

円筒シェルの非線形振動

Nonlinear Vibrations of Cylindrical Shells

皆川洋一*・半谷裕彦*

Youichi MINAKAWA and Yasuhiko HANGAI

1. はじめに

回転シェルに調和外力を作用させた場合、横揺れ(周方向展開次数 $n=1$)の共振振動数が線形理論値より低くなると報告されている¹⁾

柴田は²⁾周方向展開次数 $n=1$ のモードと Brazier 効果による断面形状の陥凹化のモード ($n=2$) の2個の変形モードを仮定し、これら2個のモードの連成という立場で非線形解析を行うことにより、 $\omega_{21}/2(\omega_{21}$ は $n=2$ の最小固有振動数)の振動数を有する $n=1$ の調和外力を作用させた場合、共振することを示した。皆川³⁾は有限要素法に基づいて作成した多自由度の非線形運動方程式を直接数値積分して、柴田の示した結果を確かめた。一方、実験結果は⁴⁾ $\omega_{21}/2$ より低い振動数を持つ調和外力でも共振することを示している。

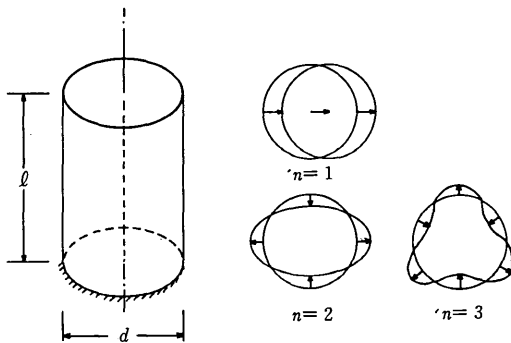


図1 円筒シェルと周方向展開次数

著者らは、有限要素法とモーダルアナリシス法の手法^{5,6)}とを併用することにより、回転シェルの周方向展開次数間の連成による非線形振動を調べるための非線形運動方程式を誘導し⁷⁾得られた基礎式の非線形項を検討することにより、線形理論値より低い振動数で共振する現象をもたらす要因をいくつか挙げ、解析例を

示した^{8,9)}

本論文は、任意の回転シェルに適用出来る非線形運動方程式を導き、各周方向展開次数の最小固有振動モードの連成による高調波共振を解析し、共振振動数の変化を調べたものである。解析例としては、図1に示した円筒シェルを採用している。

2. 基礎式

有限要素として、図2に示す円錐台要素を採用する。曲率および振率変化の非線形項を省略すると、歪一変位関係式は次の様に表わされる。

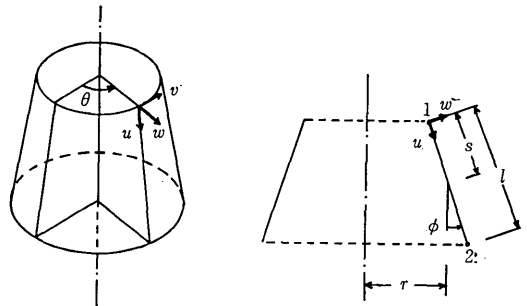


図2 円錐台要素

$$\begin{aligned}
 \epsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \\
 \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \phi + w \cos \phi \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{v}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \cos \phi + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{r} \cos \phi \right)^2 \\
 \gamma_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \sin \phi + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial s} \\
 &\quad - \frac{1}{2r} v \frac{\partial w}{\partial s} \cos \phi \\
 \chi_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\
 \chi_\theta &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \sin \phi
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

* 東京大学生産技術研究所 第5部

$$\chi_{s\theta} = \frac{2}{r} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \phi - \frac{v}{r} \sin \phi \cos \phi \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial s} \cos \phi$$

変位を周方向へフーリエ展開し、 $\theta = 0$ に対して対称変形成分だけを考えたと、

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n \cos n\theta \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} v^n \sin n\theta \\ w &= \sum_{n=0}^{\infty} w^n \cos n\theta \end{aligned} \quad (2 \cdot 2)$$

u^n, v^n, w^n は座標 s の関数であり、ここでは、両端の変位 $u_1^n, u_2^n, v_1^n, v_2^n, w_1^n, w_2^n$ および回転 β_1^n, β_2^n を用いて次の様に補間した。

$$\begin{aligned} u^n &= \zeta_1 u_1^n + \zeta_2 u_2^n \\ v^n &= \zeta_1 v_1^n + \zeta_2 v_2^n \\ w^n &= \zeta_1^2 (1 + 2\zeta_2) w_1^n + \zeta_2^2 (1 + 2\zeta_1) w_2^n + l \zeta_1 \zeta_2 \beta_1^n - l \zeta_1 \zeta_2 \beta_2^n \end{aligned} \quad (2 \cdot 3)$$

ここに、 $\zeta_1 = 1 - s/l, \zeta_2 = s/l$

要素座標系の節点変位と回転を全体座標系に変換し、全体座標系における変位および回転を $\{d_j\}$ で代表させる。

ハミルトンの原理を適用して運動方程式を求めると、最終的には次の様に書ける。

$$\begin{aligned} [M_{ij}] \{\ddot{d}_j\} + [K_{ij}] \{d_j\} + [K_{ij}] \{d_k\} \{d_k\} + [K_{ij}] \{d_l\} \{d_l\} &= \{P_i\} \\ \{d_j\} \{d_k\} \{d_l\} &= \{P_i\} \end{aligned} \quad (2 \cdot 4)$$

(2・4) 式の線形自由振動に対する固有値問題は、マトリクス形式で次の様に表わされる。

$$\omega^2 [M] \{\varphi\} = [K] \{\varphi\} \quad (2 \cdot 5)$$

(2・4) 式の線形項において、異なる周方向展開次数は連成しないから、(2・5) 式の固有値問題は各展開次数について独立に求めることが可能である。各展開次数に分離した固有値問題を次式で表わす。

$$\omega^2 [M^n] \{\bar{\varphi}^n\} = [K^n] \{\bar{\varphi}^n\} \quad (2 \cdot 6)$$

(2・6) 式から得た展開次数 n に対応する固有値および固有ベクトルを、それぞれ $\omega_{nq}, \{\bar{\varphi}^{nq}\}$ (q : 固定した1個の n に対する自由度数) と表わす。ここに、固有値は (2・7) 式を満足するように番号を付け、固有ベクトルは (2・8) 式を満たすように正規化しておく。

$$\omega_{n1} < \omega_{n2} < \omega_{n3} < \dots \quad (2 \cdot 7)$$

$$\{\bar{\varphi}^{nq}\} [M^n] \{\bar{\varphi}^{nq}\} = 1 \quad (2 \cdot 8)$$

(2・6) 式を解いて得られた固有ベクトルは、展開次数 n の成分しか持たない。 n 以外の成分を O として (2・5) 式の有する全自由度に引き伸ばし、(2・5) 式の固有値問題に還元する。その時、固有ベクトル

は次の形を取る。

$$\{\varphi_j^{nq}\} = \{\varphi^{nq}\} = \{0 \dots 0 \bar{\varphi}^{nq} 0 \dots 0\}^T \quad (2 \cdot 9)$$

(2・9) 式で表される固有ベクトルの中から適宜に選択した M 個のベクトルを用いてモーダルマトリクス $[\Phi_{jP}]$ をつくる。ここで、展開次数 n からモーダルマトリクスに採用したベクトルの数を M_n とすると、

$$[\Phi_{jP}] = [\varphi_1^{01} \varphi_2^{02} \dots \varphi_j^{0M_0} : \varphi_1^{11} \varphi_2^{12} \dots \varphi_j^{1M_1} : \dots : \varphi_1^{n1} \varphi_2^{n2} \dots \varphi_j^{nM_n} : \dots] \quad (2 \cdot 10)$$

(j : 全自由度数, $p = 1 \dots M$)

$$\text{ここに, } M = M_0 + M_1 + \dots + M_N \quad (2 \cdot 11)$$

N : 考慮する周方向展開次数の数

(2・10) 式のモーダルマトリクスに対応する一般化座標を $\{X_p\}$ ($p = 1, \dots, M$) とする。

$$\{X_p\} = \{X_{01} X_{02} \dots X_{0M_0} : X_{11} X_{12} \dots X_{1M_1} : \dots : X_{n1} X_{n2} \dots X_{nM_n} : \dots\}^T \quad (2 \cdot 12)$$

(2・10)、(2・12) 式を用いると (2・4) 式の変位 $\{d_j\}$ は次の様に表わされる。

$$\{d_j\} = [\Phi_{jP}] \{X_p\} = \sum_{n=0}^N \sum_{p=1}^{M_n} \{\varphi_j^{np}\} X_{np} \quad (2 \cdot 13)$$

(2・13) 式を (2・4) 式へ代入し、整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{np} + \omega_{np}^2 X_{np} + \sum_{m=0}^N \sum_{n'=0}^N \sum_{q=1}^{M_m} \sum_{r=1}^{M_n} [K_{ij}] \{\varphi_i^{n'p}\} \{\varphi_j^{nq}\} \\ \{\varphi_k^{n'r}\} X_{m'q} X_{n'r} + \sum_{m=0}^N \sum_{n'=0}^N \sum_{q=1}^{M_m} \sum_{r=1}^{M_n} \sum_{s=1}^{M_n} [K_{ij}] \{\varphi_i^{n'p}\} \{\varphi_j^{nq}\} \{\varphi_k^{n'r}\} \{\varphi_l^{n's}\} X_{m'q} X_{n'r} X_{n's} = f_{np} \end{aligned} \quad (2 \cdot 14)$$

ここに、 $f_{np} = \{\varphi_j^{np}\}^T \{P_j\}$

$[K_{ij}]$ および $[K_{ijkl}]$ において周方向展開次数間の連成は、次の関係式が成立する場合に生ずる⁷⁾

$$[K_{ijkl}]: n = |m \pm n'| \quad (2 \cdot 15)$$

$$[K_{ijkl}]: |m \pm n| = |m' \pm n'| \quad (2 \cdot 16)$$

それ故、(2・14) 式における2次の非線形項は、(2・15) 式を満足しない時、恒等的に O となる。同様に、3次の非線形項は、(2・16) 式を満足しない時、恒等的に O となる。

本論文の主題である高調波共振は、固有振動数の整数分の1近くの振動数を有する (主に1/2及び1/3) 調和外力によって引き起される。最小固有振動数より低い調和外力による高調波共振の現象を調べる時、主に問題となるのは、各展開次数に対する最小固有振動数である。本稿では、 $n = 1$ と $n = 2$ 及び $n = 1$ と $n = 3$ の各展開次数に対応する最小固有振動数を有するモードを1個ずつ採用した2自由度のモデルを考え、周方向展開次数間の連成による高調波共振を調べる。この場合、(2・14) 式は次の形の運動方程式となる⁷⁾

研究速報

(1) $n = 1$ と $n = 2$ の連成

$$\begin{cases} (\ddot{X}_{11} + \omega_{11}^2 X_{11} + 2\alpha_1 X_{11} X_{21} + 2\alpha_2 X_{11} X_{21}^2 + \alpha_3 X_{11}^3 = f_{11} \\ (\ddot{X}_{21} + \omega_{21}^2 X_{21} + \alpha_4 X_{11}^2 X_{21} + \alpha_5 X_{21}^3 = f_{21} \end{cases} \quad (2 \cdot 17)$$

(2) $n = 1$ と $n = 3$ の連成

$$\begin{cases} (\ddot{X}_{11} + \omega_{11}^2 X_{11} + 3\alpha_6 X_{11}^2 X_{31} + 2\alpha_7 X_{11} X_{31}^2 + \alpha_8 X_{11}^3 = f_{11} \\ (\ddot{X}_{31} + \omega_{31}^2 X_{31} + \alpha_9 X_{11}^2 X_{31} + \alpha_{10} X_{31}^3 = f_{31} \end{cases} \quad (2 \cdot 18)$$

(2・17), (2・18) 式の定常解を求める手法として, 調和バランス法を適用する. 更に, 調和バランス法を適用して得られた非線形代数方程式の解法としては, 細野¹⁰⁾が静的座屈の解法に開発した弧長法を採用している.

3. 数値解析

解析モデルとして, 一端固定したフタ付きの円筒シェ

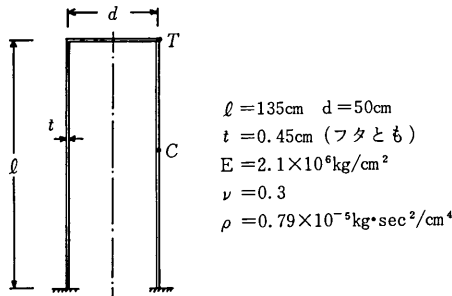


図3 解析モデル

表1 固有振動数

No. n	1	2	3
1	201Hz	315Hz	221Hz
2	377	793	504
3	788	803	879
4	1604	1304	1199
5	1774	1744	1306

ルを採用する. ディメンションを図3に示す.

尚, ここでは, 16分割の有限要素を用いて解析している.

(1) 固有値解析

(2・6) 式に対応する固有振動数および最小固有振動数に対応するモードを, 表1および図4に示す.

得られた固有振動数および固有モードを用いて, (2・14) 式を計算すると, (2・17) および (2・18) 式の各係数は次の様になる.

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= 1.262 \times 10^3 & \omega_{21} &= 1.977 \times 10^3 \\ \omega_{31} &= 1.386 \times 10^3 & \alpha_1 &= -6.97 \times 10^4 \end{aligned}$$

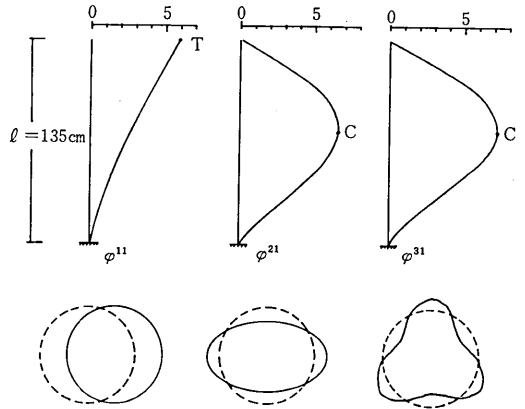


図4 最小固有振動モード

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 5.87 \times 10^5 & \alpha_3 &= 2.97 \times 10^4 \\ \alpha_4 &= 3.80 \times 10^7 & \alpha_5 &= 1.779 \times 10^4 \\ \alpha_6 &= 3.43 \times 10^6 & \alpha_7 &= 4.93 \times 10^8 \end{aligned} \quad (3 \cdot 1)$$

尚, 図5~図8において, 一般化座標 X_{11} の値に5.86を乗じた量が, 図3のT点における実際の変位(cm)である. 同様に, X_{21} および X_{31} にそれぞれ6.66および7.22を乗じた量が図3のC点の変位である. 一般的には, 各 $X_n (n=1, \dots, 3)$ の値に図4で示した各固有ベクトル φ^{n1} の大きさを乗じた量が, 各点の変位(cm)となる.

(2) 横揺れの共振曲線

円筒シェルの横揺れ ($n=1$) の共振曲線を求める. (3・1)の係数を用いると, 運動方程式は次式となる.

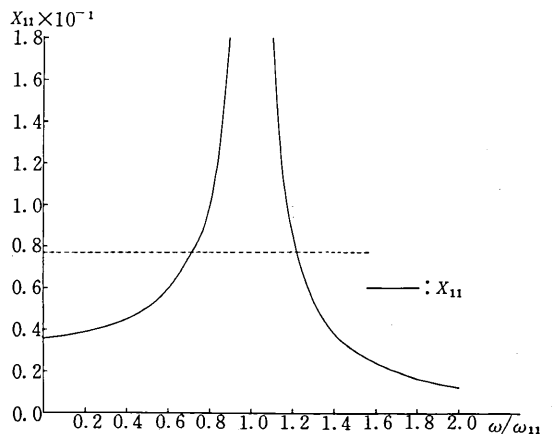


図5 $n = 1$ の線形共振曲線

$$\ddot{X}_{11} + \omega_{11}^2 X_{11} + \alpha_3 X_{11}^3 = f_{11} \cos \omega t \quad (3 \cdot 2)$$

ここで、外力の大きさとして $f_{11} = 6.0 \times 10^4$ を作用させる。外力が静的に作用した時、円筒の最上部 (図3の T 点) での変位は、板厚の 0.49 倍 (0.22cm) である。

α_3 の項を無視した線形振動の共振曲線を図5に示す。図の破線は、図3の T 点の変位が板厚に等しくなる X_{11} を示す。

尚、非線形項を含めた時の共振曲線を計算した結果でも、このモデルの場合、曲線が振動数の高い方へ曲がる **hardening** の特徴および3倍の高調波共振は、ほとんど出現しなかった。

(3) $n = 1$ と $n = 2$ との連成 (その1)

(3・2) 式で扱った解析と同じ調和外力を受けるモデルに、 $n = 2$ のモードを含めて解析する。この場合、運動方程式は次式で表わされる。

$$\ddot{X}_{11} + \omega_{11}^2 X_{11} + 2\alpha_1 X_{11} X_{21} + 2\alpha_2 X_{11} X_{21}^2 + \alpha_3 X_{11}^3 = f_{11} \cos \omega t \quad (3 \cdot 3)$$

$$\ddot{X}_{21} + \omega_{21}^2 X_{21} + \alpha_1 X_{11}^2 + 2\alpha_2 X_{11}^2 X_{21} + \alpha_4 X_{21}^3 = 0$$

(3・3) 式の解を次のように仮定して、調和バランス法を適用する。

$$X_{11} = C_{11} \cos \omega t + C_{13} \cos 3\omega t \quad (3 \cdot 4)$$

$$X_{21} = C_{20} + C_{22} \cos 2\omega t$$

得られた共振曲線を図6に示す。図から $\omega = \omega_{21}/2$ ($\omega/\omega_{11} = 0.79$) 付近で X_{21} が共振することが分かる。

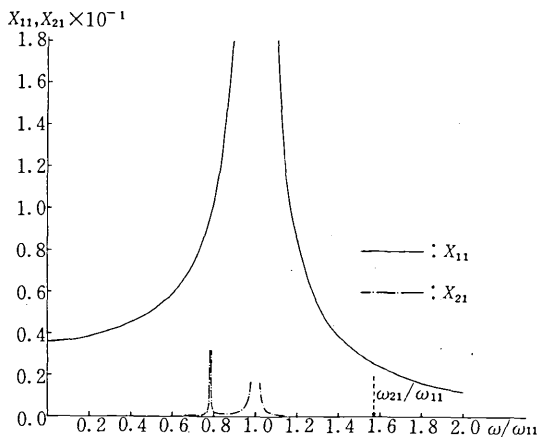


図6 $n = 1$ と $n = 2$ の連成による共振曲線 (その1)

(3・3) の第1式において、 X_{11} は調和外力の振動数 ω と同じ振動数を有する成分を含む。一方 (3・3) の第2式において、 $\alpha_1 X_{11}^2$ の項が存在するため、 ω の振動数を有する X_{11} 成分が定数項と 2ω の振動数を有す

る成分に分解される。それ故、第2式において、 2ω の振動数を有する成分が共振して、 $\omega = \omega_{21}/2$ 付近で共振曲線が立ち上るものと考えられる。なお、 $\omega = \omega_{11}$ ($\omega/\omega_{11} = 1.0$) 付近で X_{21} が立ち上っているのは、 X_{11} が共振して増大するに従い $\alpha_1 X_{11}^2$ の絶対値が大きくなるので、結果的に X_{21} が共振しているように見えるからである。

(4) $n = 1$ と $n = 2$ との連成 (その2)

(3・3) の第2式の右辺に、第1式と同じ調和外力を作用させた場合を考え、外力の変化が共振曲線に及ぼす影響を調べる。この時、運動方程式は次式で表わされる。

$$\ddot{X}_{11} + \omega_{11}^2 X_{11} + 2\alpha_1 X_{11} X_{21} + 2\alpha_2 X_{11} X_{21}^2 + \alpha_3 X_{11}^3 = f_{11} \cos \omega t \quad (3 \cdot 5)$$

$$\ddot{X}_{21} + \omega_{21}^2 X_{21} + \alpha_1 X_{11}^2 + 2\alpha_2 X_{11}^2 X_{21} + \alpha_4 X_{21}^3 = f_{11} \cos \omega t$$

(3・5) 式の解を次のように仮定して、調和バランス法を適用する。

$$X_{11} = C_{10} + C_{11} \cos \omega t + C_{12} \cos 2\omega t + C_{13} \cos 3\omega t$$

$$X_{21} = C_{20} + C_{21} \cos \omega t + C_{22} \cos 2\omega t \quad (3 \cdot 6)$$

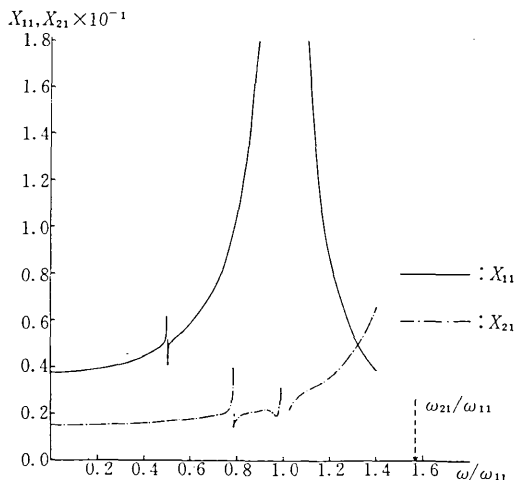


図7 $n = 1$ と $n = 2$ の連成による共振曲線 (その2)

得られた共振曲線を図7に示す。 $\omega = \omega_{11}/2$ ($\omega/\omega_{11} = 0.5$) 付近で X_{11} が共振する。(3・5) の第1式、第2式とも振動数 ω の調和外力が作用している。このため X_{11} 、 X_{21} とも外力と同一の振動数 ω を有する成分を含む。(3・5) の第1式の第3項 ($2\alpha_1 X_{11} X_{21}$) が存在するため、第1式には振動数 2ω を有する成分が生ずることになる。この調和外力の2倍の振動数を有する成分の共振、つまり2倍の高調波共振が $\omega = \omega_{11}/2$ ($\omega/$

研究速報

$\omega_{11}=0.5$)の点で起る。

X_{21} が $(\omega/\omega_{11}=0.79)$ および $(\omega/\omega_{11}=1.0)$ で立ち上る現象は(その1)と同様の理由による。また、 X_{21} の共振曲線が $(\omega/\omega_{11}=1.57)$ に近づくに従って立ち上る。これは X_{21} の線形共振点が $(\omega/\omega_{11}=1.57)$ 付近にあるためである。

(5) $n=1$ と $n=3$ との連成

次式の運動方程式で与えられる $n=1$ と $n=3$ との連成を考える。

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{11} + \omega_{11}^2 X_{11} + 3\alpha_5 X_{11}^2 X_{31} + 2\alpha_6 X_{11} X_{31}^2 + \alpha_3 X_{11}^3 &= f_{11} \cos \omega t \\ \ddot{X}_{31} + \omega_{31}^2 X_{31} + \alpha_5 X_{31}^3 + 2\alpha_6 X_{11}^2 X_{31} + \alpha_7 X_{31}^5 &= 0 \end{aligned} \quad (3 \cdot 7)$$

(3), (4)の解析例では、2次の非線形項が主体的な役割をしていたが、(3・7)式の場合は、3次の非線形項でしか連成しない。

外力として $f_{11}=3.0 \times 10^5$ を作用させた時の共振曲線を図8に示す。

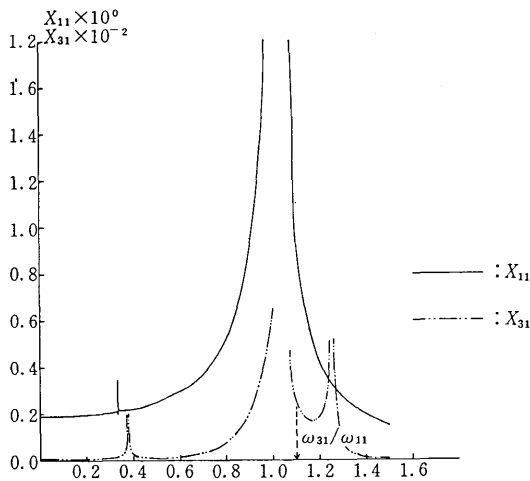


図8 $n=1$ と $n=3$ の連成による共振曲線

X_{11} の曲線は、外力を(2)の解析の5倍としたため、非線形項 $\alpha_3 X_{11}^3$ の影響が現われ、図5の共振曲線と比較して、共振点付近で共振曲線が右へまがるhardeningの傾向が若干観察される。また、同じ項 $(\alpha_1 X_{11}^3)$ による3倍の高調波共振による X_{11} の立ち上りが $\omega = \omega_{11}/3$ ($\omega/\omega_{11}=0.33$)付近で現われる。一方、 X_{11} に含まれる外力振動数と同じ振動数 ω を有する成分が、(3・

7)の第2式の第3項 $(\alpha_5 X_{11}^3)$ により、振動数 ω と 3ω の成分に分解される。このため、(3・7)の第2式には、振動数 ω および振動数 3ω の成分とが含まれる。これらの成分が、それぞれ $\omega = \omega_{31}$ ($\omega/\omega_{11}=1.1$)および $\omega = \omega_{31}/3$ ($\omega/\omega_{11}=0.37$)付近で共振する。図8の共振曲線では、前者の共振点が $(\omega/\omega_{11}=1.25)$ 付近となっている。この原因は、(3・7)の第2式の第4項が X_{11} の剛性を上げる作用をするためと考えられる。また、 $\omega = \omega_{11}$ ($\omega/\omega_{11}=1.0$)付近で X_{31} が立ち上るのは、 X_{11} が共振して $\alpha_5 X_{11}^3$ の項が大きくなるからである。

4. おわりに

円筒シェルの横揺れ(周方向展開次数 $n=1$)の共振振動数が線形理論値より低くなる現象と横揺れが他の周方向展開次数を有する振動を励起する現象とを、回転シェルにおける周方向展開次数間の連成による高調波共振という方面から観察して来た。解析例を通して、 $n=1$ の共振振動数が、このモードの最小固有振動数 ω_{11} の1/2倍または1/3倍となる場合が存在することが示された。また、横揺れのモードによって $n=2$ および $n=3$ のモードの振動が励起することも示された。

(1975年8月22日 受理)

参考文献

- 1) 奥村敦史, 柴田碧, 重田達也; 「模型振動実験」原子炉容器及び配管系の耐震設計法に関する試験研究成果報告書 日本機械学会 昭和44年3月
- 2) 柴田耕一; 断面の楕円化に伴う「円筒殻の非線形振動に関する研究」日本建築学会論文報告集第201号 昭和47年11月
- 3) 皆川洋一; 「有限要素法による回転シェルの動的解析」東京大学修士論文 1974年1月
- 4) 柴田耕一, 角野晃二; 「円筒殻の横揺れ振動に関する研究」日本建築学会 関東支部 研究報告集 昭和48年
- 5) 加藤史郎, 村田賢, 松岡理; 「有限要素・モード重畳法による回転殻の動的非線形解析」日本建築学会論文報告集第227号 昭和50年1月
- 6) T. Kawai; 'Reevaluation of Rayleigh-Ritz's Method in Structural Mechanics' 生産研究Vol. 26 No. 8 1974年
- 7) 皆川洋一, 半谷裕彦; 「回転シェルにおける周方向展開次数の連成について」日本建築学会関東支部研究報告集 昭和50年度
- 8) 皆川洋一, 半谷裕彦; 「周方向展開次数間の連成による円筒シェルの非線形共振」日本建築学会大会学術講演梗概集 昭和50年10月
- 9) 皆川洋一, 半谷裕彦; 「回転シェルの非線形共振解析」第25回応用力学連合講演会 講演論文抄録集 1975年10月
- 10) 細野透; 「弧長法による弾性屈曲問題の解析」東京大学学位請求論文 1974年12月