

大気汚染制御のための汚染濃度予測の一方式

A Method of the Prediction for Air Pollution Control

大島康次郎*・毛利尚武*・中川克也**

Yasujiro OSHIMA, Naotake MOHRI and Katsuya NAKAGAWA

1. 緒 論

1.1 概況および目的

大気汚染防止問題に関する抜本的な解決策は、汚染物質の排出を防止する以外にない。しかしながら、現在の科学技術の水準および経済性から判断して、これを直ちに実行することは不可能である。したがって当面の解決策として、局所的な地域における汚染濃度を監視して、生活環境を損わない程度にこの濃度を押えるためのコントロールを、汚染源である工場などに実施することが行われている。

本研究においては、大気汚染濃度の最適規制問題をシステム工学的立場からとらえて、これへ現代制御理論を適用し、実施することを目的とした汚染濃度の予測システムについて考察する。すなわち、ここで言う制御とは、観測局からの濃度や気象状況に関するデータをもとにして適当なモデルのもとに数時間先の汚染物質の濃度分布を予測する。しかる後社会的経済活動を考慮した評価関数のもとに、各工場への操業の規制を実時間で計算機によって指示しようとするものである。その際には、拡散場に関する全システムのダイナミックスを表現する状態方程式を作成しなくてはならない。そこで上記の重要なサブシステムである予測システムについて、その1つの方式を提示するのが本報告の目的である。

1.2 方 式

大気汚染の状態予測方式には、対象とする地域の気象や地形の状況などによって、また空間的な規模や予測時間などによって、それぞれに適当な方式が数多く提案されている。ここでは、排出源の排出量を計算機によってオンライン制御しようとする目的から、システムの状態方程式を作成する。この中に含まれる拡散係数などは時間可変な未知パラメータとして、観測データの統計的な処理によって与えられるものとする。いわゆる混合モデルが採用されている。離散型のシステム方程式は、Fickの3次元偏微分拡散方程式を重み付残差法による有限要素法にて離散化して得る。さらに、システムにはガウス型の外乱が加わっているものと見做して、状態ベクトル(汚染物質濃度)と拡散

係数の推定に拡張カルマンフィルタを適用している。

2. 有限要素法による拡散方程式の離散化

2.1 拡散方程式

汚染物質が大気中で稀釈されていく大局的な挙動は、次式で示されるFickの偏微分拡散方程式に支配されていると考えられる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \cdot C = \nabla \cdot (K \cdot \nabla C) + \sum_{m=1}^N Q_m \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) \dots \dots \dots (1)$$

ここでCは汚染物質の濃度、 \mathbf{U} は風速ベクトル、 \mathbf{x} は位置ベクトル、 ∇ はHamilton演算子($\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$)である。 K は次式で与えられるテンソル量であり、大気の乱流による渦拡散の程度を表している。

$$K = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2)$$

Q_m はm番目の汚染源(\mathbf{x}_m)における汚染物質の排出量であり、 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)$ はディラックのデルタ関数である。

境界条件は次の4種類が考えられる。すなわち、境界上で濃度 C_0 が指定される場合、単位法線ベクトルがnである境界面を通過する汚染物質の量 $\hat{J}^n = (-K \nabla C + \mathbf{U} C) \cdot \mathbf{n}$ が指定される場合、境界面を通過する拡散による輸送量 $\mathbf{J}^n = (-K \nabla C) \cdot \mathbf{n}$ が指定される場合。さらに、拡散による輸送量が境界面上で外界と領域内との濃度差に比例する場合その比例定数 \hat{e} と外界濃度 \hat{C} とが与えられた場合： $\mathbf{J}^n \cdot \mathbf{n} = \hat{e} (C - \hat{C})$ とである。

2.2 重み付残差法について

既述の拡散方程式を有限要素法によって離散化するのであるが、その基本である重み付残差法について簡単に述べておく。

L を微分演算子として、領域Vで定義された次の微分方程式を考える。

$$L[\varphi] = 0 \dots \dots \dots (3)$$

この式に任意関数Wを掛けて積分を行なうと、

$$\int_V W \cdot L[\varphi] = 0 \dots \dots \dots (4)$$

を得る。逆に任意の関数Wに対して(4)式が成立するならば、関数 φ は(3)式の解となる。そこで関数 φ を適当な関数系 f_1, f_2, \dots, f_n で展開できるものと仮定し、次のように表現しておく。

* 東京大学生産技術研究所 第2部

** 美容情報センター

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i f_i \dots \dots \dots (5)$$

同様に、 W もまた適当に選ばれた n 個の関数 W_1, W_2, \dots, W_n からなる任意の線形結合で、 $W = \sum_{i=1}^n b_i W_i$ と表し、これらを(4)式へ代入すると、

$$\sum_{j=1}^n b_j \int_V W_j \cdot L \left[\sum_{i=1}^n a_i f_i \right] dV = 0$$

$$\int_V W_j \cdot L \left[\sum_{i=1}^n a_i f_i \right] dV = 0 \dots \dots \dots (6)$$

を得る。ここで b は任意定数であるから、上式より、

となり、これは未定係数 a_i に関する n 元の代数方程式である。これを解いて(5)式へ代入することにより(3)式の近似解 φ を求めることができる。

以上の近似解法は一般に重み付残差法と呼ばれ、関数系 f_i を試行関数、関数系 W_i を重み関数と称している。 W_i として特に f_i 自身を採用したものを Galerkin 法という。

2・3 形状関数

有限要素法による偏微分方程式の離散化においては、考察対象領域を有限個の部分領域に分割する。

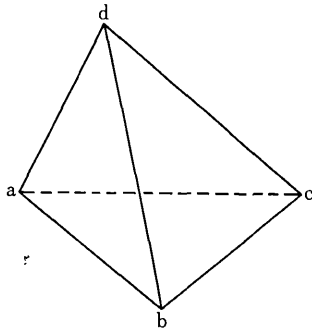


図1 立体要素

そして既述の試行関数 f_i を、この各々の部分領域で、以下に示すように定義される形状関数を重ね合わせたものとして表現する。すなわちここで、3次元問題の場合、領域

が図1に示すような4面体に分割されているものとして、形状関数の具体的な形を求める。

4面体の頂点を節点と呼び、この節点 a, b, c, d における汚染物質の濃度を C_a, C_b, C_c, C_d とし、これらの値によって要素内部の任意点での濃度の値を次式のように内挿近似する。

$$C = N_a \cdot C_a + N_b \cdot C_b + N_c \cdot C_c + N_d \cdot C_d \dots \dots \dots (7)$$

(7)式の中の内挿関数、 N_a, N_b, N_c, N_d は(8)式に示すような、座標 x, y, z の関数であって、これを形状関数という。

$$(N_a, N_b, N_c, N_d) = (1, x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & x_a & y_a & z_a \\ 1 & x_b & y_b & z_b \\ 1 & x_c & y_c & z_c \\ 1 & x_d & y_d & z_d \end{pmatrix}^{-1} \dots \dots \dots (8)$$

(8)式中の x_a, \dots, z_d は4面体の節点の座標値を表す。

ここでは、要素内部の濃度 C を座標の1次関数として近似した結果、形状関数もまた1次式になった訳であるが、有限要素法による微分方程式の近似解の精度は、この形状関数の形と、要素の形とによって大幅に異なるために、各々の問題に適したものが提案されている。

2・4 離散化の手順

拡散方程式をこれまでに述べた方法によって離散化することを考える。ここでは、式の表現の簡便化を計ってテンソル記法を用いる。すなわち、物理量の空間座標に関する成分として添字を用い、式の中の同一の項に同じ添字が繰り返し現われるときは、その添字について和をとるように約束しておく。さらにコンマの後に添字をつけて、その方向への偏導関数を表すものとする。これらの約束に従うと、(1)式は次のように表現される。

$$\dot{C} + U_i C_{,i} = (k_i C_{,i})_{,i} + \sum_m Q_m \delta(x - x_m) \dots \dots \dots (9)$$

ただし、 $\dot{C} \equiv \partial C / \partial t$ である。

(9)式に関数 W を掛けて、一要素内領域で体積分するとガウスの定理を利用して次式を得る。

$$\int_V W \dot{C} dV + \int_V W U_i C_{,i} dV + \int_V W_{,i} k_i C_{,i} dV$$

$$= \int_S W k_i C_{,i} n_i dS + \sum_m \int_V W Q_m \delta(x - x_m) dV$$

ここで W および C を形状関数 N_α で次式のように展開する。

$$W = N_\alpha W_\alpha, \quad C = N_\beta C_\beta$$

これらを上式へ代入して、 W_α が任意の値をとることを考慮すると、

$$A_{\alpha\beta} \dot{C}_\beta + B_{\alpha\beta} C_\beta + D_{\alpha\beta} C_\beta$$

$$= E_\alpha + \sum_m \int Q_m N_\alpha \delta(x - x_m) dV \dots \dots \dots (10)$$

ここで、 $A_{\alpha\beta}$ などは次式で定義される。

$$A_{\alpha\beta} = \int N_\alpha N_\beta dV$$

$$B_{\alpha\beta} = \int N_\alpha N_\beta N_\gamma dV \cdot U_\gamma$$

$$D_{\alpha\beta} = \int k_i N_{\alpha,i} N_{\beta,i} dV$$

$$E_\alpha = \int N_\alpha k_i C_{,i} n_i dS$$

E_α は、4面体の各面を通り抜ける拡散流束を、重み N_α をつけて α 節点に換算したものと解釈され、換算拡散流束と呼ぶことにする。(10)式の時間微分を次のように差分近似する。

$$\dot{C}_\beta = (C_\beta - C_\beta^0) / \Delta t$$

$$C_\beta = \theta C_\beta + (1 - \theta) C_\beta^0$$

ここで C_β^0, C_β はそれぞれ時刻 t および $t + \Delta t$ における濃度を表す。 θ は $0 \leq \theta \leq 1$ なるパラメータで通常 θ

≒0.7程度が用いられる。これらを(10)式へ代入して整理すると、最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\Delta t} A_{\alpha\alpha} + \theta(B_{\alpha\alpha} + D_{\alpha\alpha}) \right\} C_{\alpha} \\ &= \left\{ \frac{1}{\Delta t} A_{\alpha\alpha} + (\theta-1)(B_{\alpha\alpha} + D_{\alpha\alpha}) \right\} C_{\alpha}^{(p)} \\ &+ E_{\alpha} + \sum_m \int_V Q_m N_{\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) dV \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

(11)式は、1つの要素の α 節点における関係式であって、要素方程式と呼び、4面体素については $\alpha = a, b, c, d$ における4つの式を意味している。未知量は C_{α}, E_{α} ($\alpha = a, b, c, d$)の8個であるが、次節で述べるように(11)式を当該領域全体にわたって重ね合わせることににより、境界条件を考慮すると、式の数と未知変数とは一致する。

2・5 全体方程式の作成

要素方程式(11)を、すべての要素について作成したのちこれを重ね合わせて、領域全体の挙動を支配する全体方程式を組み立てる。図に示す都合上、図2のような三角形要素からなる2次元問題を考える。

領域内部の節点 a に着目し、(11)式をすべての要素にわたって和をとる。換算拡散流束 E_a は、 a を節点に持つ要素に関する総和をとることになり、これは E_a が周辺積分で定義されていることから、零となる。境界上

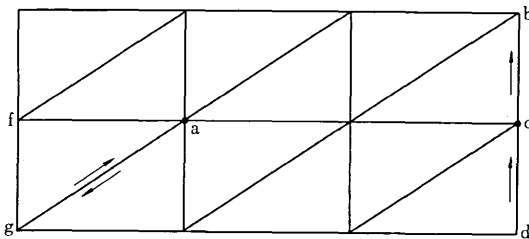


図2 境界の処理

の節点 c では、 E_c の要素に関する総和 $\sum_{\mu} E_c^{\mu}$ は線分 db を通過する拡散物質を c 節点に換算した量になる。

$$\sum_{\mu} E_c^{\mu} = \int_{ab} N_c k_i C_{i, n_i} dS$$

これらの事柄は、3次元問題についても同様に結論される。例えば、図3における領域の内点 d について隣り合う2要素間の境界における相殺効果は、境界面における各々の要素の法線ベクトルが逆向きであることによっている。

このようにして、要素方程式をすべて重ね合わせることににより、全体方程式の中に含まれる未知変数の数は、換算拡散流束が境界を除いて零となるために、著しく減少する。従って、境界条件式を全体方程式と連立させることによって、一意的な解を得ることができるのである。

3. 濃度推定のアルゴリズム

3・1 推定の理論

拡散場を支配する状態方程式(10)は、既に見たように物理的因果律に基準を置いた確定的なシステムとして扱われたものであった。しかしながら、拡散方程式(1)の中に含まれる拡散係数 K は大気の流れの様子に依存しており、従って汚染物質の輸送量を風による輸送量 $\mathbf{J}^u = \mathbf{UC}$ と拡散による輸送量 $\mathbf{J}^d = -(\mathbf{K} \nabla) C$ との和として表した場合、両者の区分は考えている領域のスケールや気象の状況に大きく左右される。しかも汚染濃度の測定値は、瞬時ごとに刻々変動し、測定器の実際の運用ともあいまって、平均値としての値を採用するのが実用的であると考えられる。このような理由から、(1)式に基礎を置いた濃度の推定に際しても、問題を確率過程と見做した統計的予測手法を用いるのが妥当であろう。我々はここに拡張カルマンフィルタを適用するのであるが、その基礎となっている最適推定の理論を簡単に紹介する。

まず次の事柄に着目する。すなわち確率変数 y に対して、 $\epsilon \int (y-a)^2 \cdot Prob(y) dy$ が最小と

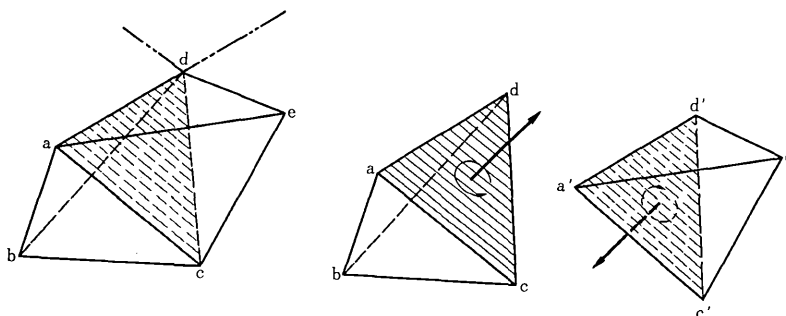


図3 立体要素の場合の境界処理

なる定数 a は

$$a = \varepsilon(y) = \int y \text{Prob}(y) dy$$

となる。ここで $\varepsilon(\)$ は括弧内の変数の平均値を意味し、 $\text{Prob}(y)$ は y についての確率密度関数である。次に確率変数 x の1次関数 $h(x) = ax + b$ により確率変数 y を推定することを考える。 $\varepsilon[|y - h(x)|^2]$ が最小となるような評価基準を採ると、上の事柄から、

$$h(x) = \varepsilon(x|y) = \int y \cdot \text{Prob}(y|x) dy$$

が得られる。ここで $\text{Prob}(y|x)$ は条件 x のもとでの y の条件付確率密度関数を表す。簡単のために $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) = 0$ を仮定すると、 $b = 0$ 、 $a = \varepsilon(x \cdot y) / \varepsilon(x^2)$ で結局次式を得る。

$$y \text{ の最適推定値} = \frac{\varepsilon(x \cdot y)}{\varepsilon(x^2)} \cdot (x \text{ の実現値}) \dots\dots\dots (13)$$

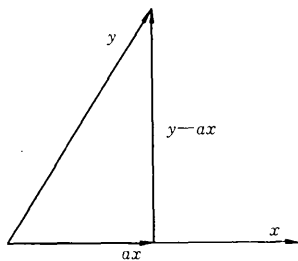


図4 線形推定の幾何学的解釈

次に以上の結果をさらに一般の問題に適用するために(13)式に幾何学的な解釈を与えておく。すなわち確率変数 x, y を各々ベクトルと見做して、その内積を $x \cdot y = \varepsilon(xy)$ 、 x のノルムを $|x| = \{\varepsilon(x^2)\}^{1/2}$

と定義する。自乗平均誤差 e は、 $e \equiv \varepsilon\{|y - ax|^2\} = |y - ax|^2$ となり、この e が最小となるのは図4においてベクトル $y - ax$ と x との内積が零になる場合、つまり直交している場合である。このときの最小自乗平均誤差 e_m はピタゴラスの定理によって、 $e_m = (y - ax) \cdot y$ となる。すなわち(13)式は次のように表現することができる。

$$y \text{ の最適推定値} = y \text{ の } x \text{ への直交射影の實現値} \dots\dots\dots (14)$$

次に平均値が零の n 個の確率変数 x_1, \dots, x_n の実現値を知って、確率変数 y をこれらの1次結合として推定することを考える。 x_1, \dots, x_n によって張られるベクトル空間を $Y(n)$ とすると、その解は次のようになる。

$$y \text{ の最適推定値} = y \text{ のベクトル空間 } Y(n) \text{ への直交射影の實現値}$$

さて、以上の事柄を基礎として、離散値系として表されたシステムについてのカルマンフィルタを導く。すなわち、システム雑音 v_{k+1} 、観測雑音 w_{k+1} の加わったシステム方程式：

$$\text{状態方程式} \quad x_{k+1} = T_{k+1} \cdot x_k + v_{k+1}$$

$$\text{観測方程式} \quad y_{k+1} = B_{k+1} \cdot x_{k+1} + w_{k+1}$$

をもとにして観測値 y_1, \dots, y_{k+1} より状態ベクトル x_{k+1} を推定することを考える。 v_{k+1} と w_{k+1} とはいずれも平均値零の独立なガウス型確率過程であると仮定する。ここで T_{k+1} は $n \times n$ の遷移行列、 B_{k+1} は $l \times n$ の観測行列である ($l \leq n$)。

次のようなベクトル空間を定義する。

$$Y(k) = y_1, \dots, y_k \text{ によって張られるベクトル空間。}$$

$Z(k+1)$ = 観測値 y_{k+1} の $y(k)$ への直交成分 (\tilde{y}_{k+1}) が作る1次元ベクトル空間。

従って $Y(k+1)$ は $Y(k)$ と $Z(k+1)$ との直和空間となり、これらの関係を図5に示す。ここでさらに次のような定義を加える。

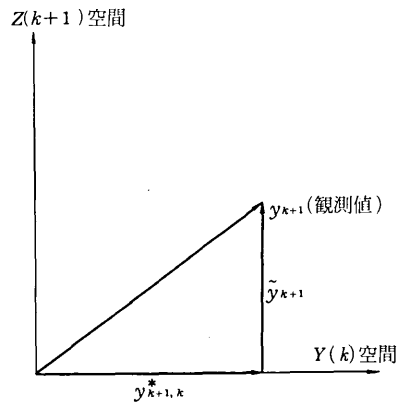


図5 $Y(k)$ と $Z(k+1)$ との直和空間： $Y(k+1)$

* = 直交射影 (最適推定値)

~ = 直交成分 (推定誤差)

$$y_{k+1, k}^* = y_{k+1} \text{ の } Y(k) \text{ への直交射影 } (y_1, \dots, y_k \text{ による } y_{k+1} \text{ の最適推定値})$$

$$\tilde{y}_{k+1} = y_{k+1} - y_{k+1, k}^* ; y_{k+1} \text{ の } Y(k) \text{ への直交成分 (推定誤差)}$$

$$x_{k+1, k+1}^* = x_{k+1} \text{ の } Y(k+1) \text{ への直交射影}$$

$$\tilde{x}_{k+1, k+1} = x_{k+1} \text{ の } Y(k+1) \text{ への直交成分}$$

$$x_{k+1, k}^* = x_{k+1} \text{ の } Y(k) \text{ への直交射影}$$

$$\tilde{x}_{k+1, k} = x_{k+1} \text{ の } Y(k) \text{ への直交成分}$$

これらの関係を図6に示す。図6は図5を拡張したものであるが y_{k+1} は省略している。

ベクトル値確率変数 $x_{k+1, k}^*$ と \tilde{y}_{k+1} との内積を $x_{k+1, k}^* \cdot \tilde{y}_{k+1} = \varepsilon(x_{k+1, k}^* \cdot \tilde{y}_{k+1}^T)$ と定義する (T は転置)。これらの定義によって、ベクトル代数的な考え方から状態推定は次の手順で行われ得ることが容易に示される。

(1) 誤差の共分散行列

$$P_{k+1, k} \equiv \tilde{x}_{k+1, k} \cdot \tilde{x}_{k+1, k}^T = T_{k+1} \cdot P_{k, k} \cdot T_{k+1}^T + R_{k+1}$$

(2) カルマンゲイン

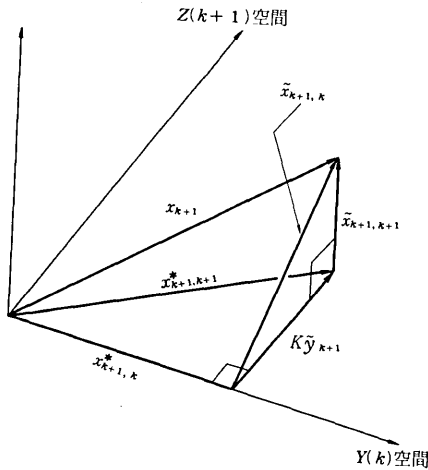


図6 x_{k+1} の推定

$$K = P_{k+1,k} \cdot B_{k+1}^T \cdot (B_{k+1} \cdot P_{k+1,k} \cdot B_{k+1}^T + Q_{k+1})$$

(3) 状態ベクトルの最適推定値

$$x_{k+1,k+1}^* = T_{k+1} \cdot x_{k+1,k}^* + K(y_{k+1} - B_{k+1} \cdot T_{k+1} \cdot x_{k+1,k}^*)$$

(4) 誤差の共分散行列

$$P_{k+1,k+1} \equiv \tilde{x}_{k+1,k+1} \cdot \tilde{x}_{k+1,k+1} \\ = (I - K \cdot B_{k+1}) \cdot P_{k+1,k}$$

ここで、 R_{k+1} はシステム雑音の共分散行列(= $v_{k+1} \cdot v_{k+1}$)で Q_{k+1} は観測雑音の共分散行列(= $w_{k+1} \cdot w_{k+1}$)を表している。

3・2 拡張カルマンフィルタ

既に述べたように、本研究において基礎とする状態方程式(10)は、この中に未知のパラメータとして拡散係数 k_i を含んでいる。そこで状態変数として濃度 C にこの拡散係数をも加えておくことを考える。そうすると(10)式から明らかのように、この場合の状態方程式は、拡大された状態ベクトルに関して2次の非線形方程式になる。従って前項に紹介した線形推定の理論をそのまま利用することができない。我々はここで Athan の導いた非線形カルマンフィルタの結果を用いる。

すなわち、非線形状態方程式: $z = f(z) + v$ とサンプル時刻 t_k における観測方程式: $y_k = H \cdot z_k + w_k$ とを考える。 v と w_k とはそれぞれ平均値が零で共分散が $Q(t)$, R_k のガウス型雑音である。観測と観測との間 ($t_k \leq t \leq t_{k+1}$) の状態推定値 $w(t)$ は、初期条件 $w(t_k) = \hat{z}_k$ のもとに次式が与える。

$$w(t) = f(w(t)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi_i \text{trace}[F_i(w(t)) \cdot S] \dots (15)$$

推定誤差の共分散行列 $S(t)$ は、初期条件 $S(t_k) = \Sigma_k$ のもとで次式を解けばよい。

$$\dot{S}(t) = \tilde{A}(w(t)) \cdot S(t) + S(t) \cdot \tilde{A}^T(w(t)) + Q(t) \dots (16)$$

ここで \tilde{A} は f の Jacobi 行列であり、 F_i は f_i の Hesse 行列を示す。 ϕ_i は第 i 列を1とする単位ベクトルである。観測値が入力された時 ($t = t_{k+1}$) の推定値の更新は次の手順で行われる。先ず荷重行列を次式から求めておく。

$$G_{k+1} = S_{k+1} \cdot H^T [H \cdot S_{k+1} \cdot H^T + R_{k+1}]^{-1} \dots (17)$$

これを用いて、状態推定の更新は、

$$\hat{z}_{k+1} = w_{k+1} + G_{k+1} [y_{k+1} - H w_{k+1}]^{-1} \dots (18)$$

共分散行列の推定の更新は、

$$\Sigma_{k+1} = S_{k+1} - G_{k+1} \cdot H \cdot S_{k+1} \dots (19)$$

さて、離散化された拡散方程式(10)は要素方程式であったが、これを重ね合わせて得られる全体方程式を改めて(10)式とする。すなわちこれ以後添字 α は当該領域の全節点にわたる通し番号を代表するものと見做す。

この(10)式に、拡散係数についての状態方程式として

$$\dot{k}_i = 0$$

を加え、さらにシステム雑音 $v_\alpha(t)$ をこの両式に加えて拡張状態方程式とする。すなわち(15)式に対応して

$$\begin{cases} A_{\alpha\beta} \dot{C}_\beta = -(B_{\alpha\beta} + D_{\alpha\beta}) C_\beta + E_\alpha + Q_m N_\alpha(x_m) \\ \quad + \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} \Sigma \phi_i \text{trace}[A_{\alpha\beta}^{-1} F_i S] \dots (20) \\ k_i = 0 \dots (21) \end{cases}$$

を得る。共分散行列 S は(16)式に従うが、 Φ を $\dot{\Phi} = \tilde{A} \Phi$ を満たす基本行列として次式から求められる。

$$S = \Phi (S_0 + \int_0^t \Phi^{-1} Q \cdot \Phi^T dt) \Phi^T \dots (22)$$

ここで(20)式における F_i は Hesse 行列で、(22)式で利用される \tilde{A} は Jacobi 行列であり、 C と k とからなる拡張状態ベクトルを z として、

$$F_i^{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}, \quad \tilde{A}_\alpha = \frac{\partial f^i}{\partial z_i}$$

のように定義される。

(20)式において、 $\dot{C}_\alpha = (C_\alpha - C_\alpha^{(0)}) / \Delta t$ とし、 $C_\alpha^{(0)}$ および非線形項 $(1/2) A_{\alpha\beta} \Sigma \phi_i \text{trace}[A_{\alpha\beta}^{-1} F_i S]$ を前ステップにおける値であるとする、結局次式が得られる。

$$\begin{cases} (\frac{1}{\Delta t} A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} + D_{\alpha\beta}) C_\beta \\ = \frac{1}{\Delta t} A_{\alpha\beta} C_\beta^{(0)} + E_\alpha + Q_m N_\alpha(x_m) \\ + \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} \Sigma \phi_i \text{trace}[A_{\alpha\beta}^{-1} F_i S] \dots (23) \\ k = k^{(0)} \dots (24) \end{cases}$$

Φ についても同様に差分近似して次式を得る。

$$\frac{1}{\Delta t} \Phi - \tilde{A} \Phi = \frac{1}{\Delta t} \Phi^{(0)} \dots (25)$$

これらの式から、観測と観測との間の状態推定が行なわれる。

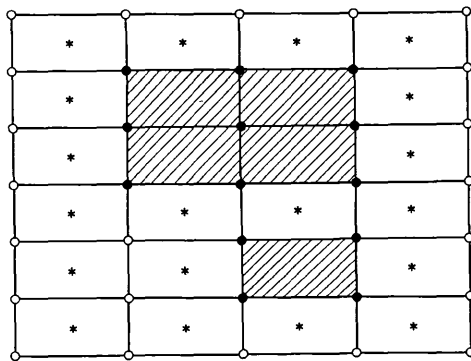
なお観測方程式は、観測点の濃度を形状関数で展開することにより $y = H \cdot C$ を得る。ここで観測行列 H の (i, j) 要素 H_{ij} は $H_{ij} = N_j(x_i, y_i, z_i)$ である。従って

観測時刻 t_{k+1} における推定値の更新は、この H を用いて(17式~(19)式から得られる。

4. プログラム作成上の技術

さて、解析領域を要素で分割し、 n 個の節点が生じたとする。このとき(23)式の中の $A_{\alpha\beta}$ などは n 次の行列となり、(23)式の求解には n 元の連立1次方程式を解かねばならない。この際 $n=500$ を越えるほどの大節点数になると、大型計算機をもってしても計算時間や記憶容量などの点で困難が生じてくる。そこでプログラム作成上の色々な技術が用いられることとなる。(23)式に関しては $A_{\alpha\beta}$ などが零要素の多い(sparse)行列であることを利用したウェイフロント法が用いられる。この方法は最初Ironによって対称行列用に開発されたものであるが、本研究においてはこれを非対称行列用に拡張して利用している。

一方において、共分散行列などフィルタ理論に関係して現われる行列は、sparseでないため、上述の方法を利用することができない。従ってフィルタを適用できる節点に関する自由度数は実用上から $n=100$ 程度となる。そこで当該領域の節点を、フィルタを適用する節点とそうでない節点とに分割し、状態方程式(10)を縮小して処理することにする(図7参照)。



- フィルタ理論を適用する節点
- フィルタ理論を適用しない節点
- //// フィルタ理論を適用する要素
- * フィルタ理論を適用しない要素

図7 フィルタ理論の適用

まず、要素方程式を、フィルタを適用しない領域のみ(図7において*印のついた要素全体)にわたって重ね合わせて全体方程式を作りこれを次式とする。

$$\left(\frac{1}{\Delta t}A'_{\alpha\beta} + B'_{\alpha\beta} + D'_{\alpha\beta}\right)C_{\beta}$$

$$= \frac{1}{\Delta t}A'_{\alpha\beta} \cdot C_{\beta}^{(0)} + E'_{\alpha} + Q'_m N_{\alpha}(x_{\alpha}) \dots \dots \dots (26)$$

上式の濃度 C_{β} は図7において○印のついた節点と、●印のついた節点のうち*要素との境界に在る節点との両方を含んでいる。(26)式を次のように表す。

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (27)$$

C_1 は○印節点、 C_2 は●印節点に関する濃度、 E_2 はフィルタ要素(斜線部)との境界上の節点に関する E_{α} から成っている。 $R_{11} \sim R_{22}$ は $A'_{\alpha\beta}$, $B'_{\alpha\beta}$, $D'_{\alpha\beta}$ より決まる部分行列で、 E_1 , T_1 , T_2 は値が与えられている。(27)式から C_1 を消去すると、

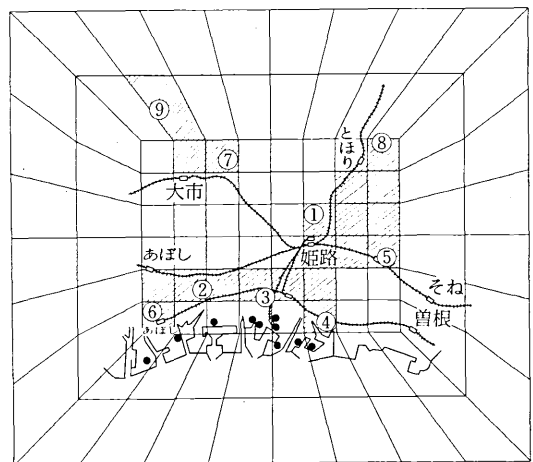
$$(R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12})C_2 = E_2 + T_2 - R_{21}R_{11}^{-1}(E_1 + T_1) \dots (29)$$

となり、これは*印要素と斜線の要素との境界上の節点に関する方程式である。次に斜線を施した要素についての全体方程式をたて、これを既述の(10)式とする。そこで(10)式の E_{α} と、(27)式の E_2 のうちそれに対応する項との和をとれば2.5項により零となる。従って(27)式を利用して(10)式の中の E_{α} をすべて消去することができる。○印節点濃度は●印節点濃度が得られた後(27)式へ代入して求める。

5. 数値計算

これまでに述べた事柄に基づいて、兵庫県姫路市を対象とした硫黄酸化物の濃度分布の予測を行なう。

市全域を含む領域を、東西約28km、南北約24kmとして図8に示すように要素分割を行なう。斜線部はフィルタ理論を適用する領域を示している。鉛直方向は最



- ①-⑨...観測局
- ...主要排出源
- ////...フィルタ適用領域

図8 姫路市要素分割図

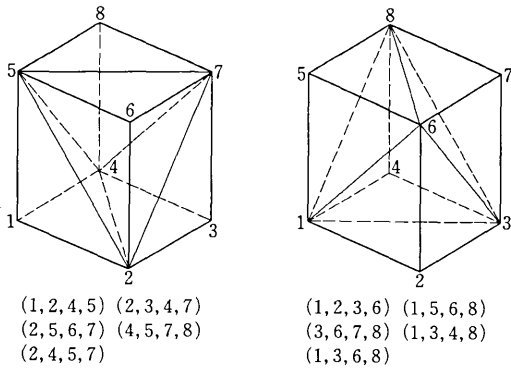


図9 6面体の分割

下層を約340m, 中間層を約690m, 最上層部を約5800mの3層に分割する。この結果, 対象領域は多数の6面体の集合と見做すことができる。1つの6面体は, さらに5つの4面体に分割され, 本節に示した計算例では, 図9のように2通りに分ち, 節点濃度はこの平均を採ることで適合性の向上が計られている。このようにして節点総数476, 要素総数1560に離散化が行なわれた。差分近似のタイムステップは20分を採っている。

汚染源の排出量は, 市の沿岸部に在る主要10工場の個々の排出量を工場の位置と煙突の高さによって適当な位置の節点に割り振ってある。観測局は図8に示すように9個所で, 観測データは昭和48年1月8日のものを利用している。サンプリングタイムは1時間である。図10に示した計算例は, 午前零時からスタートして, 1時間毎4回の観測データによる推定値の更新

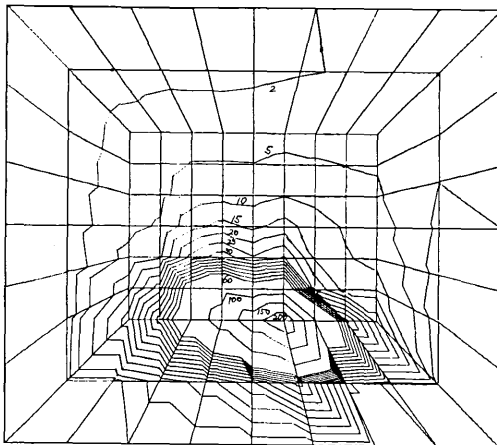


図10-a 午前5時予測分布図

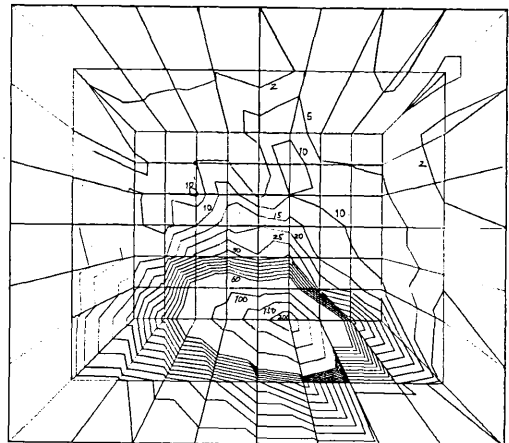


図10-b 午前5時修正分布図

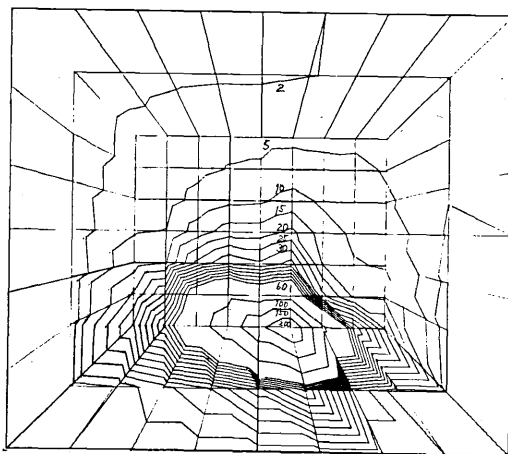


図10-c 午前6時予測分布図

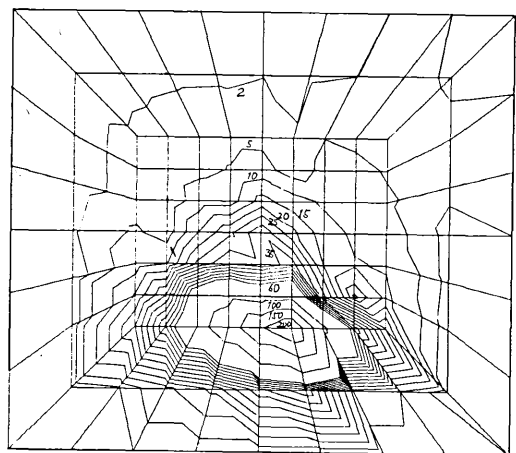


図10-d 午前6時修正分布図

を経た後の、午前5時と6時における濃度予測分布図およびこの時の観測データによる修正分布図を載せた。

使用計算機はHiTAC8800, 計算時間は3分40秒である。

参考文献

- 1) C. C. Shieh: A Generalized Urban Air Pollution Model and Its Application in the ST. Louis Metropolitan Area: IBM Research, 1973
- 2) Jiro Kondo: Atmospheric Pollution by Emission from Automobile Engines: Theoretical and Applied Mechanics Vol 21, 1973
- 3) O. C. Zienkiewicz, C. J. Parekh: Transient Field Problems; Two-Dimensional and Three-Dimensional Analysis by Isoparametric Finite Elements: International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol 2, pp 61-71, 1970
- 4) O. C. Zienkiewicz: The Finite Element Method in Engineering Science: McGraw Hill, 1971
- 5) R. E. Kalman: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems: Trans. ASME, Series D, J. of Basic Eng., 82, pp 35-45, 1960
- 6) R. E. Kalman, R. S. Bucy: New Results in Linear Filtering and Prediction Theory: Trans. ASME, Series D, J. of Basic Eng., 83 pp 95-108, 1961
- 7) M. Athans, R. P. Wishner, A. Bertolini: Suboptimal State Estimation for Continuous Time Nonlinear System from Discrete Noisy Measurements: IEEE Trans. Vol AC-13, pp 504-514, 1968
- 8) 日野幹夫: KALMANの予測推定理論の平易な誘導について: 東工大 土木工学科研究報告, No15, 1973
- 9) 日野幹夫: カルマンフィルタによる大気汚染の予測モデルの開発について: 東工大 土木工学科研究報告, No14, 1973
- 10) 近藤次郎編: 大気汚染: コロナ社, 1975

東京大学生産技術研究所報告 刊行予告

第25巻 6号

岡本 智 著

円筒状低密度ポリエチレン・フィルムのインフレーション条件と低温力学物性に関する研究

(Studies on Inflating Conditions of Low Density Polyethylene Tubular Films and Mechanical Properties at Low Temperature)

この研究は昭和34, 5年のロッケン開発中根本的には解決し得なかったポリエチレン気球の上空破壊防止の本質的解決に関する基礎および応用研究である。

放球予備実験により, ジェット気流中の気球皮膜には脈動的に瞬間高負荷のかかることが判明したが, 皮膜フィルムは異方性が強く, 低温脆化時の二次元伸び不足が憂慮されていた。また, フィルム・メーカーへの成形条件改善の要請も十分には果されなかった。当時インフレーション成形自体がブラック・ボックスの状態にあり, 他方異方性調整の必要性の認識も一般に浅かったかと思われる。

高々度を望む科学観測気球では特に安全性と同時に軽量化を要し, 合理的な上空破壊防止策は皮膜フィルムを等軸化し低温二軸延伸性を与え, その靱性で瞬間の高負荷を吸収緩和する方法が考えられる。このため近似的等軸低温二軸延伸性フィルムを目標に, そのインフレーション条件の基礎的解析を試みた。

製品フィルムの力学的異方性の本質的成形指標として, 簡便な縦横加工比 (Forming Ratio) を導入, 昭和41年以来東大宇宙航空研究所で毎年放球するポリエチレン気球の皮膜フィルムを毎年等軸に近づけ, 当初28%の上空破壊率是对応よく漸減し, 5年後以降零に低下した。またこの予測のついた時点で別途関係4因子を一括した準理想条件の試作成形を実施, 低温二軸延伸性の卓越した近似的等軸フィルムを得, 低温力学物性等を他のフィルムと比較解析して研究考察の妥当性を明らかにした。

(1976年3月下旬発行予定)