frac{\partial n_e}{\partial x} &= -n_e E \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= n - n_e \end{aligned} \right\} \dots(30)$$

ここに、 n 、 v は、 n_i 、 v_i を無次元化したものである。境界条件 $x \rightarrow \infty$ のとき

$$n = n_e = 1, v = 0 \dots(31)$$

の下での初期値問題を考える。

さて、この問題に対して水波と同様に減速振動法を適用しよう。まず非振動解としての静止解

$n = n^0 = 1$ 、 $n_e = n_e^0 = 1$ 、 $v = v^0 = 0$ 、 $E = E^0 = 0$ は確かに(30)式を満足する。この静止解に無限小の摂動を加え、 $n = 1 + n^1$ 、 $n_e = 1 + n_e^1$ 、 $v = v^1$ 、 $E = E^1$ 、として、(30)式に代入し、線形化し、 n^1 、 E^1 、 n_e^1 を消去すれば、 v^1 に関して

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2} \right) v^1 = 0 \dots(32)$$

を得る。なお、 n^1 、 E^1 、 n_e^1 も同一の式を満足することがわかる。(32)式に $v^1 = v_k e^{i(kx - \omega t)}$ を代入すれば、線形理論における分散関係

$$\omega^2 = \frac{k^2}{1 + k^2} \dots(33)$$

が求まる。

$k \ll 1$ と仮定すれば、近似的に、

$$kx - \omega t = k(x - t) + \frac{k^2}{2} t$$

となることより、分散性と非線形性とを表わすパラメータ ε を導入し、独立変数に関しては、(12)式と同じ変換を、従属変数に対しては、

$$\left. \begin{aligned} n &= 1 + \varepsilon n^{(1)} + \varepsilon^2 n^{(2)} + \dots \\ n_e &= 1 + \varepsilon n_e^{(1)} + \varepsilon^2 n_e^{(2)} + \dots \\ v &= \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \dots \\ E &= \varepsilon^{1/2} (\varepsilon E^{(1)} + \varepsilon^2 E^{(2)} + \dots) \end{aligned} \right\} \dots(34)$$

のように ε に関して展開できるものとする。水波の時と同様に ε のべきについて整理すれば ε に関しての式より、 τ に関する任意関数を 0 に選んで

$$n^{(1)} = n_e^{(1)} = v^{(1)} = - \int E^{(1)} d\xi \dots(35)$$

を得る。

ε^2 に関する式において、(35)式を用いて整理すれば、結局 $n^{(1)}$ に関して

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial \tau} + n^{(1)} \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 n^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0 \dots(36)$$

なるKdV方程式が導かれる。以上の理論はTaniutiら(1966年)が示したものである。

(36)式を有次元化すれば、 \tilde{v} (有次元量)を考えて

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{v_0 x_0^2}{2} \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial x^3} = 0$$

となる。これに、 $X = x - v_0 t$ 、 $T = t$ なる座標変換を行えば、

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial T} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \frac{v_0 x_0^2}{2} \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial X^3} = 0 \dots(37)$$

となる。

3-4 逆向きソリトンの衝突

今まで、浅水波、イオン音波に対するKdV方程式が減速振動法によって、すんなりと導びかれたのであるが、それらの操作は特に一方向の波に注目した漸近理論であった。従って、二つのソリトンが逆方向から進んできて衝突する現象や、反射波が重要な役割を演ずる問題等には適用できない。そのような問題に対して

は次のような摂動展開を考える。

独立変数の変換には、(12)式の代わりに

$$x_1 = \varepsilon^{1/2} x, \quad t_1 = \varepsilon^{1/2} t$$

を用い、イオン音波を考えることにし、従属変数に関しては、(36)式を用いる。εのべきに整理し、摂動量を、密度、速度に対して、近似的に次式で

$$\bar{n} = \varepsilon n^{(1)} + \varepsilon^2 n^{(2)}$$

$$\bar{v} = \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)}$$

と定義すれば、若干の計算の後；最終的に、 $O(\varepsilon^{3/2})$ の近似度で、次の二つの式が導びかれる。

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{n} \bar{v}) = 0 \dots\dots\dots(38)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{n}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{n}}{\partial x} - \bar{n} \frac{\partial \bar{n}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t \partial x^2} = 0 \dots\dots\dots(39)$$

上の二式において、*x*軸の正方向にのみに伝播する波に注目して、近似度を少しゆるめれば、先に求めたKdV方程式を得ることができる。 \bar{u} あるいは \bar{n} を消去することによってイオン音波に対する Boussinesq の式も導びくこともできる。

4. KdV方程式とその他の波動方程式（あるいは発展方程式）について

浅水波とプラズマ中のイオン音波について、KdV方程式を導びいてきたが、この節では、二つのKdV方程式の関係と他の波動方程式について、少し説明を加えたい。

係数が凡て定数1であるKdV方程式は、

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \dots\dots\dots(40)$$

であり、このソリトン解は、(23-a)式の境界条件下で解いて、

$$v = v_0 \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_0}{3}} \left(x - \frac{v_0}{3} t \right) \right\} \dots\dots\dots(41)$$

となる。ここで、 δ, γ を定数とし

$$\xi = \delta/\gamma x, \quad \tau = \delta/\gamma^3 t, \quad \eta(\xi, \tau) = v(x, t)$$

となる変換を(40)式に施せば、

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \gamma^2 \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \delta^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = 0 \dots\dots\dots(45)$$

となる。浅水波の場合は、(22)式より、 $\delta^2 = 1, \gamma^2 = 6$ 、イオン音波の場合は、(36)式より $\delta^2 = 1/2, \gamma^2 = 1$ とする場合に相当している。このように(40)式の解が得られれば、容易に、(45)あるいは、(22)、(36)式の解も得られるわけである。

なお、(45)式のソリトン解は、(41)式より容易に

$$\eta(\xi, \tau) = \eta_0 \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta_0}{3}} \frac{\gamma}{\delta} \left(\xi - \frac{\eta_0}{3} \gamma^2 \tau \right) \right\}$$

と求まり γ^2 が伝播速度を支配し、また γ/δ が、ソリトンの裾野 (skirt) の大きさを支配することもわかる。波動方程式は双曲型偏微分方程式によって示され

る。線形の場合は（一次元 *x* の正方向に進行する波を考えて）

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(45)$$

と表わされ、初期条件を $v(x, 0) = f(x)$ とすれば、その解は $v(x, t) = f(x - t)$ となる。

また、上式の第2項を非線形項に置き換えれば、

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(46)$$

となる。これも、初期条件を $v(x, 0) = f(x)$ とすれば、容易に確かめられるように、陰に $v = f(x - vt)$ と表わされる。

ここで、 $f(x) = \sin x$ とすれば、(45)式の解は、 $v(x, t) = \sin(x - t)$ となり初期の形状を変化させずにそのまま伝播する。しかし、(46)式の解は $v(x, t) = \sin(x - vt)$ となり、これは、形状に変化をきたす。時間の経過につれて、いわゆる ‘つっ立ち’ を起こし、遂には、*v* が多価となる。この現象は砕波 (wave breaking) という物理現象に対応している。

これらの式に対比されるのが、KdV方程式と Burgers 方程式である。(40)式と(46)式とを比較し、わかるように、KdV方程式の第3項、 $\partial^3 v / \partial x^3$ 項は、先の砕波効果とうまくバランスする働きをする。この項のために、相当な高さの波も安定に伝播され得るのである。

さて、Burgers方程式の基本的な形は

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \dots\dots\dots(47)$$

と書ける。これは一次元粘性流体のモデルとして提案されたものである。KdV方程式との違いは、第3項が *x* の2階微分になっていることである。また、Burgers方程式は単調衝撃波型の解、 $v = c \tanh x/2$ の解を持つことも確かめられる。Cole-Hopf変換

$$v = \frac{2 \partial (\log \phi)}{\partial x}$$

を行うことにより、Burgers方程式は、よく知られた熱伝導の方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

に変換される。KdV方程式については、このような単純な形になる変換は、著者らの知る限りまだ発見されていないようである。和達氏は、KdV方程式の変換と逆散乱の方法との密接な関係について解説されておられる。

KdV方程式はエネルギーの散逸 (dissipation) は考慮されていないがBurgers方程式は考慮されている。分散性と散逸性が共存する媒質に関しては、KdVとBurgers方程式が組み合わさった式が求められていて、これに対してもさかんに研究されている。

5. 有限要素法による定式化

ある問題に対して、それを支配する基礎微分方程式と境界条件が明確に与えられているなら、ほとんどの場合あまり技巧を要せずとも適用できる重み付き残差法 (method of weighted residuals) を用い数値解析する。

まず、(22)式を考えよう。境界条件(23-a)式を満足する重み関数を(22)式の両辺に乘じ、考えている領域全体にわたって積分すれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta u \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + 6u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} \right) dr = 0$$

となる。境界条件を考慮しつつ部分積分を施せば、結局上式は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \delta u + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial r^2} - 3u^2 \frac{\partial \delta u}{\partial r} \right) dr = 0 \dots\dots (48)$$

さて、この式を有限要素法で解こうというのであるが、無限領域を扱うことは数値計算上できないので、適当な有限な領域に置換する必要がある。幸い、ソリトンのような波を解析する場合、ソリトンの波高は、その中心から離れると急に0になる傾向があるので、境界を十分波から離れたところに位置すれば有限領域に置換することが出来る。

その有限領域を有限個の要素に分割し、その節点におけるパラメーターを適当な形状関数で内挿すればよいわけである。本解析では次のようにした。

$$u = [N] \{u\} \dots\dots\dots (49)$$

節点パラメーター

$$\{u\} = [u_1, (u,r)_1, (u,rr)_1, u_2, (u,r)_2, (u,rr)_2]$$

形状関数

$$[N] = \begin{bmatrix} (1-\xi)^3(3\xi^2+9\xi+8)/16 \\ (1+\xi)(1-\xi)^2(3\xi+5) \ell / 32 \\ (1+\xi)^2(1-\xi)^3 \ell^2 / 64 \\ (1+\xi)^3(3\xi^2-9\xi+8)/16 \\ (1+\xi)^2(1+\xi)(3\xi-5) \ell / 32 \\ (1+\xi)^3(1-\xi)^2 \ell^2 / 64 \end{bmatrix}$$

$$r = [(1-\xi)/2, (1+\xi)/2] \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}$$

$$\ell = r_2 - r_1 (> 0)$$

重み関数も、(49)式と同一の式を用いれば、いわゆる Galerkin 方程式が得られる。

$$\delta u = [N] \{\delta u\} \dots\dots\dots (50)$$

(49)、(50)式を(48)式に代入すれば、 δu が任意であることより次の非線形代数方程式が得られる。

$$\int [\tilde{M}_0] \{\dot{u}\} + [\tilde{M}_2] \{M\} - 3 \int [M_1] \{u\} [u] \{N\} dr = 0 \dots\dots (51-b)$$

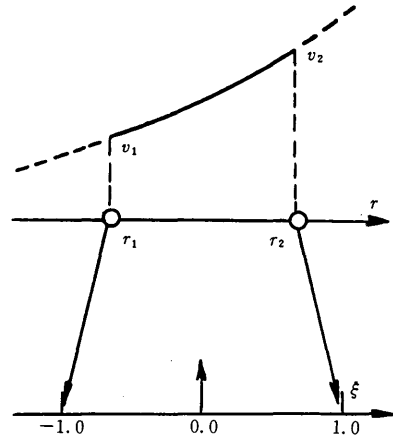


図3 形状関数の変換

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{u}\} &= \frac{\partial}{\partial t} \{u\}, [\tilde{M}_0] = \int [N] \{N\} dr \\ [\tilde{M}_2] &= \int [N, r r] \{N, r\} dr, [M_1] = [N, r] \{N\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (51-b)$$

である。

さて、(51-a)式の時間積分を行う方法としては、Runge-Kutta法、Crank-Nicolson法等々、種々な方法が提案されているが、ここでは次のような差分法を用いる。つまり時間増分を $\Delta \tau$ とし、 $\Delta \tau$ 後の値 $u^{(n)}$ を $\tau_n = \tau_{n-1} + \Delta \tau$ の時

$$u^{(n)} = u^{(n-1)} + \Delta \tau \{\gamma \dot{u}^{(n)} + (1-\gamma) \dot{u}^{(n-1)}\} \dots\dots (52)$$

の差分で近似する。 $\gamma = 0$ の時は $\dot{u}^{(n-1)} = (u^{(n)} - u^{(n-1)}) / \Delta \tau$ の後退差分、 $\gamma = 1$ の時は、 $\dot{u}^{(n)} = (u^{(n)} - u^{(n-1)}) / \Delta \tau$ の前進差分となる。ここでは $\gamma = 1/2$ と選ぶ場合、つまり、梯形法則 (trapezoidal rule) を用いることにする

τ_0 からの時間増分 $\Delta \tau$ の間に、 $\{u\}_{\tau=\tau_0}$ は Δu だけその増分があったとすれば、

$$\{u\} = \{u\}_{\tau=\tau_0} + \Delta u = \{u_0\} + \Delta u \quad a \tau = \tau_0 + \Delta \tau \dots\dots (53)$$

となり、また(52)式より

$$\{\dot{u}\} = \frac{2}{\Delta \tau} \Delta u - \{\dot{u}_0\} \dots\dots (54)$$

が得られる。(53)、(54)式を(51)式に代入して、 Δu に関する高次の項を無視すれば、

$$\left(\frac{2}{\Delta \tau} [\tilde{M}_0] + [\tilde{M}_2] - 6 \int [M_1] \{u_0\} \{N\} dr \right) \Delta u = [\tilde{M}_0] \{\dot{u}_0\} - [\tilde{M}_2] \{u_0\}$$

$$+3 \int [M_1] \{u_o\} \{u_o\} N^T dr \dots \dots \dots (55)$$

となる。この式は、非線形問題の有限要素解析における増分法に相当する。

このように、 $\{u\}$ に関して線形化した式をつぎつぎに解いていく方法については、収束性や数値上の不安定などに、大きな疑問が残るところであるが、次のいくつかの計算例で示すように、KdV方程式の解析に関しては、問題は起こらなかった。その数値実験の結果について述べよう。

まず、ここで使用した形状関数の精度を確認しなければならない。ソリトンが静止している座標系での、KdV方程式、(18)式を用い、形状関数の妥当性を確認した結果を図4に示す。初期値として、 $x=0$ の位置にパルス状の波Hを与えて、Newton-Raphson法で計算した。初期値が甚だしく正解とかけはなれていたため、収束するまでに多くの繰り返し計算を要した。

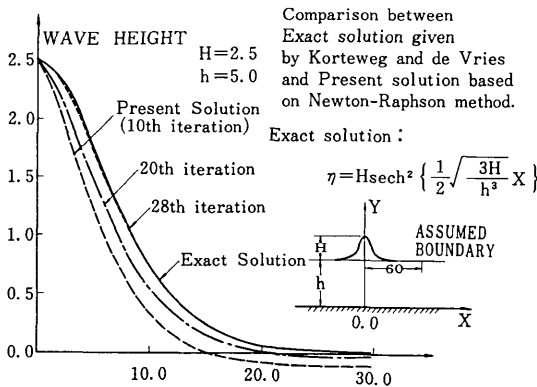


図4 Finite Element Solution of KdV Equation

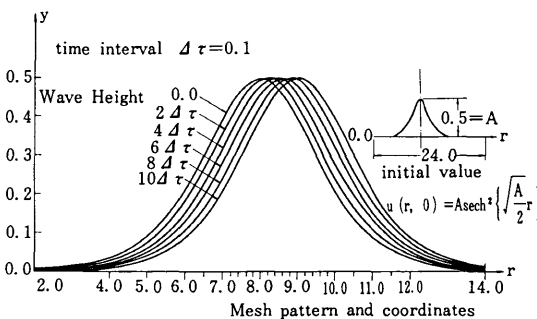


図5 A Simple Nonstationary Problem Analysed by Incremental Approach.

次に非定常問題の解析について、本方法の精度を確かめるために、(55)式を用い、一つのソリトンの平行移動を数値的に追跡したのが図5である。この図で示されるように増分 Δu について線形化した式でも、時間増分を適当にとれば、修正計算なしでも、かなりの精度で追跡できることがわかる。

さらに本方法の有効性を確認するために、二つのソリトンの衝突時の形状変化を計算したのが、図6である。図7には解析解が示されている。解析解は $t \rightarrow -\infty$ においてと、 $t \rightarrow +\infty$ において、二つのソリトンの裾野がほとんど重なっていない、十分に離れているものである。数値計算の初期値も、互いに十分離れている二つのソリトンを採用すべきであろうが、そうすると、本計算においては、インプリシット法(implicit method)で計算しているので、非常に多くの時間を要すること

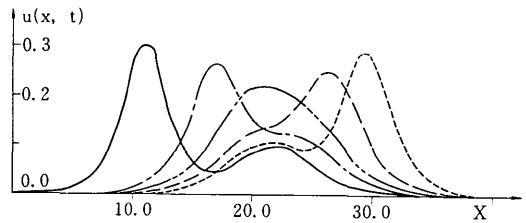


図6 Interaction of two solitons (finite element solution)(initial conditions ; $u(x, 0) = \sum_{i=1}^2 A_i \operatorname{sech}^2[\sqrt{\frac{A_i}{2}}(x - \theta_i)]$, where $A_1=0.3, \theta_1=11.0, A_2=0.1$, and $\theta_2=22.0$, linear superposition, time increment ; $\Delta t=1.0$, and --- at $t=0.0$, - - - - at $t=10\Delta t$, - - - - at $t=15\Delta t$, - - - - at $t=20\Delta t$, and - - - - at $t=25\Delta t$.

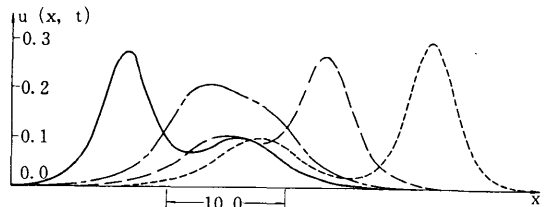


図7 Analytical solution of two solitons interaction by the inverse method [Segur (1973)]. The larger soliton's amplitude is 0.3 and the smaller is 0.1, and they are sufficiently separated at the initial state. T the basic time and Δt the time increment ; $\Delta t=1.0$, --- at $t=T$, - - - - at $t=T+11\Delta t$, - - - - at $t=T+22\Delta t$, and - - - - at $t=T+37\Delta t$.

になり、また数値誤差の制御も困難なので、ここでは二つのソリトンは概して衝突し始めているのであるが、まだ近似的に重ね合わせが成り立つ状態を初期値とした。従って厳密に言えば、比較にならないが、それにしても両者の形状変化はほとんど同じである。以上三つの例題により本方法の有効性は十分実証出来たと考えられるので次節でいくつかの数値解析結果を紹介する。

6. 二、三の数値解析例

地滑り、地震による隆起等により、図8に示す初期値のような表面の盛り上がり生成されることがある。このような形状からソリトンが生成され、往々にして多大な災害をもたらすことが実際に報告されている。計算結果は、はっきりとソリトンが生じることを示している。KdV方程式はソリトンを作るあたかもフィルターのような役目をしているようである。

三つのソリトンの衝突を解析した結果を図9に示す。初期条件は2個のソリトンの衝突の解析と同じように、もう衝突し始めているのであるが、まだほとんど線形和が成り立っているとして解析した。衝突時にいわゆる‘うねり’(bore)が生成されることがわかる。

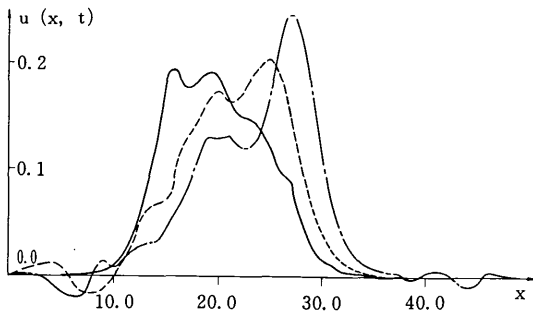


図8 Generation of solitons from an arbitrary initial state, initial values of $u(x, 0)$ at nodal points are given artificially, time increment; $\Delta t=0.8$, — at $t=0.0$, ---- at $t=6\Delta t$, and - - - - at $t=12\Delta t$.

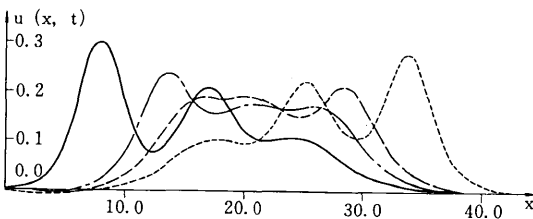


図9 Interaction of three solitons(initial conditions);

$$u(x, 0) = \sum_{i=1}^3 A_i \operatorname{sech}^2\left\{\sqrt{\frac{A_i}{2}}(x-\theta_i)\right\},$$

where $A_1=0.3, \theta_1=11.0, A_2=0.2, \theta_2=20.0,$
 $A_3=0.1, \theta_3=28.0$, time interval; $\Delta t=1.0,$
 — at $t=0.0$, ---- at $t=10\Delta t$, - - - - at $t=15\Delta t$, and - - - - - at $t=25\Delta t$.

このうねりを初期条件として用いたのが、図10である。うねりの前面は立ち上がり、ある時点においては振動型の衝撃波になっていることがわかる。

さて、イオン音波に対するKdV方程式において、(37)式を考えれば、代表イオン密度 n_0 が不連続に変化している状況 (実際の物理現象においては存在しないであろう) のモデルとして、第3項の係数が不連続に変化しているKdV方程式を考えることができる。それを δ^2 として、(Hは単位段階関数)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial n}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} = 0$$

$$\delta^2 = \delta_1^2 + (\delta_2^2 - \delta_1^2) H(x-x_0)$$

なる式において、 δ_1^2 を固定して、 δ_2^2 を変化させた場合の計算結果を図11、図12に示す。

これは、一つのソリトンからどのようにして他のソリトンあるいはテール (tail) が生成されるかの一つのモデルとなっているMadsenとMei (1969年)はスローピングビーチ (sloping beach) をソリトンが進むとき、一つのソリトンからその傾斜に応じて、いくつかのソリトンが新しく生成されることを数値計算によって示した。彼らは、KdV方程式を直接扱っているのではなく、適当な近似でKdV方程式が導かれる2個の微分方程式を解いている。

次にイオン音波の逆向きソリトンの衝突の計算結果を次に示そう。この時は(38)、(39)式を考えることになる。

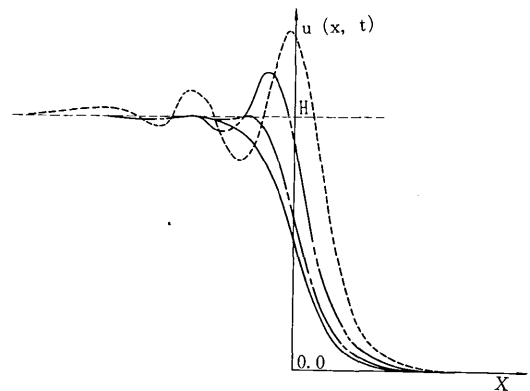


図10 Development of bore, oscillatory shock wave(initial condition; $u(x, 0) = H/2(1 - \tanh \alpha x/2)$, where $H=0.1, \alpha=4.0$), time increment; $\Delta t=1.0$, — at $t=0.0$, ---- at $t=3\Delta t$, - - - - at $t=10\Delta t$, and - - - - - at $t=18\Delta t$.

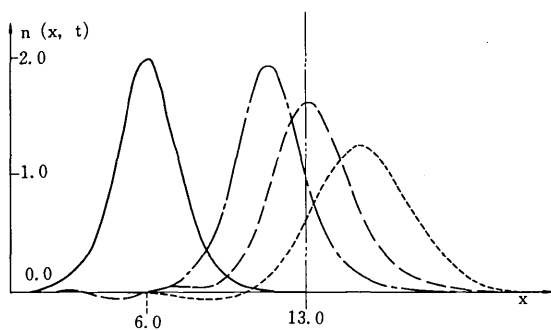


図11 Change of soliton passing the discontinuous point No.1($\delta^2=1/2$ ($x < 13.0$), $\delta^2=1.0$ ($x > 13.0$), increment; $\Delta t=0.5$, — at $t=0.0$, --- at $t=16\Delta t$, — at $t=22\Delta t$, and --- at $t=33\Delta t$.

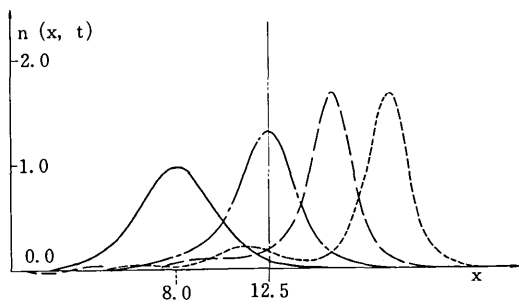


図12 Change of wave shape of soliton passing the discontinuous point, No.2($\delta^2=1/2$ ($x < 12.5$), $\delta^2=1/4$ ($x > 12.5$)), time increment; $\Delta t=0.5$, — at $t=0.0$, --- at $t=25\Delta t$, — at $t=36\Delta t$, and --- at $t=46\Delta t$.

(38) 式に重み関数 $\delta \bar{v}$, (39) 式に $\delta \bar{n}$ を乗じて積分し, Galenkin 方程式を作り, 離散化する手段として KdV 方程式と同様に有限要素法を用いた. 空間方向の最高微分は 2 階であるので, 形状関数としては, \bar{n} , \bar{v} とともに Hermite の三次の多項式を用いた. 時間積分に関しては, 同様, 先の増分法によった. 図13, 図14にその結果を示す.

初期条件としては, 同一の振幅の 2 個のソリトンが逆向きに進行して, 衝突を開始しているのであるが, この状態までは, 衝突による影響はまだ起こっていないものとする. 振幅が小さい時は, 中央に一つの山をつくり, すんなりと互に通り返り抜けるだけで, ほとんど重ね合わせが成り立っているが, 振幅が大きくなると, まったく異った現象を示す.

非線形形の微分方程式においては, 初期値がある値以

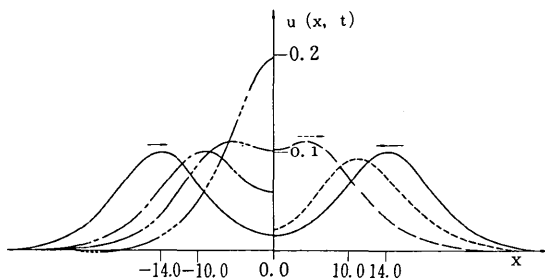


図13 Interaction of two solitons travelling in opposite directions (small amplitude), time increment $\Delta t=2.7273$, — at $t=0.0$, --- at $t=2\Delta t$, --- at $t=3\Delta t$, --- at $t=6\Delta t$, --- at $t=8\Delta t$, and --- at $t=10\Delta t$.

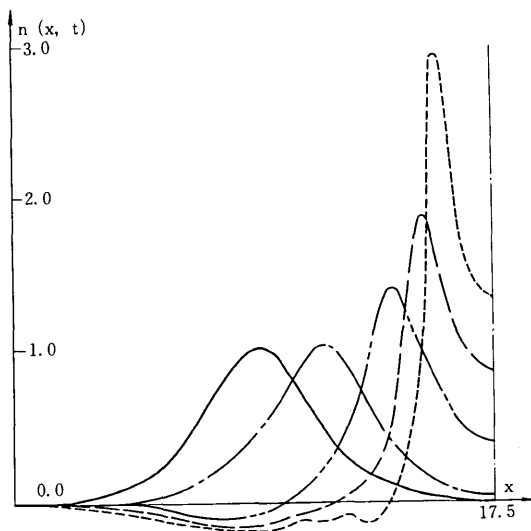


図14 Interaction of two solitons travelling in opposite directions (large amplitude) (different initial conditions and boundary conditions ($\bar{v}=n_x=0$ (at $x=x_0$)) from Fig. 13), time increment; $\Delta t=0.375$, — at $t=0.0$, --- at $t=4\Delta t$, --- at $t=10\Delta t$, --- at $t=13\Delta t$, and --- at $t=15\Delta t$.

下であれば, 無限時間経過しても, 解は安定であるが, この値以上であると有限時間内に解が爆発することがあるという閾値 (threshold) が存在することがある. 大振幅の逆向きソリトンの衝突も, そうなのかもしれない.

7. あとがき

非線形分散性波に対する KdV 方程式を取り上げ, 有限要素法により初期値問題を追跡し良好な結果を得た.

今回、時間積分を行うに当り、簡単な梯形則を用いて行ったが、この方法は陰形式 (implicit scheme) となるので、時間がかかり経済性の点で難点がある。そこで、この時間積分の方法をいろいろ物色しているが、特にLax-Wendroff法を用いて、陽的に解く (explicit scheme) 方法が注目されると思う。

KdV方程式を巡っては、2節でもちょっと触れたように理論に先んじて数値実験が展開された。実際に工学上問題となるのは、二次元、三次元のそれである。それらの基礎式は、一次元の波と比べて、一段と複雑となるので、KdV方程式と同様に数値実験が先行し、また理論の発達に対して重要な役割をはたすことが期待される。

(1976年3月19日受理)

参考文献

- 1) Russell, J. S., "Report on waves," British Association Report, 1844
- 2) Korteweg, D. J., and de Vries, G., "On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves", *Phil. Mag.*, **39**, 1895.
- 3) 岩波講座 "現代物理学の基礎" 古典物理学1 岩波書店, 1975.
- 4) 寺沢寛一編 "自然科学者のための数学概論 (応用編)" 岩波書店, 1971.
- 5) Pregrine, D. H., "Calculation of the Development of an Undular Bore," *J. Fluid Mech.* **25**, 1966.
- 6) Taniuti, T., and Washimi, H., "Propagation of Ion-Acoustic Solitary Waves of Small Amplitude," *Phys. Rev. Lett.*, **17**, 1966.
- 7) Gardner, C. S., and Morikawa, G. K., "Similarity in the Asymptotic Behavior of Collision-Free Hydro-magnetic Waves and Water Waves," *Courant Inst. Math. Sci. Rep. NYO-9082*, 1960.
- 8) Segur, H., "The Korteweg-de Vries Equation and Water Waves. Solution of the Equation. Part 1," *J. Fluid Mech.*, **59**, 1973.
- 9) Scott, A. C., CHU, F. Y. F., and McLaughlin, D. W., "The Soliton: A New Concept in Applied Science," *Proc. of IEEE.*, **61**, 1973.
- 10) Ikezi, H., Taylor, R. J., and Baker, D. R., "Formation and Interaction of Ion-Acoustic Solitons," *Phys. Rev. Lett.*, **25**, 1970.
- 11) Madsen, O. S., and Mei, C. C., "The Transformation of a Solitary Wave over an Uneven Bottom," *J. Fluid Mech.*, **39**, 1969.
- 12) Kampem, N. G., and Felderhof, B. U., "Theoretical Methods in Plasma Physics", North-Holland Publishing Company, 1967.
- 13) 井上英俊, 並木美喜雄, 大場一郎, "ソリトンと素粒子", 科学 (岩波書店), **40**, 1970.
- 14) 和達三樹, "ソリトンの研究の現状", 科学 (岩波書店), **45**, 1975.
- 15) 角谷典彦, "分散性媒質中の非線形波動——Korteweg de Vries方程式を中心として——", 日本物理学会誌, **27**, 1972.
- 16) 戸田盛和, "波のかたまり—Soliton", 科学 (岩波書店), **38**, 1968.
- 17) Zabusky, N. J., and Kruskal, M. D., "Interaction of 'SOLITONS' in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States", *Phys. Rev. Lett.*, **15**, 1965.
- 18) Gardner, C. S., Green, J. M., Kruskal, M. D., and Miura, R. M., "Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation", *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1967.
- 19) Wadati, M., and Toda, M., "The Exact N-Soliton Solution of the Korteweg-de Vries Equation", *J. Phys. Soc. Japan*, **32**, 1972.
- 20) Gallagher, R. H., Oden, J. T., Taylor, C., and Zienkiewicz, O. C., "Finite Elements in Fluids—volume 1" John Wiley & Sons, Ltd., 1975.
- 21) Lax, P. D., "Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves", *Comm. Pure Appl. Math.*, **21**, 1968.
- 22) Kawai, T., and Watanabe, M., "Analysis of a Solitary Wave Problem by the Method of Weighted Residuals", to be published in *Proc. of the Second International Symposium on Finite Element Methods in Flow Problems, June 14-18, 1976 Rapallo, Italy.*
- 23) Kawai, T., and Watanabe, M., "Finite Element Analysis of the Nonlinear Dispersive Waves in Plasma", ditto.

