

弾塑性波伝ばの有限要素解析

Finite Element Analysis of the Elastic-Plastic

——材料の構成方程式がひずみ速度に依存する場合——

Wave Propagation in Metal Obeying the Strain-Rate Dependent Constitutive Equation

中 桐 滋*

Shigeru NAKAGIRI

1. 緒 言

材料が高速衝撃をうける場合に生ずる弾塑性波伝ばの問題はKármán等¹⁾が解析して以来、金属の高速材料試験への応用など多くの研究が積重ねられている。金属の高速変形問題では材料の構成方程式に及ぼすひずみ速度効果を考慮しなければならず、種々のひずみ速度依存性の構成方程式が提案されている²⁾。その1つは塑性変形に対する過大応力の効果に着目して得られたMalvernの構成方程式³⁾である。これは定速度衝撃をうける棒内の応力波頭が常に弾性波速度で進行するという実験事実を塑性域まで予荷重をうけた棒については説明し得ないが、数学的取扱いが容易なためしばしば用いられている。他の例は微視的な転位の動力学的考察から塑性流動関数を定めたJohnston-Gilman⁴⁾形の構成方程式であり体心立方金属を対象とするものである。この構成方程式を用いてKuruyama-Kawata⁵⁾が特性曲線法により軟鋼内の1次元弾塑性波伝ばを解析し、弾性波頭が波の進行と共に減衰することを報告している。

構成方程式に現れるひずみ速度の影響を実験的に調べるには、試験片内の1点における応力とひずみを時間の関数として同時に測定すればよいのであるが、弾塑性波の通過中に両者の同時測定を行うのは実験技術上種々の困難がある。そこで半実験的に、まず構成方程式を仮定し、高速衝撃実験の境界条件と構成方程式を用いて応力またはひずみ-時間曲線を計算し、これと実測される応力またはひずみ-時間曲線とを比較して、両者が一致するように構成方程式の修正を繰返す間接法⁶⁾を用いる場合もある。この様なときに、ひずみ速度依存性を有する構成方程式に従う材料の高速変形下での挙動を簡便に計算する方法を見出すことは高速材料試験への一助となると考えられる。

本稿では種々の衝撃速度波形や定応力形の衝撃条件の取扱いが容易である利点に着目して有限要素変位法への応用を試み、ひずみ速度依存性構成方程式に従う材料内の1次元弾塑性波伝ば解析をNewmark β法⁷⁾に

よる直接数値積分と組合せて行い、特性曲線法による解と一致する結果が得られることを検証した数値実験について述べる。

2. 直接数値積分に用いる時間増分

本稿では速度比例形の減衰項を省略した運動方程式の時間増分Δtに対する増分形(1)式を波動伝ばの基礎式に用いる。運動方程式の解、すなわち変位uをNewmark β法による直接数値積分(2)、(3)式にて求める。

$$[k] \Delta u + [m] \Delta \ddot{u} = \Delta f \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\Delta \dot{u}_i = \Delta t (\dot{u}_i^n + \Delta \ddot{u}_i^n / 2) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\Delta u_i = \Delta t^2 (2\ddot{u}_i^n / \Delta t + \ddot{u}_i^n) / 2 + \beta \Delta t^2 \Delta \ddot{u}_i^n \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここでβはNewmark法の係数、[k]と[m]は剛性および慣性マトリックス、Δfは外荷重増分ベクトル、記号・は時間に関する微分、肩符nは時刻t = nΔtにおける値、添字iはi番目の自由度であることを示す。この直接積分は近似積分法であるから、その変位解には誤差が含まれている。有限要素法で弾塑性解析を行うときには応力σとひずみεを変位から算出するので、式(1)~(3)を時間ステップに対して繰返し計算するとき、その積分誤差が増幅しないように注意を払わねばならない。

第3節に後述するように1次元ひずみ速度依存性構成方程式のΔtに対する増分形は

$$\Delta \sigma = E_r \Delta \epsilon + \xi \quad \dots\dots\dots (4)$$

と近似的に表現することができる。ここで弾性域の場合にはE_r = E(ヤング率)、ξ = 0である。今加速度増分を主変数として式(1)を変形し、縦剛性率をE_rとして求めた剛性マトリックスを[k_r]とすると次式が得られる。

$$([k_r] + [m] / \beta \Delta t^2) \Delta \ddot{u} = \Delta f - \Delta f_a / \beta \Delta t^2 - [k_r] \{ 2\dot{u}^n / \Delta t + \ddot{u}^n \} / 2\beta \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで要素内で変位が線形であると仮定した棒要素(i = 1, 2)の断面積をAとすると附加内力項Δf_aは

$$\Delta f_a = A \xi \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。有限要素の固有円振動数ωを[m]⁻¹[k_r]の固有値から求め、[m]⁻¹[k_r]の正規直交固有ベクトルマトリックスを[R]とする。ΔV = [R]⁻¹Δu、ΔV̇ = [R]⁻¹Δu̇と変数変換すると、Δf = 0なる場合にはt = (n+1)Δtとt = nΔtにおける変数Vの関係として次式が得られる。

* 東京大学生産技術研究所 第1部

研

$$\begin{cases} V_i \\ \dot{V}_i \\ \ddot{V}_i \end{cases}^{n+1} = \begin{cases} 1 & \Delta t(1 - \beta\omega_i^2\Delta t^2/B) \\ 0 & 1 - \omega_i^2\Delta t^2/2B \\ 0 & -\omega_i^2\Delta t/B \end{cases} \begin{cases} V_i \\ \dot{V}_i \\ \ddot{V}_i \end{cases}^n + f_i \begin{cases} \beta\Delta t^2/B \\ \Delta t/2B \\ 1/B \end{cases} \dots(7)$$

ここで $B=1+\beta\omega_i^2\Delta t^2$, ρ は密度, Δl は要素長さで分布慣性マトリックスに対して $f_1 = -6\sqrt{2}\xi/\rho\Delta l$, $f_2 = 0$ である. 式(7)右辺のマトリックス $[G]$ は, 時間ステップを繰返すとき変位解にふくまれる誤差の内, $t=n\Delta t$ における値に直接関係する誤差の増幅を示すものである. $[G]$ の固有値 λ は

$$\lambda = 1, 1 - \omega_i^2\Delta t^2/2B \pm (\omega_i\Delta t/B)\sqrt{\omega_i^2\Delta t^2/4 - B} \dots(8)$$

であるから, $\xi=0$ なる要素について考えれば, $\beta \geq 1/4$ であれば常に $|\lambda| \leq 1$ で, 数値積分は無条件安定であるという周知の結論が得られる. $\beta < 1/4$ のとき誤差が増幅しない条件 $|\lambda| \leq 1$ が成立するのは

$$\omega_i^2\Delta t^2 \leq 1/(1/4 - \beta) \dots(9)$$

$\therefore \Delta t \leq (1/\omega_{max})\sqrt{4/(1-4\beta)}$ のときである. 1次元弾性定ひずみ要素で分布慣性マトリックスを用いる場合, $\omega_{max} = \omega_1 = \sqrt{12}C_0/\Delta l$ ($C_0 = \sqrt{E/\rho}$: 波動伝ば速度) となるので, $\beta = 1/6$ に対して数値積分を安定に保つ Δt の限界値は $\Delta t = \Delta l/C_0$ という直観的に定める値と一致する. $\beta = 1/4$ とすれば数値積分は安定であるが定速度引張によるステップ状弾性波の伝ばを $\Delta t = \Delta l/C_0$ として試算したところ, 応力波頭と波頭近傍の波形のゆがみが波の進行とともに増大する結果となった. これは応力値自体も材料降伏判定のために問題となる弾塑性波伝ば解析では不適であるので, 以後の計算では全て $\beta = 1/6$ を用いた. この値は Δt 内で加速度が線形に変化するとの仮定に対応する.

3. ひずみ速度依存性の構成方程式

ここでは塑性流動関数が応力とひずみの代数式で表わされている Malvern 形と, 指数関数で表わされている Johnston-Gilman 形の構成方程式のみを例として取上げる. 前者の場合, 特性曲線法による文献[3]の結果と比較するため, 同一数値の次式を用いる.

$$\begin{aligned} E\dot{\epsilon} &= \dot{\sigma} + g(\sigma, \epsilon) \quad g(\sigma, \epsilon) = k(\sigma - f(\epsilon)) \\ f(\epsilon) &= 20,000 - 10/\epsilon \quad k = 0(\sigma < \sigma_r) \dots\dots\dots(10) \\ & \quad k = 10^6 \text{sec}^{-1}(\sigma \geq \sigma_r) \end{aligned}$$

ここで $E = 7.03 \times 10^3 \text{kg/mm}^2$, 降伏応力 $\sigma_r = 7.03 \text{kg/mm}^2$, $\rho = 2.72 \times 10^{-10} \text{kg sec}^2/\text{mm}^4$ である. また線形硬化性の軟鋼についての Johnston-Gilman 形構成方程式として文献[5]と同じく次式を用いる.

$$\begin{aligned} E\dot{\epsilon} &= \dot{\sigma} + (4/3)Eb\{N_0 + 0.75M(\epsilon - \sigma/E)\} \\ & \quad \times V^* \exp[-\{D + 0.75H(\epsilon - \sigma/E)/\sigma\}] \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

ここでバーガス・ベクトル $b = 2.5 \times 10^{-7} \text{mm}$, 最終転位速度 $V^* = 3.2 \times 10^6 \text{mm/sec}$, 初期転位密度 $N_0 = 3.75 \times 10^4 \text{mm}^{-2}$, 増殖係数 $M = 10^6 \text{mm}^{-2}$, 特性ドラッグ応力 $D = 200 \text{kg/mm}^2$, 加工硬化係数 $H = 10,666 \text{kg/mm}^2$, $E = 2.1 \times 10^4 \text{kg/mm}^2$, $\rho = 8.01 \times 10^{-10} \text{kg sec}^2/\text{mm}^4$ である.

応力速度 $\dot{\sigma}$ とひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ を含む式(10), (11) を有限要素法と組合せるためにはそれぞれの増分が必要である. 粘弾性波伝ばの解析に用いられた $\dot{\sigma}$ と $\dot{\epsilon}$ が Δt 内で線形に変化するとの仮定⁹⁾を用いると

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^{n+1} &= \dot{\sigma}^n + \text{Const.} \Delta t \text{ の関係から} \\ \Delta \dot{\sigma} &= 2\Delta \sigma / \Delta t - 2\dot{\sigma}^n \quad \Delta \dot{\epsilon} = 2\Delta \epsilon / \Delta t - 2\dot{\epsilon}^n \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

が得られる. また $t = (n+1)\Delta t$ と $t = n\Delta t$ における構成方程式の差から増分形の構成方程式を求め, $\Delta \dot{\sigma}$ と $\Delta \dot{\epsilon}$ とを式(12)を用いて消去すると, Malvern 形の場合には $\Delta \epsilon / \epsilon^n \ll 1$ の仮定の下で

$$\begin{aligned} \Delta \sigma &= \frac{E + k\Delta t/10(\epsilon^n)^2}{1 + k\Delta t/2} \Delta \epsilon \\ & \quad - \frac{k\Delta t}{1 + k\Delta t/2} \{\sigma^n - f(\epsilon^n)\} \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

Johnston-Gilman 形の場合には $\Delta \sigma / \sigma^n \ll 1$ の仮定の下で

$$\begin{aligned} \Delta \sigma &= \frac{E}{1 - \frac{(E/\sigma^n)(4bC_2/3)C_1V^* \exp C_1}{2/\Delta t - bMV^* \exp C_1}} \Delta \epsilon \\ & \quad - \frac{E(8bC_2/3)V^* \exp C_1}{(2/\Delta t - bMV^* \exp C_1) - (E/\sigma^n)(4bC_2/3)C_1V^* \exp C_1} \end{aligned} \dots\dots\dots(14)$$

が得られる. ここで $C_1 = -2\{D + 0.75H(\epsilon^n - \sigma^n/E)\}/\sigma^n$, $C_2 = N_0 + 0.75(\epsilon^n - \sigma^n/E)$ である. 式(13), (14)はいずれも式(4)の形であるから, 慣用の有限要素定式化により剛性方程式に組込むことが可能となる.

4. 数値計算結果

数値計算は式(5)のように加速度増分を主変数にとり, 速度形境界条件も加速度増分に変換して与え, 式(3)により変位を求め, 微小変形微小ひずみの変位ひずみ関係式からひずみ等を求めた. Newmark $\beta(\beta = 1/6)$ 法では $t = 3\Delta t$ まで, したがって波頭後の2要素の変位, 速度, ひずみには誤差が含まれるので,¹⁰⁾一定速度衝撃条件をステップ状に与えることはできない. そこで境界条件として図4に示すようにある助走区間後に一定値となるように与えた. また要素長さは $\Delta l = 0.2 \text{mm}$, 棒の全長は500要素として $l = 100 \text{mm}$ とした. 軟鋼の場合には $\Delta t = \Delta l/C_0$ は $0.0386 \mu\text{sec}$, Malvern 形の場合には $0.0393 \mu\text{sec}$ である. Malvern の計算結果との比較を図1に示す. 図中の○, □, △印は衝撃端より $x = 0, 8.1, 32.5 \text{mm}$ の位置における応力-ひずみ関係を文献[3]よりプロットしなおしたもので, 実線は

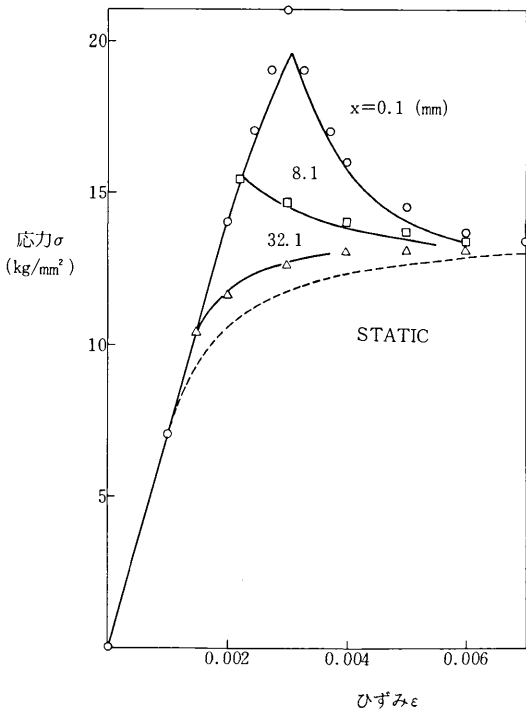


図1 棒内各断面における応力とひずみの変化

$x=0.1, 8.1, 32.1\text{mm}$ における有限要素解で、衝撃波形のちがいが支配的となる衝撃端近傍を除き、両者はほぼ一致している。式(3)は $\Delta\varepsilon/\varepsilon^n \ll 1$ の仮定が成立しなければ得られないが、図1の数値計算結果では $\Delta\varepsilon/\varepsilon^n$ は $10^{-2} \sim 10^{-4}$ の程度であり、式(3)を用いてもよいことが確かめられた。文献[3]と同じく、ひずみ分布にプラトーが現れず、応力波頭が減衰を伴いながら進行する結果も得られている。

図2は $3.9\mu\text{sec}$ で一定衝撃速度 $V=50\text{m/sec}$ とあてた以外は文献[5]と同じ条件で計算した結果を実線で示したもので、 $t=10.6, 30.9, 51.2\mu\text{sec}$ における応力とひずみ分布は文献[5]の結果(○印 $10.2, \triangle$ 印 $30.5, \square$ 印 $50.9\mu\text{sec}$)とよく一致している。文献[5]では $\Delta t=0.001\mu\text{sec}$ を用いているので、波頭近傍の様相が鮮鋭に求められている。短時間領域での応力とひずみ波頭の減衰を図3の実線で示す。同図の破線は文献[5]のひずみ波の波頭と波底の包絡線である。以上の計算に用いた衝撃速度を図4上段に実線で示す。この衝撃条件下での衝撃端における要素の応力値から、その断面に作用している荷重の時間的変化を求め破線にて示すが、助走区間後は約 950kg 以上となり、その後は漸増するのみである。そこで図4下段に破線で示

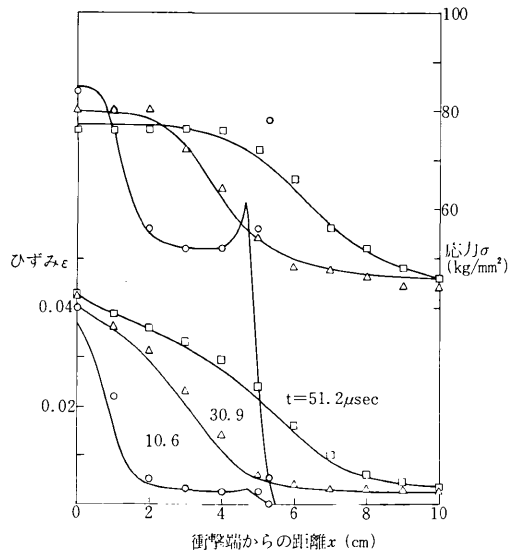


図2 応力とひずみ分布の時間的変化 (速度形)

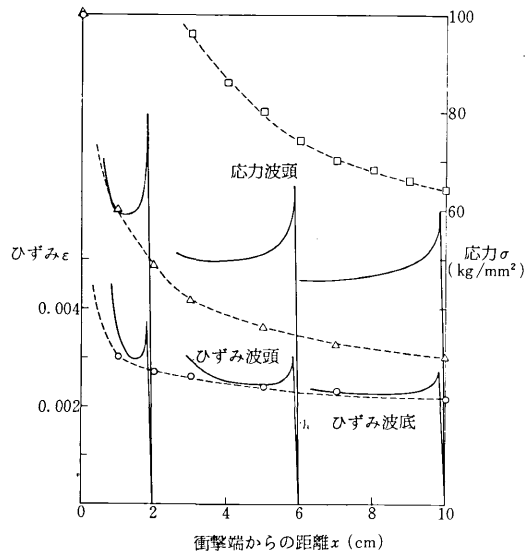


図3 応力波頭とひずみ波頭の減衰

す様に $t=3.9\mu\text{sec}$ で一定衝撃力 $F=950\text{kg}$ となる一定応力形の衝撃を加えたときの、衝撃端速度を同図に実線で、内部に進行する応力とひずみ分布を図5に示す。この場合衝撃端速度は 40m/sec に低下して行くが、図5の結果は図2の結果と類似している。この数値実験によれば衝撃が一定速度形か一定応力形によらずひずみ分布がほぼ同じであるから、測定精度を考慮すれば、

研究速報
両者の差異を実験的に検出するのは困難であろうと考えられる。

第3節で述べたように、 Δt 内で応力速度とひずみ速度が線形に変化すると仮定すれば、ひずみ速度依存性構成方程式も有限要素定式化に組込むことが可能であり、その数値計算結果は $\Delta t = 0.039 \mu\text{sec}$ と $\Delta t = 0.001$

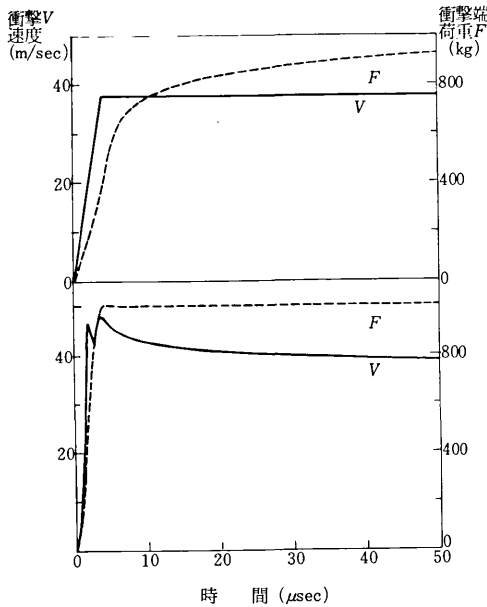


図4 衝撃境界条件

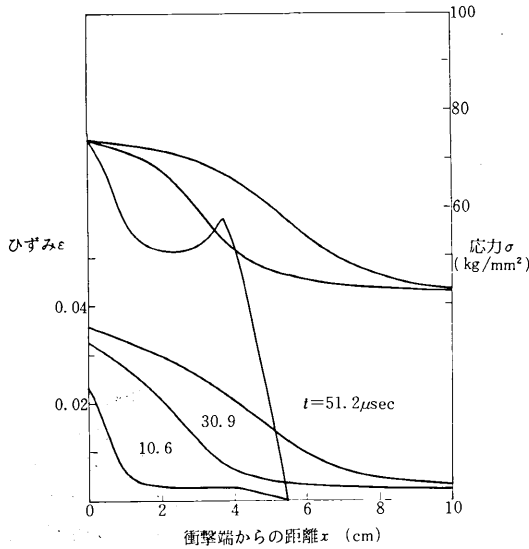


図5 応力とひずみ分布の時間的変化 (荷重形)

μsec および衝撃速度条件の差の影響を除けば特性曲線解と一致するものといえよう。また要素長さ $\Delta l = 0.2 \text{ mm}$ と式(9)から定めた Δt に対して $\Delta \epsilon / \epsilon^n$ と $\Delta \sigma / \sigma^n$ はいずれも 10^{-2} 以下となるので、近似式(13)と(14)の成立条件は満たされている。弾性要素については $\Delta t = \Delta l / C_0$ の条件は直接数値積分の安定限界を与えるが、 $\xi \neq 0$ となる塑性要素については式(7)に見られるように誤差の拡大は応力とひずみ値にも影響される。本計算では、ある弾性要素の応力値が Δt 時間内の途中で降伏応力を越えても弾性要素のままとして取扱い、次の Δt 時間内ではじめて塑性要素としての取扱いを行っている。したがって弾性要素としての応力値にはゆきすぎ量があり、この誤差を小さくするため、 Δt については Δl を小さく定めている。Johnston-Gilman形構成方程式の場合についての計算結果では、自由端または固定端とする衝撃をうけない側の端部より波の反射が生ずる程の長時間領域に対しても時間繰返ステップを安定に進めることが可能であった。一方Malvern形構成方程式の場合には $t = 20 \mu\text{sec}$ 以上の長時間領域では弾塑性境界後流側で加速度に振動成分が漸次現われ、これは上記の広力値ゆきすぎ量から生ずる誤差が式(7)右辺第2項を通じて増幅したのではないかと考えられる。

この小論は、Newmark β 法を用いて運動方程式の安定な直接数値積分を行うための時間増分の限界値について附言し、微小度変形微小ひずみ理論の枠内で構成方程式の非線形性に注目し、応力速度とひずみ速度が時間に対して線形に変化すると仮定の下で、衝撃による1次元弾塑性波の伝ばを有限要素法により解析し、特性曲線法により従来得られている解とほぼ一致する結果が得られることを述べたものである。

終りに式(11)に用いた材料定数について御教示いただいた東大宇航研 河田幸三教授と本稿の数値計算の実行に協力された東大大学院学生 下岡浩君に深甚なる謝意を表する。
(1975年12月20日受理)

参考文献

- 1) Karman, T. V. et al; Jnl. Appl. Mech. 17 (1950) 987.
- 2) Cristescu, N.; Dynamic Plasticity, North-Holland (1967).
- 3) Malvern, L. E.; Jnl. Appl. Mech. 18 (1951) 203.
- 4) Johnston, W. G. & Gilman, J. J.; Jnl. Appl. Phys. 30 (1959) 129.
- 5) Kuriyama, S. & Kawata, K.; Jnl. Appl. Phys. 44 (1973) 3445.
- 6) Lindholm, U. S. & Yeakley, L. M.; Jnl. Mech. Phys. Solids 13 (1965) 41.
- 7) Newmark, N. M.; Proc. ASCE. 85, EM3 (1959) 67.
- 8) Richtmyer, R. D. & Morton K. W.; Difference Methods for Initial-Value Problems, Interscience Publisher (1967).
- 9) Yamada, Y et al ; 生産研究 23 (1971) 186.
- 10) 中桐 滋 ; 生産研究 25 (1973) 63.