

工学博士學位論文

『発振系の安定性と雑音』

1971年12月25日

東京大学大学院工学系研究科電子工学専門課程

岡部 洋一

研究は登山に似ている。頂に至る道はあるときは険しく、あるときは満開のお花畑に迎えられる。目前の頂に歓喜することもあれば、ニセの頂上にだまされることもある。こうしてたどりついた頂上から一面の連山が見られることもあるが、ガスと雨に苦しめられることもある。それでも山が楽しいから重いザックも背負って出かけるのだ。

本論文は1968年9月頃より1971年12月頃までの研究をまとめたものである。

目次

	頁
第1章. 総論	1
1.1. 本論文の概要	1
1.2. 本研究の位置と意義	3
第2章. 発振器の特性	5
2.1. 発振器の線形モデル	5
2.2. 発振器の非線形モデル	6
2.3. 微小偏移近似	9
2.4. 発振器の応答特性の反射係数表示	11
2.5. 緩慢な変動に対する準線形発振器の応答特性	15
2.6. 発振器, 負荷の応答特性の測定法	16
第3章. 1台の発振器	20
3.1. 系の微分方程式	20
3.2. 安定性の判定	22
3.3. 緩変化準線形近似における安定性	23
3.4. 測定例との比較	26
第4章. 発振器の注入同期	32
4.1. 注入同期の基本方程式	32
4.2. 注入同期の安定性	35
4.3. 注入同期の大局安定性と過渡現象	37
4.4. 注入同期の測定例	45
第5章. 発振器の雑音	49
5.1. 外乱の種類と雑音の基本方程式	49
5.2. 自由発振系の雑音	50
5.3. 注入同期系の雑音	62

第6章. 多発振器の相互同期系	65
6.1. 多発振器の相互同期系の基本方程式	65
6.2. 対称な相互同期系	71
6.3. 準線形な発振器の相互同期系	77
6.4. Magic-Tによる2台の発振器の相互同期	84
第7章. 相互同期系の雑音	94
7.1. 相互同期系の雑音の基本方程式	94
7.2. 2発振器の相互同期系の雑音	97
7.3. 準線形発振器の相互同期系の雑音	101
7.4. 相互同期系の最少雑音	104
第8章. 結 語	108
謝 辞	111
公表文献	112
参考文献	114
付録 A. 共役, 実部, 虚部 オペレータ	117
B. 応答特性の表現 Z, Y, S, T 間の変換	120
C. 固有解 $D_0, \delta_0(t)$ の性質	125
D. 2発振器の相互同期系の雑音	128

Ⅰ. 総論

1.1 本論文の概要

本論文では発振器の自由発振, 注入同期発振, 相互同期発振について, その安定性や系内の雑音を中心にして, 述べる。つまり発振器をある動作点でできるだけ安定に自由発振させるには発振器を含む系をどのように設計したらよいか, またそのとき発振器から発生する雑音はどのような形になるのか, あるいは他発振器から同期信号が系に注入されたら以上のことがどう変わるかなどについて議論する。さらに多数の発振器を相互に同期させて用いる相互同期系についても同様の議論を行なう。

注入同期は古くから高出力発振器を安定な低出力発振器を用いて安定化させ, その発振周波数のふらつきをおさえたり雑音を減少させる方法として用いられている。特に最近ではマイクロ波帯の固体発振器の安定化の方法としてよく利用されている。この場合高出力発振器としては IMPATT ダイオード, Gunn ダイオードなどがよく用いられ, 同期信号源としては水晶発振器の逡倍波などが使われている。

相互同期系は, 普通出力増大のために利用される。例えば商用周波数で同期発電機を幾台も並列に接続した相互同期系により大出力を得ているが, これはその最もよい例である。マイクロ波帯, ミリメートル波帯でも固体発振器の相互同期動作により出力増強が試みられている。この場合各発振器は同期発電機の場合と異なり, 一般にかなり複雑に結合されていることが多い。さらに光領域のレーザも一種の相互同期系と考えることもできる。レーザでは量子効果がきいてくるので単純に考えることは危険であるが, 常時ポンピングされている原子1個が1台の発振器に対応すると考えられる。

自由発振している発振器の振幅や周波数が負荷変動により

変化すること、あるいは上述の注入同期、相互同期現象などは発振器の非線形性を考慮しないと説明できない。と一言して一般に行なわれている非線形理論を用いるとあまりに理論が複雑になりすぎ、かつ発振器、発振器ごとの各論になりやすくいろいろな発振器に適用するに難しくなる。そこで本論文では“非線形理論を線形化”して問題を単純化し、実際の発振器に比較的容易に適用できる理論を展開する。線形化と言っても発振器特性そのものを線形化するわけではない。つまりある定常な動作点を考え、その動作点を定常値からわずかにずらすと発振器の特性も定常における特性からわずかにずれるが、そのずれ同志の間には、ずれが充分小さければ、線形な関係が成立するはずである(これは発振器の線形性、非線形性によらず成立する。例えば $y=f(x)$ が非線形でも $\Delta y=f'(x_0)\Delta x$ なる線形関係が Δx の小さいときに成立する)。この線形な関係を一種の比例係数的な量で表わせば、発振器の動作点近傍の応答特性は僅かな数の係数によって表わすことができる。

第2章ではこの動作点近傍の非線形素子の応答特性を正確に記述するにはどのようにしたらよいかについて述べる。また発振振幅、周波数の負荷依存性、同期現象の現われるには発振器がどんな特性を持たねばならないかについて考察する。“線形化された非線形理論”では普通定常動作点近傍の現象しか扱えないが、それでも外おしの小さなときの安定性や雑音のような現象については厳密に解析することもできる。また場合によっては大局的な安定性もかなり論ずることができかなり有効な手段である。発振器の特性を表わすにはインピーダンス表示、アドミタンス表示、反射係数表示などいろいろな表示法があるが第2章ではこれらの関係についても述べている。第3章以後はマイクロ波、ミリメートル波帯の発振器に対応づけるのに便利のように反射係数表示を原則として用いた。反射係数表示を用いると発振器の特性は $T_B, T_D(D), T_D'(D)$ の三つの量(その意味は第2章参照)で完全に記述できることが示されるが、これらの量は実験で求めることができる。その方法についても第2章で述べる。

第3章は1台の発振器の自由発振における特性を第2章の結果を用いて述べている。主として安定性に対する議論を行ない

実験との比較を示す。

第4章は注入同期について議論する。この章では同期の安定性のみならず過渡現象についても触れる。その結果従来の同期理論で旨く説明できなかったいくつかの現象を説明している。また実験との比較を示す。

第5章では発振器の雑音の発生のメカニズムとその値の計算を示す。計算は自由発振系, 注入同期系の双方に対して行なっている。計算結果は従来の簡単なモデルによる結果と余り変わらないが厳密な考え方を導入し第7章の導入的な章である。

第6章は相互同期系の解析であり, かなり沢山の発振器のある場合の解析も示す。安定性の条件から相互同期系の設計法について述べる。また2台の発振器を Magic-T で結合した回路については報告されている実験結果との比較を行なう。

第7章では相互同期系の雑音について述べる。特にそれを最少にする系の設計法について述べる。また最少雑音が必要な発振器が独立に発振しているときの雑音よりずっと低くなるという重要な結果を導いている。

第8章は以上の各章の結論を簡単に示す。公表文献, 参考文献, 付録はそのあとにまとめてある。また謝辞は第8章の最後に述べさせて戴く。

1.2 本研究の位置と意義

発振器に関する研究の歴史は古く, 同期発電機などもその一種と考えると, 少くとも50年が経過している。電子管発振器の同期現象に関しては Adler²²⁾ が1946年に注入同期の基本的な性質を説明して以来, いくつかの報告がなされている。近年, マイクロ波帯の固体発振器 IMPATT ダイオードや Gunn ダイオードの出現とともに同期現象が再び注目されるようになり, 特に雑音を減らすという目的で Kurokawa²⁴⁾, Hines et al.³⁰⁾, から始まり大くの研究が成されている。²⁵⁾⁻³⁹⁾ 初期の理論では発振器のモデルとして非常に簡単なものを仮定したため, 色々な現象を説明するには有力であったが, 実際の発振器特性との対応が難しかったがその後の研究でかなり対応が^{17), 26), 39)}つくようになってきた。本論文

ではこれをさらに改良し同期現象のある発振器ならばどんな発振器にでも適用できるような理論を示す。¹⁾ その結果、従来説明されていなかった同期限界の非対称性、ヒステリシス現象についても解釈できるようになった。また発振器雑音の原因となる種々の外乱を正確に表わすことにより発振器雑音の発生のメカニズムその形などについてかなり詳しく知るこゝができた。

相互同期系の理論は変数が多くなるためまだ殆んど未完成の状態であるが、本論文ではかなり多くの現象を説明できる理論を完成したので示す。⁴⁾ この方面の研究に関する報告は極く最近、ミヅ子⁵⁰⁾、Kurokawa⁴⁹⁾ など小数の発表がなされている。しかしいずれも発振器数が少ない場合、あるいは対称性のよい場合に限られている。本論文ではこれらについて述べるだけでなく、さらに一般の発振系についても議論する。

相互同期系の雑音については Schlosser,⁵¹⁾ 池上⁵²⁾ が2台の発振器の相互同期系について解析を行なっている。著者はこれをn台の系に拡張し雑音を最少にする系の設計法、また同じ特性の発振器系では最少雑音はそれぞれの発振器の雑音の $1/n$ になることなどを示した。

相互同期の実験についてはすでにいくつかの報告がなされており10数台の発振器の相互同期系までは少くとも可能である。雑音に関しては注入同期系では相当量の実験データ^{30)~34)}が集積されているが、相互同期系に対してはまた少ない^{50), 51), 53)}。従って本論文の理論も実験的には検証されていない。しかし測定されている範囲の実験データについてはかなりよく説明できることが示される。

以上簡単に本論文の位置と意義について述べたが、特に相互同期系の理論については、今後益々その応用範囲が広がっていくことが期待される。

2. 発振器の特性

多くの発振器は負荷インピーダンスの変化によりその発振周波数や出力が影響を受ける。これらの変動は通常好ましくないものとされているが、逆にそれを利用して発振器を外部から制御することが出来る。本論文で述べる同期現象も発振器のこの性質を利用したものである。本章ではこういった発振器の発振周波数、出力の変動として現われる非線形的な応答特性について述べる。

2.1 発振器の線形モデル

線形理論に現われる発振器は鳳テブテンの定理に基づき定電源と内部インピーダンスで構成されるもの、および負性インピーダンスで表わされるものの二種類がある。

前者は図2.1に示されるように定振幅、定周波数の電源と $Z^0(s)$ なる内部インピーダンスの直列回路で与えられる。 s は複素周波数、肩に付いた O は Oscillator の略、 L は Load の略である。このモデルの発振出力は

$$|E^0|^2 \operatorname{Re}[Z^L(j\omega_0)] / [2|Z^0(j\omega_0) + Z^L(j\omega_0)|^2]$$

で与えられる負荷のインピーダンス $Z^L(j\omega_0)$

を与えるは一義的に定まる。発振周波数は恒に一定の ω_0 となる。このことは発振器に ω_0 と僅かに異なる周波数の波を注入しても同期現象の起まないことを示しており、このモデルが同期現象の解析には不适当であることを示している。

もう一つのモデルである負性インピーダンスモデルとは図2.2に示すように発振器として $Z^0(s)$ なる負性インピーダンスを考える。この発振器が

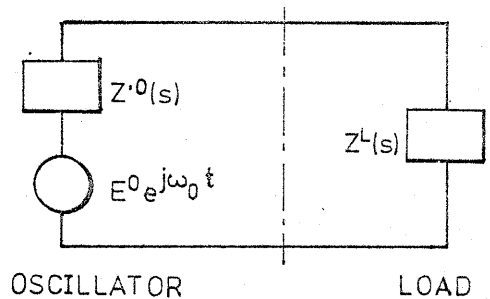


図2.1 定電源と内部インピーダンスで表わされた発振器モデル

周波数 ω_0 で発振する条件は

$$Z^O(j\omega_0) + Z^L(j\omega_0) = 0 \quad (2.1)$$

で与えられる。もし $Z^O(s) + Z^L(s)$ が $s = \pm j\omega_0$ 以外に s -plane の右半平面 (虚軸を含む) に零点を持たなければ、この系には ω_0 以外の定常振動が存在しなくなる。つまり他の周波数の振動は減衰してしまう。この回路で負荷インピーダンスをわずかに変えると式(2.1)の関係が崩れ、別の周波数で式(2.1)が成り立って発振するようになる。つまりこのモデルの発振器は負荷変動により発振周波数に変化する。式(2.1)が成り立つと回路には $|a_0|e^{j\omega_0 t}$ のような定常振動が存在し得るが、その場合 $|a_0|$ は不定である。つまりある振幅で発振している発振器に適当な外乱を加えると別の勝手な振幅の発振に変えることができる。このモデルの発振に別の周波数の同期信号のようなものを加えると ω_0 と同期信号波の周波数とでビートが生じその包絡線は永久に脈動して同期がつかない。つまりこの発振器モデルも同期現象の説明には不適である。

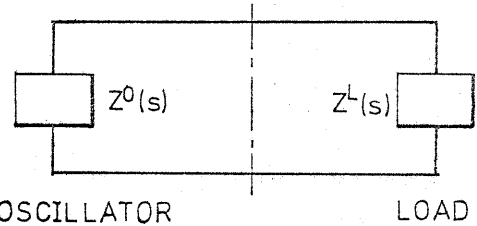


図2.2. 線形負性インピーダンスで表わされた発振器モデル

発振周波数も出力も自己保持する性質を持ち、同期現象も説明できる発振器のモデルは以上に示した線形理論で使われるものでは不適當でありどうしても非線形のものを用いねばならない。

2.2. 発振器の非線形モデル

実在する殆どどの発振器も上述のように非線形な性質を持つ。非線形故に、その振動は本質的に単一スペクトルではない。 ω_0 で発振する発振器は $2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ の高調波を発生し、さらに時にはパラメトリックな効果等のために複雑なスペクトルを持つ。しかし本論文では単一周波数のみを考え、他の周波数成分のことは考えない。他の周波数は適当な定インピーダンスで終端されていてこの議論には関与しないようになっていると考えてよい。このような状態は発振器の前に ω_0 付近のみを通す濾波器を置くことで実現できる。また多くの発振器は High-Q Cavity がついており基本波以外は余り発生しないのでこの条件は容易に満たされていることが多い。

さらに本論文では議論する周波数，出力の近傍で定常インピーダンスが定義できる発振器を扱う。出力のかわりに発振器に流し込む電流の振幅をもってこの条件を言うと次のようになる。つまり議論している周波数 ω_0 ，電流振幅 I_0 の近傍の任意の ω, I を持つ定常電流振動に対し，発振器の複素端子電圧と複素電流の比が存在してかつその値が ω と I のみの関数となつてそれによらないような発振器を考える。このことを式で表わすと

$$\frac{v(t)}{i(t)} = \frac{|v| e^{j\omega t + \theta_v}}{|i| e^{j\omega t + \theta_i}} = f(I, \omega) \quad (\text{定常状態}) \quad (2.2)$$

I は電流振幅であり $|i|$ と θ_i としてもよいが厳密な定義は式(2.3)のように対数振幅となっている。

電子管の解析等で現われる電子アドミタンス Y_e とは丁度式(2.2)の逆数である。また一般に ω_0, P_0 付近でRieke図の測定できる発振器は式(2.2)の形で表わすことができる。しかしあらゆる発振器が式(2.2)の形で表わされるかという点でもない。例えば Isolatorの向う側に ω_0 の発振源を持つものを発振器と考えてみよう。この発振器に $b e^{j\omega t + \theta}$ なる波を注入した場合，発振器からは注入波と関係なく $a e^{j\omega t}$ の波が出てくる。従つて複素電圧と複素電流の比は

$$\frac{v(t)}{i(t)} = \frac{b e^{j(\omega - \omega_0)t + \theta} + a}{b e^{j(\omega - \omega_0)t + \theta} - a} R_0$$

となる。ただし R_0 は線路インピーダンスである。この式の右辺は $\omega \neq \omega_0$ で明らかに ω の関数となり定常インピーダンスが定義できない。(このような発振器も式(2.2)で表わされる発振器の極限として扱うことが可能であるがそれについては後述する)

式(2.2)では $i(t)$ として周波数 ω の定常電流を考えたが次に $i(t)$ が非定常になつた時に式(2.2)の性質を持つ発振器がどのような応答をするかを考える。周波数 ω_0 の近傍の現象を扱うことにすると非定常な電流 $i(t)$ は

$$i(t) = e^{I(t) + j\omega_0 t + j\theta_i(t)} \quad (2.3)$$

と表わされる。ここで $I(t)$ と $\theta_i(t)$ は実変数でありそれぞれ振幅，位相を表わす。振幅 $|i(t)|$ は恒に正であるという条件が自動的に満

足されるよう、また数学的便利さから $I(t) = \log|i(t)|$ なる対数振幅を用いる。式(2.2)で示した定常状態を表わすには式(2.3)で

$$I(t) = I, \quad \theta_I(t) = (\omega - \omega_0)t \quad (2.4)$$

とすればよい。

さて一般に勝手な素子に生じる電圧と電流の比は非定常な電流に対し

$$\frac{v(t)}{i(t)} = f \left(\dots, \iint I(t) dt^2, \int I(t) dt, I(t), \frac{d}{dt} I(t), \frac{d^2}{dt^2} I(t), \dots; \dots, \iint \theta_I(t) dt^2, \int \theta_I(t) dt, \theta_I(t), \frac{d}{dt} \theta_I(t), \frac{d^2}{dt^2} \theta_I(t), \dots; t \right)$$

の形で表わすことができる。しかし定常状態で式(2.2)のように時間には依らない関数になるためには上式の右辺から幾つかの項が取去られなければならぬ。そのためには上式の右辺に式(2.4)を代入してみればわかる。すると $\int I(t) dt, \iint I(t) dt^2, \dots; \theta_I(t), \int \theta_I(t) dt, \dots; t$ の各項が存在すると右辺が時間に依って変化するようになる。従って定常インピーダンスの定義できる共振器の応答特性は

$$\frac{v(t)}{i(t)} = f \left(I(t), \frac{d}{dt} I(t), \frac{d^2}{dt^2} I(t), \dots; \frac{d}{dt} \theta_I(t), \frac{d^2}{dt^2} \theta_I(t), \dots \right) \quad (2.5)$$

で表わされる。

線形素子も任意な周波数に対し定常インピーダンスが存在するので、共振器と同様にその電圧と電流の比は式(2.5)の形で表わされるはずである。抵抗 R の場合は言うまでもなく簡単に

$$\frac{v(t)}{i(t)} = R$$

となる。またインダクタンス L は

$$\frac{v(t)}{i(t)} = L \frac{d}{dt} (e^{I(t) + j\omega_0 t + j\theta_I(t)}) / i(t) = L \left(\frac{d}{dt} I(t) + j \frac{d}{dt} \theta_I(t) + j\omega_0 \right)$$

となり式(2.5)の形に簡単になる。容量 C も式(2.5)の形で表わされるはずであるが、その具体的な形は容易には求まらない。一般に積分演算の入る素子は式(2.5)の具体的な形を求めるのが極めて困難になる。

る。その困難さをのかわかる一つの方法が次節に述べる微小偏移近似である。

2.3 微小偏移近似

定常インピーダンスの存在する発振器や受動素子の応答特性が式(2.5)で与えられることがわかったが、その具体的な形を解析的あるいは実験的に決めることは極めて困難である。そこで本節では微小偏移近似を用いて式(2.5)をもう少し簡単な形に変えてみる。

発振同期の安定性を解析するにはまず周波数 ω_0 、振幅 I_0 の定常発振状態を仮定し、それに小さな外乱が加わった後の $I(t)$ 、 $\theta_I(t)$ の変化のようすを調べる。こゝから再び定常発振のときの値に復帰すればこの発振同期は安定と言え、こゝから発散するようであれば不安定と言え。このような解析では $I(t)$ の I_0 からのずれ $\delta I(t)$ 、あるいは $\frac{d}{dt}(\theta_I(t) + \omega_0 t)$ の ω_0 からのずれ $\frac{d}{dt}\theta_I(t)$ は充分小さいものと考えられる。また発振器の $I(t)$ や $\theta_I(t)$ に現われる雑音の解析の場合にも振幅偏移や周波数偏移は充分小さいものと考えられる。こゝら $\delta I(t)$ や $\frac{d}{dt}\theta_I(t)$ が充分小さいという仮定で、式(2.5)を単純化するのが本節で述べる微小偏移近似である。この近似は上述のような解析には極めて有効であるが、同期のかかる過程や大きな外乱に対する応答特性の解析に用いるにはやや問題がある。

さて振幅や周波数の偏移が微小である時には $\delta I(t) = I(t) - I_0$ 、 $dI(t)/dt$ 、 $d^2I(t)/dt^2 \dots$; $d\theta_I(t)/dt$ 、 $d^2\theta_I(t)/dt^2, \dots$ がいずれも微小量になり式(2.5)はこゝら各項の一次展開までで近似することができ、こゝら各項の二次以上の項、あるいは各項の積などを二次以上の微小量として無視すれば

$$\begin{aligned} \frac{v(t)}{i(t)} &\cong Z_0 + Z_I \delta I(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[Z_D^{(i)} \frac{d^i}{dt^i} \delta I(t) + Z_D'^{(i)} \frac{d^i}{dt^i} \theta_I(t) \right] \\ &= Z_0 + Z_I \delta I(t) + Z_D(D) \delta I(t) + Z_D'(D) \theta_I(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで Z_0 は I_0, ω_0 での定常インピーダンス、 $Z_I, Z_D^{(i)}, Z_D'^{(i)}$ はそれぞれ $\delta I(t)$ 、 $d^i \delta I(t)/dt^i$ 、 $d^i \theta_I(t)/dt^i$ の一次の微係数である。また D は d/dt を表わし、 $Z_D(D), Z_D'(D)$ はオペレータ

$$Z_D(D) = \sum_{i=1}^{\infty} Z_D^{(i)} D^i = \sum_{i=1}^{\infty} Z_D^{(i)} \frac{d^i}{dt^i}, \quad Z_D'(D) = \sum_{i=1}^{\infty} Z_D^{(i)} D^i = \sum_{i=1}^{\infty} Z_D^{(i)} \frac{d^i}{dt^i}$$

である。

式(2.6)で定常インテ-グ-ンズが定義できかつ微小偏移近似の使える時の発振器の応答特性が表わされたが、この式を線形素子に対して適用した場合どのような形になるかを考えてみる。線形素子の特性は良く知られているように複素周波数 s の函数としてインテ-グ-ンズ $Z(s)$ で表わすことができる。この $Z(s)$ を用いると電圧と電流の比は非定常な時

$$\frac{v(t)}{i(t)} = \frac{Z(s) i(t)}{i(t)} = \frac{Z(s) e^{I(t)+j\omega_0 t + j\theta_I(t)}}{i(t)} \quad (2.7)$$

となる。いま $Z(s)$ を $s = j\omega_0$ のまわりで Taylor 展開してみる。

$$Z(s) = \sum_{i=0}^{\infty} Z^{(i)} (s - j\omega_0)^i \quad (2.8)$$

この式を式(2.7)へ代入すると $(s - j\omega_0)^i e^{I(t)+j\omega_0 t + j\theta_I(t)} / i(t)$ という項が出てくるが、この項は次に示すように数学的帰納法を用いて式(2.6)のような形に変形できる(微小偏移近似を用い二次以上の微小量は無視していく)。

$$i=0, \quad (s - j\omega_0)^0 i(t) / i(t) = 1$$

$$i=1, \quad (s - j\omega_0) i(t) / i(t) = \frac{d}{dt} \delta I(t) + j \frac{d}{dt} \theta_I(t) = D \delta I(t) + j D \theta_I(t)$$

$$i=2, \quad (s - j\omega_0)^2 i(t) / i(t) = \frac{d^2}{dt^2} \delta I(t) + j \frac{d^2}{dt^2} \theta_I(t)$$

$$+ \left[\frac{d}{dt} \delta I(t) + j \frac{d}{dt} \theta_I(t) \right]^2 \cong D^2 \delta I(t) + j D^2 \theta_I(t)$$

$$\text{一般に} \quad (s - j\omega_0)^{i-1} i(t) / i(t) = D^{i-1} \delta I(t) + j D^{i-1} \theta_I(t) \text{ のとき}$$

$$(s - j\omega_0)^i i(t) / i(t) = \left(\frac{d}{dt} - j\omega_0 \right) \left[(s - j\omega_0)^{i-1} i(t) \right] / i(t)$$

$$= \left(\frac{d}{dt} - j\omega_0 \right) \left[(D^{i-1} \delta I(t) + j D^{i-1} \theta_I(t)) i(t) \right] / i(t)$$

$$= D^i \delta I(t) + j D^i \theta_I(t) + (D^{i-1} \delta I(t) + j D^{i-1} \theta_I(t)) (D \delta I(t) + j D \theta_I(t))$$

$$\cong D^i \delta I(t) + j D^i \theta_I(t)$$

従って式(2.7)の右辺は次のように変形される。

$$\begin{aligned}\frac{v(t)}{i(t)} &= \sum_{i=0}^{\infty} Z^{(i)} (s-j\omega_0)^i i(t) / i(t) = Z^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} Z^{(i)} [D^i \delta I(t) + j D^i \theta_I(t)] \\ &= Z^{(0)} - Z^{(0)} [\delta I(t) + j \theta_I(t)] + \sum_{i=0}^{\infty} Z^{(i)} [D^i \delta I(t) + j D^i \theta_I(t)]\end{aligned}$$

ここで $Z^{(0)} = Z(j\omega_0)$ であり, また式 (2.8) より $\sum_{i=0}^{\infty} Z^{(i)} x^i = Z(x+j\omega_0)$ である
ことを利用すると最終的結論として次式が得られる.

$$\frac{v(t)}{i(t)} = Z(j\omega_0) + [Z(D+j\omega_0) - Z(j\omega_0)] \delta I(t) + j [Z(D+j\omega_0) - Z(j\omega_0)] \theta_I(t) \quad (2.9)$$

従って式 (2.6) の各項と比較すると

$$Z_0 = Z(j\omega_0), \quad Z_D(D) = -j Z_D'(D) = Z(D+j\omega_0) - Z(j\omega_0), \quad Z_I = 0 \quad (2.10)$$

となる。以上が線形素子の応答特性である。($Z_I = 0$ に注意)

インダクタンス L に対しては

$$Z_0 = j\omega_0 L, \quad Z_D(D) = -j Z_D'(D) = LD, \quad Z_I = 0$$

となり前述の結果と一致する。また先に具体的な展開形式を求める
のが困難であった容量 C についても, 今度は簡単に

$$Z_0 = \frac{1}{j\omega_0 C}, \quad Z_D(D) = -j Z_D'(D) = \frac{1}{(D+j\omega_0)C} - \frac{1}{j\omega_0 C} = \frac{1}{j\omega_0 C} \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{D}{j\omega_0}\right)^i, \quad Z_I = 0$$

と求めることができる。

2.4. 発振器の応答特性の反射係数表示

発振器や受動素子(非線形でも良い)の応答特性が式(2.6)の
形で表わされることがわかった。式(2.6)では比 $v(t)/i(t)$ が電流
振幅 $I(t)$ と電流位相 $\theta_I(t)$ を変数として与えられているが, 全く同じ議
論が比 $i(t)/v(t)$ に対し電圧振幅 $V(t)$ と電圧位相 $\theta_V(t)$ を変数として
成り立つ。さらに $i(t)$ と $v(t)$ の任意の一次結合, 例えは

$$a(t) = [v(t) + R_0 i(t)] / \sqrt{R_0} \quad (2.11)$$

(R_0 : 線路インピーダンス) の振幅 $A(t)$ と位相 $\theta_A(t)$ を変数にして同様な
議論を比 $b(t)/a(t)$ に対して行うこともできる。ただし $b(t)$ は
 $a(t)$ に共役な $i(t)$ と $v(t)$ の一次結合で, $a(t)$ が式(2.11)で与えられ

るときには

$$b(t) = [v(t) - R_0 i(t)] / \sqrt{R_0} \quad (2.12)$$

となる。 $a(t)/b(t)$ の比を $b(t)$ の振幅 $B(t)$ 、位相 $\theta_B(t)$ を変数にして表わすことができることは言うまでもない。式(2.6)に対応する、以上4種類の表現を簡単に次のように表わしておく。

$$\frac{v(t)}{i(t)} = Z_0 + Z_I \delta I(t) + Z_D(D) \delta I(t) + Z_D'(D) \theta_I(t) \equiv Z(I(t), \theta_I(t)) \quad (2.13)$$

$$\frac{i(t)}{v(t)} = Y_0 + Y_V \delta V(t) + Y_D(D) \delta V(t) + Y_D'(D) \theta_V(t) \equiv Y(V(t), \theta_V(t)) \quad (2.14)$$

$$\frac{b(t)}{a(t)} = S_0 + S_A \delta A(t) + S_D(D) \delta A(t) + S_D'(D) \theta_A(t) \equiv S(A(t), \theta_A(t)) \quad (2.15)$$

$$\frac{a(t)}{b(t)} = T_0 + T_B \delta B(t) + T_D(D) \delta B(t) + T_D'(D) \theta_B(t) \equiv T(B(t), \theta_B(t)) \quad (2.16)$$

関数 Z, Y, S, T はそれぞれ(2.1)の式からわかるように振幅と位相の線形微分関数である。特に振幅、位相が式(2.4)で示されるような定常状態を与えるときには、これらの関数は通常の意味での定常インピーダンス、アドミタンス、反射係数、反射係数の逆数になる。従って Z, Y, S, T は言わば「非線形素子の特性をも表現できる動的インピーダンス」である。

一つの素子の応答特性を表わすのに、式(2.13)~(2.16)のような種々の表現方法が与えられているが、これは丁度線形素子の特性を表わすのに $Z(s), Y(s), S(s), T(s)$ (S は T と表わされるこゝが多い、また $T(s) = 1/S(s)$) のような幾つもの表現があるのと同じである。本質的にはみな同じものであるから一つの表現が与えられれば他の表現はそれから導き出すことができるが、その具体的方法は付録Bに示した。

実際の回路解析ではこれらの表現を適当に組合せて用いる。組合せ方には幾通りもあるがそのうち特に有用なる種類について、図2.3に示す発振器1台と負荷との系を例にして議論してみよう。なお発振器側りの諸量には肩に Oscillator の略の O を付け、負荷側りの諸量には肩に Load の略の L をつけ、双方に共通な量にはなにもつけない変数を用いている。その他の記号については式(2.13)~(2.16)および図2.3を参照されたい。

i) インピーダンス表現

変数として $-i^o(t) = i^l(t) \equiv i(t)$ の振幅 $I(t)$, 位相 $\theta_I(t)$ を用いる。
 すると $I^o(t) = I^l(t) = I(t)$, $\theta_I^o(t) + \pi = \theta_I^l(t) = \theta(t)$ だから, 発振器の特性は次式で与えられる。

$$\frac{v^o(t)}{i^o(t)} = Z^o(I^o(t), \theta_I^o(t))$$

$$= Z^o(I(t), \theta_I(t) + \pi) = Z^o(I(t), \theta_I(t)) \quad (2.17)$$

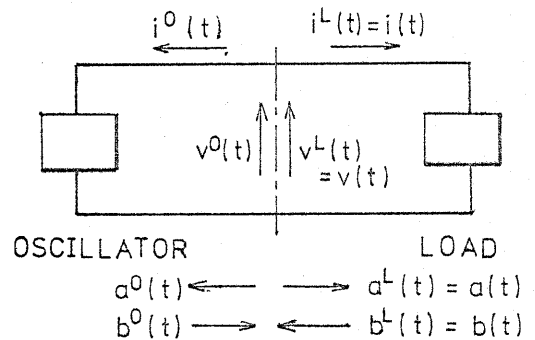


図 2.3. 発振器と負荷の系

また負荷の応答特性は

$$\frac{v^l(t)}{i^l(t)} = Z^l(I^l(t), \theta_I^l(t)) = Z^l(I(t), \theta_I(t)) \quad (2.18)$$

で与えられる。また $v^o(t) - v^l(t) = 0$ より次の平衡条件が得られる。

$$[Z^o(I(t), \theta_I(t)) + Z^l(I(t), \theta_I(t))] i(t) = 0 \quad (2.19)$$

ii) アドミタンス表現

変数として $v^o(t) = v^l(t) \equiv v(t)$ の振幅 $V(t)$, 位相 $\theta_V(t)$ を用い, また $i^o(t) + i^l(t) = 0$ を用いると式 (2.17) ~ (2.19) に対応して次式が得られる。

$$\frac{i^o(t)}{v^o(t)} = Y^o(V^o(t), \theta_V^o(t)) = Y^o(V(t), \theta_V(t)) \quad (2.20)$$

$$\frac{i^l(t)}{v^l(t)} = Y^l(V^l(t), \theta_V^l(t)) = Y^l(V(t), \theta_V(t)) \quad (2.21)$$

$$[Y^o(V(t), \theta_V(t)) + Y^l(V(t), \theta_V(t))] v(t) = 0 \quad (2.22)$$

iii) 反射係数表現

変数として $b^o(t) = a^l(t) \equiv a(t)$ の振幅 $A(t)$, 位相 $\theta_A(t)$ を用いる。この場合 i), ii) のときと異なり発振器に対しては $b^o(t)$ を, 負荷に対しては $a^l(t)$ を用いるため, 応答特性を表わすのに別の表現形式を用いる。発振器に対しては Γ を, 負荷に対しては S を用いる。また平衡条件は $a^o(t) = b^l(t)$ より得られる。

$$\frac{a^o(t)}{b^o(t)} = T^o(B^o(t), \theta_B^o(t)) = T^o(A(t), \theta_A(t)) \quad (2.23)$$

$$\frac{b^L(t)}{a^L(t)} = S^L(A^L(t), \theta_A^L(t)) = S^L(A(t), \theta_A(t)) \quad (2.24)$$

$$[T^o(A(t), \theta_A(t)) - S^L(A(t), \theta_A(t))] a(t) = 0 \quad (2.25)$$

これらの種類の表現の他に、発振器に S を、負荷に T を用いる表現などが考えられる。この表現は負荷を無反射にしたときに $S, T \rightarrow \infty$ となり実用上使いずらい難点がある。その他の組み合わせ方では平衡条件がいたずらに複雑になるのでやはり好ましくない。i) の表現は発振器や負荷が直列回路で表わされるとき有用である(例えば発振器が直列共振回路と非線形抵抗で構成されているような場合)。ii) の表現は並列回路に適している(Klystronの解析結果等は並列共振回路できれいに表わされるのでこの方法が有用である)。iii) の方法は言うまでもなくマイワ口波回路に適している(特にマイワ口波の受動素子がきれいに表わされる)。並列同期運転の解析には結合回路がきれいな形で表わされる方が便利なことが多いため本論文では iii) の反射係数表現を用いる にする。

ここで今までに現れた重要な式を反射係数表現にして列記しておく。

$$b^o(t) = a^L(t) \equiv a(t) \quad (2.26)$$

$$a(t) = e^{A(t) + j\omega_0 t + j\theta_A(t)} \quad (2.27)$$

($A(t), \theta(t)$ は実変数)

$$\text{定常状態: } A(t) = A, \theta_A(t) = (\omega - \omega_0)t \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{a^o(t)}{b^o(t)} &= T^o(B^o(t), \theta_B^o(t)) = T^o(A(t), \theta_A(t)) \\ &= T_o^o + T_B^o \delta A(t) + T_D^o(D) \delta A(t) + T_D^{o'}(D) \theta_A(t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{b^L(t)}{a^L(t)} &= S^L(A^L(t), \theta_A^L(t)) = S^L(A(t), \theta_A(t)) \\ &= S_o^L + S_A^L \delta A(t) + S_D^L(D) \delta A(t) + S_D^{L'}(D) \theta_A(t) \end{aligned} \quad (2.30)$$

図 2.3 の平衡条件は

$$a^0(t) - b^L(t) = [T^0(A(t), \theta_A(t)) - S^L(A(t), \theta_A(t))] a(t) = 0 \quad (2.31)$$

となる。

2.5. 緩慢な変動に対する準線形発振器の応答特性

振う現象が $\delta A(t)$ や $\theta_A(t)$ のゆっくり変化するものであるとき、つまり $D\delta A(t) \ll \delta A(t)$, $D^2\theta_A(t) \ll D\theta_A(t)$ として D の高次の項が無視できる場合には式(2.29)や式(2.30)ではせいぜい D の1次の項まで考えれば充分である。つまり

$$T_D^0(D) \cong T_D^0, T_D^{10}(D) \cong T_D^{10}, S_D^L(D) \cong S_D^L, S_D^{L1}(D) \cong S_D^{L1} \quad (2.32)$$

と近似する。1次の比例係数を各オペレータと同じ記号を用いたが、混乱は生じないと思う(オペレータの場合は D の関数の形になっている)。

この近似は大変有効でありかなり広い範囲に適用することができ。

もう一つの近似は準線形近似である。これは発振器がほぼ線形にみせせる場合の近似である。つまり式(B.12)より、ほぼ線形の素子では

$$T_B^0 \ll 1, T_B^0(D) \cong -j T_B^{10}(D)$$

となるから

$$T^0(A(t), \theta_A(t)) \cong T_0^0 + T_B^0 \delta A(t) + T_D^0(D) \delta A(t) + j T_D^0(D) \theta_A(t) \quad (2.33)$$

と近似する。僅かな T_B^0 を無視してしまうと完全に線形になってしまうから、これは $T_B^0 \ll 1$ の仮定を付け残しておく。

実際の解析で最も良く用いられるのは緩慢な変動と準線形の両方の仮定を入れた近似である。式(2.32)と(2.33)を合わせると

$$T^0(A(t), \theta_A(t)) \cong T_0^0 + T_B^0 \delta A(t) + T_D^0 D(\delta A(t) + j \theta_A(t)) \quad (2.34)$$

となり、発振器の特性が T_0^0 , T_B^0 , T_D^0 の3つの定数で定まってしまう。これらの定数は次節で述べるように定常状態の測定で決定することができ、また(4)故に式(2.34)は発振器の応答特性を表わす式として大変よく用いられる。本論文でも多くの理論は式(2.34)を基礎としている。

負荷側にも同様な近似を用いることができる。負荷側は通常は線形素子を用いるので式(2.34)に対応して

$$S^L(A(t), \theta_A(t)) \cong S_0^L + S_D^L D(\delta A(t) + j\theta_A(t)) \quad (2.35)$$

が使用される。

2.6. 発振器, 負荷の応答特性の測定法

先に示した式(2.13)~(2.16)の応答特性を測定により得る方法を考えてみる。マイクログ波帯の素子と考えると式(2.15), (2.16)の形の応答特性 $S(A(t), \theta_A(t))$, $T(B(t), \theta_B(t))$ が求めやすい。もし残りの形の応答特性が必要なときには記録器に示す方法で変換すればよい。

式(2.15), (2.16)の内の変数で我々が比較的自由に変化することができるものは入射波の振幅 $A(t)$, 位相 $\theta_A(t)$ および比 $a(t)/b(t)$ である。次にこれらについて詳しく述べる。

1) $A(t)$ と $\theta_A(t)$ を変化して $S(A(t), \theta_A(t))$ を求める測定

図2.4に示ような普通のマイクロ波インピーダンスの測定回路を考える。

被測定物が通常の負荷の場合には普通のインピーダンス測定回路になるが、被測定物が発振器のときには信号注入発振器によって同期がかけられているときしか測定できない。しかも多くの場合、発振器は負インピーダンス

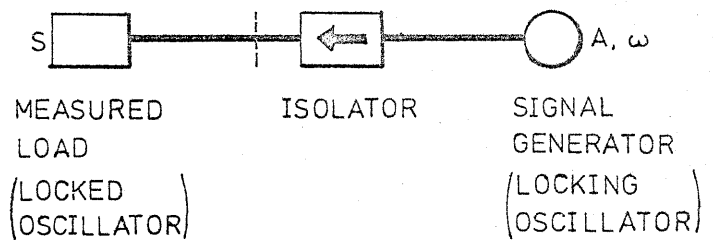


図2.4. 注入信号を用いた応答特性測定

なので入射波より反射波の方が大きくなるため、測定には定在波測定と合わせて入射波 \leq 反射波の判定をする必要がある。信号注入発振器は被測定物の影響を受けないように、単向管の向うに置かれているとする。

まず信号注入発振器を定常運転しておくとその $a(t)$ の振幅, 位相は式(2.28)で与えられる。このとき式(2.15)より

$$\frac{b(t)}{a(t)} = S_0 + S_A(A-A_0) + S_D^{(1)}(\omega-\omega_0) \quad (2.36)$$

が得られる。つまり $A=A_0, \omega=\omega_0$ の定常波で反射係数の測定をすれば S_0 が、また $\delta A=A-A_0, \delta\omega=\omega-\omega_0$ に対する反射係数の変化の

依存性を測定すれば $S_A, S_D^{(1)}$ が求まる。 $S_D^{(1)}$ は $S_D'(D)$ を D で展開したときの第1項である。つまり定常状態の測定だけでは緩慢な変動と準線形近似を仮定したときの式 (2.34) に示すような表式が S_D について得られることがわかる。 $S_D(D)$ および $S_D'(D)$ のもっと高次の特性を知るには定常状態だけの測定ではだめで、 $a(t)$ をいろいろ変化しなければ得られない。例えば $a(t)$ を振幅変調して $A(t)$ が A_0 の付近で変調周波数 Ω で動くようにしてやえ。

$$\delta A(t) = \delta A \cos \Omega t = \operatorname{Re} (\delta A e^{j\Omega t})$$

すると行録 A 式 (A.15) より $b(t)/a(t) = S(t)$ の S_0 周りの変化 $\delta S(t)$ は

$$\begin{aligned} \delta S(t) = & \left\{ S_A + \frac{1}{2} [S_D(j\Omega) + S_D(-j\Omega)] \right\} \delta A \cos \Omega t \\ & + \frac{j}{2} [S_D(j\Omega) - S_D(-j\Omega)] \delta A \sin \Omega t \end{aligned} \quad (2.37)$$

従って変調波と同相の変化分から $S_A + \frac{1}{2} [S_D(j\Omega) + S_D(-j\Omega)]$ が、また直交に変化分から $\frac{j}{2} [S_D(j\Omega) - S_D(-j\Omega)]$ が求まる。これらを加え合わせると $S_A + S_D(j\Omega)$ が得られる。このベクトルの周波数依存性より $S_A + S_D(D)$ の正確な形がわかる。ここで δA は充分小さくなければならぬ。 δA が大きいと $\delta A^2, \dots$ の項がきいてくる。

同様に、 $a(t)$ に位相変調をかけ

$$\theta(t) = \theta_0 + \operatorname{Re} (\delta \theta e^{j\Omega t})$$

とすれば $S_D'(D)$ の正確な形を得ることが出来る。

以上の測定ではかなり速く変化する反射係数を測定しなければならぬ。定在波計を用いて変化する反射係数を測定するには普通の最小-最大法ではだめで、4点法のような定位置測定が必要となる。その出力をシンクロスコープなどで観測し変調波と比較すれば良い。また応答の速いインピーダンス直視装置を用いると楽に測定できる。

2) $a(t)/b(t)$ を変化して $T(B(t), \theta_0(t))$ を求める測定

この方法はいわゆる可変負荷法に対応する。つまり図 2.5 に示すように被測定物が発振器のとき、その負荷を色々変動させて $B(t), \theta_0(t)$ の変化を測定して応答特性を調べるものである。可変定常負荷を用いると Rieke 図を撮ることが出来る。この Rieke 図の B_0, ω_0 で a, T

の値 T_0 の近傍での T の B, ω 依存性を調べると $T_B, T_D^{(1)}$ を知る事ができる。普通 Rieke 図は出力 P と ω で表わされていることが多いが次の関係式により容易に B, ω の図になおす事が可能である。

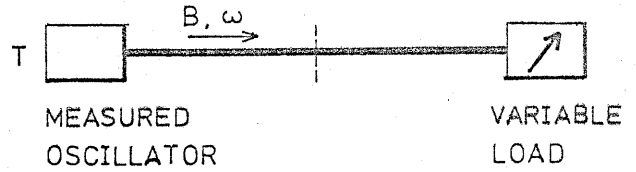


図 2.5. 可変負荷を用いた応答特性測定

$$P = \frac{1}{2}(|b|^2 - |a|^2) = \frac{1}{2}(1 - |T|^2) e^{2B} \quad (2.38)$$

ここで T, B は定常状態での値とする。 $T_D^{(1)}$ および $T_D^{(2)}$ の高次の形を求めるには 1) の場合と同様定常状態の測定からは得られず、可変負荷を時間とともに変化しなければならぬ。つまり $T(t)$ を T_0 から $\delta T \cos \Omega t$ のような変動させて、そのときの $\delta B(t), \delta \theta_B(t)$ の変化を調べる。また δT と方向の異なる向きへ $\delta T' \cos \Omega t$ のように変化させて $\delta B(t), \delta \theta_B(t)$ の変化を調べる。こゝから 2 つの測定結果を用いて式 (2.37) を逆に解くような手法により $T_B, T_D^{(1)}, T_D^{(2)}$ を求める事ができる。詳細については省く。この方法では時間応答の遅い可変負荷を必要とするが、通常の共振器は高い Q の共振器がつけられていると多く応答は遅いので余り問題とはならぬ。例えば可変インピーダンスにバラクタを利用して良い。

1) の方法の欠点は $S_0 \rightarrow \infty$ で誤差が大きくなることである。従って正インピーダンス素子、あるいは T_0 の 0 から離れたところにある負インピーダンス素子の測定に適している。一方 2) の方法は $|T_0| < 1$, つまり負インピーダンス素子の測定しかできない。

なお線形素子に対しては定常的な反射係数 Γ を変えて探り、式 (2.10) のような次の関係式から求める方が楽である。

$$S_0 = S(j\omega_0), S_A = 0, S_D(j\Omega) = -jS_D'(j\Omega) = S(j(\omega_0 + \Omega)) - S(j\omega_0) \quad (2.39)$$

ここで $\Omega = \omega - \omega_0$ である。

また 1) の測定の際 $a(t)$ として振幅変調波、および位相変調波のいわゆる BSB 信号を用いる場合について述べたが、 $a(t)$ として SSB 信号を用いることもできる。つまり $A = A_0, \omega = \omega_0$ のキャリア波にそれと Ω だけ周波数の異なる小さな波を加えると等価的に

$$\delta A(t) = \delta A \cos \Omega t, \quad \theta(t) = \theta_0 + \delta A \sin \Omega t$$

と振幅, 位相に同時に変調をかけたような信号が得られる。式(2.37)と同じような式を立てると, Ω および $-\Omega$ における測定結果を合わせることにより $S_A, S_D(j\Omega), S_D'(j\Omega)$ の得られることがわかる。つまり ω_0 の発振器と Ω 可変の $\omega_0 + \Omega$ の発振器を2台用意して信号源にすれば変調器がなくても応答特性を正確に知ることができるといえる。

前節で述べたように発振器や負荷の特性を式(2.34), (2.35)の緩変化準線形近似で表わしても充分なことが多い。このときは本節の議論でわかるように定常状態の測定だけで充分である。

Rieke 図とは負荷の反射係数面, つまり発振器の逆反射係数 T 面上に定常発振における出力(または B)と ω を記入したものであるから, これを本節 1) または 2) の方法で測定すれば任意の動作点で T_0^o, T_B^o, T_D^o を知ることができるといえる。式(2.34)を用いると Rieke 図 $T(B, \omega)$ からこれらの定数を求める式が次のように得られる。

$$T_0^o = T(B_0, \omega_0), \quad T_B^o = \left. \frac{\partial T(B, \omega)}{\partial B} \right|_{B_0, \omega_0}, \quad T_D^o = -j \left. \frac{\partial T(B, \omega)}{\partial \omega} \right|_{B_0, \omega_0} \quad (2.40)$$

具体的な Rieke 図の測定例については次章以下を参照されたい。

3. 1 台の発振器

まずはじめに 1 台の発振器を適当な負荷に接続した発振系を考えてみる。与えられた振幅, 周波数で発振が継続するには負荷が適当な特性を持っていなければならぬが, それについて理論, 実験の両方から議論してみる。

3.1 系の微分方程式

1 台の発振器が図 3.1 に示されているように, 1 つの負荷に直結されている場合を考えよう。第 2.4 節で示したように発振器の特性は発振器での反射波 $b^o(t)$ の関数としてあらわれ, 負荷の特性は負荷への入射波 $a^L(t)$ の関数として表わすことにすれば, 発振器への入射波 $a^o(t)$ と負荷での反射波 $b^L(t)$ はそれぞれ次のように表わされる。

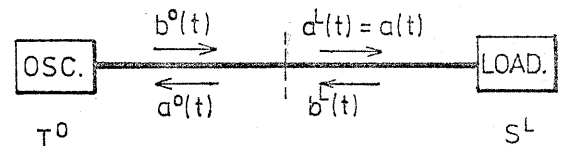


図 3.1. 1 台の発振器の系

$$a^o(t) = [T_o^o + T_o^o S_B^o(t) + T_o^o(D) S_B^o(t) + T_o^o(D) \theta_o^o(t)] b^o(t) \quad (3.1)$$

$$b^L(t) = [S_o^L + S_A^L S_A^L(t) + S_D^L(D) S_A^L(t) + S_D^L(D) \theta_A^L(t)] a^L(t) \quad (3.2)$$

さて

$$b^o(t) = a^L(t) \equiv a(t) \quad (3.3)$$

なる $a(t)$ の振幅, 位相を $A(t)$, $\theta(t)$ で表わすと式 (3.1), (3.2) の右辺は同じ変数 $A(t)$, $\theta(t)$, $a(t)$ で表現することができ。

図 3.1 よりもう一つの等式

$$a^o(t) = b^L(t) \quad (3.4)$$

が得られるが、これを平衡条件として式(3.1), (3.2)を代入すると

$$\begin{aligned} & [T_0^0 + T_B^0 \delta A(t) + T_D^0(D) \delta A(t) + T_D^{10}(D) \theta(t)] a(t) \\ &= [S_0^L + S_A^L \delta A(t) + S_D^L(D) \delta A(t) + S_D^{1L}(D) \theta(t)] a(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$a(t) \neq 0$ であるから、これから $\delta A(t)$, $\theta(t)$ に対し次の微分方程式が得られる。

$$S_0 + S_A \delta A(t) + S_D(D) \delta A(t) + S_D'(D) \theta(t) = 0 \quad (3.6)$$

ここで $S_*^L - T_*^0 = S_*$ と記した。つまり

$$S_0 = S_0^L - T_0^0, \quad S_A = S_A^L - T_B^0, \quad S_D(D) = S_D^L(D) - T_D^0(D), \quad S_D'(D) = S_D^{1L}(D) - T_D^{10}(D) \quad (3.7)$$

である。いま

$$B^0(t) = A^L(t) = A_0, \quad \theta_B^0(t) = \theta_A^L(t) = \text{const.} \quad (\omega = \omega_0)$$

で系は定常的な平衡状態にあるものとするとき式(3.6)より

$$S_0 = 0 \quad (3.8)$$

が得られる。つまり考えている振幅 A_0 , 周波数 ω_0 で系が定常的に平衡するためには、そのときの発振器の定常逆反射係数 T_0^0 と負荷の定常反射係数 S_0^L は等しくなければならぬことが結論される。これは第2章の第2.1節で述べた線形負性インコ-グ-7モデルのときの平衡条件式(2.1)に対応するものである。

式(3.8)が成立すれば A_0, ω_0 での発振がこの系で継続し得ることばかりでなく、その発振が安定かどうか、つまり外乱が加わっても発振が同じ A_0, ω_0 の発振に戻るかどうかはさらに動的な特性を調べなければならぬ。つまり $\delta A(t)$, $\theta(t)$ に対する微分方程式が必要となる。この微分方程式は式(3.6), (3.8)よりただちに得られる。

$$[S_A + S_D(D)] \delta A(t) + S_D'(D) \theta(t) = 0 \quad (3.9)$$

この式を解いて、外乱の加わった後 $\delta A(t) \rightarrow 0$, $\theta(t) \rightarrow \text{const.}$ となることを示すにはこの発振は安定に継続することを示さねばならない。変数は $\delta A(t)$, $\theta(t)$ と2個あるのに微分方程式は式(3.9)と1本しか与え

られていない。しかし、実はこの2変数が実数であることを利用すると式(3.9)を実部、虚部の2本の式にすることができる、方程式数と変数の数は一致する。付録Aの式(A.8), (A.9)にもとづいて2式に分解すると

$$[S_A + S_D(D)]^R \delta A(t) + [S_D'(D)]^R \theta(t) = 0$$

$$[S_A + S_D(D)]^I \delta A(t) + [S_D'(D)]^I \theta(t) = 0$$

が得られる ($[]^R, []^I$ は付録Aを参照)。行列で表示すると、

$$\begin{pmatrix} [S_A + S_D(D)]^R & [S_D'(D)]^R \\ [S_A + S_D(D)]^I & [S_D'(D)]^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

という線形微分方程式が得られる。

3.2. 安定性の判定

系の振幅や位相の動的な変化を記述する基本的な微分方程式が得られたので次に式(3.10)から共振の安定性を判定する方法について考える。

線形微分方程式の解は良く知られているように

$$\sum_i c_i e^{D_i t} \quad (3.11)$$

で与えられる。ここで D_i は線形微分方程式の特性方程式の根である。(D_i が重根のときは、式(3.11)に多少の補正が必要となるが余り本質的な問題ではないので詳しくは述べない。) 式(3.10)の特性方程式は良く知られているように

$$\begin{vmatrix} [S_A + S_D(D)]^R & [S_D'(D)]^R \\ [S_A + S_D(D)]^I & [S_D'(D)]^I \end{vmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

あるいは行列式を計算して(付録A参照)

$$\{ [S_A + S_D(D)] [S_D'(D)]^c \}^I = 0 \quad (3.13)$$

で与えられる。 $S_D'(D)$ が D の1次の項から始まる D の級数であることを

考えると式(3.13)は必ず $D=0$ という根を持つことがわかる。しかも式(3.10)からわかるように、その $D=0$ の根は $\theta(t)$ と関係している。

安定な発振とはすでに述べたように、余り大きくない外乱を受けた後 $A(t)$, ω が再び A_0, ω_0 に収束する。つまり

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta A(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} D\theta(t) = 0 \quad (3.14)$$

と表わすことができる。ここで注意しなければならないのは $\theta(t)$ は必ずしも 0 に収束する必要のないことである。従って式(3.13)は $\theta(t)$ に関連する $D=0$ の根を一つは持つことも良いことがわかる。しかし式(3.14)から $D=0$ の根を二つ以上持つてはならない。この $D=0$ の根を D_i と表わしておく。さて式(3.11)と式(3.14)を見比べると t は常に次のことが言える。

$$\operatorname{Re}(D_i) < 0 \quad (\text{for } i=2, 3, \dots) \quad (3.15)$$

つまり式(3.13)の自明な根 $D_1 (=0)$ を除くすべての根が式(3.15)の条件を満たすことが 安定な発振 の条件である。

3.3 緩変化準線形近似における安定性

先に第2.5節で検討したような緩変化準線形近似が使える場合、つまり T^0, S^L が式(2.34), (2.35)で表わされるときは式(3.10), (3.13)は簡単に次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} S_A + \operatorname{Re} S_D \cdot D & -\operatorname{Im} S_D \cdot D \\ \operatorname{Im} S_A + \operatorname{Im} S_D \cdot D & \operatorname{Re} S_D \cdot D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$\operatorname{Re}(S_D^* S_A) D + \operatorname{Re}(S_D^* S_D) D^2 = 0 \quad (3.17)$$

式(3.17)の根は

$$D_1 = 0, \quad D_2 = -\frac{\operatorname{Re}(S_D^* S_A)}{\operatorname{Re}(S_D^* S_D)} = -\frac{\operatorname{Re}(S_D^* S_A)}{|S_D|^2} = -\operatorname{Re}\left(\frac{S_A}{S_D}\right) \quad (3.18)$$

となる。ここで D_1 は自明な根である。 D_2 は式(3.15)へ代入すると

$$\operatorname{Re}\left(\frac{S_A}{S_D}\right) > 0 \quad (3.19)$$

が安定な発振の条件として得られる。

負荷が始ると一定のインピーダンスのときには S_A^L, S_D^L が T_0, T_0 に対して無視できるから式(3.19)は

$$\operatorname{Re} \left(\frac{T_0}{-T_0} \right) > 0 \tag{3.20}$$

のように表わすことができる。これを Rieke 図と比較して表わすと式(2.40)を参考にして、図3.2のように $\partial T^0 / \partial \omega$ が $\partial T^0 / \partial B$ のベクトルに対し左の方を向いているとき安定という結果が得られる。

図3.2の安定性判定は Nyquist の判定条件からも得られる。例えば $B = B_0$ で $T^0(B, \omega)$ の Nyquist Path を画くとそれは $\omega = \omega_0$ で必ず負荷点 T_0 を通るはずである。今 $B < B_0$ に何かの外乱して T_0 をたたく。その B に対する Nyquist Path が図3.3に示すように T_0 を右に見てまわるとすると系は不安定になり発振振幅 B は増大しはじめ B は再び B_0 へ向う。逆に外乱により $B > B_0$ なるある B になったときその Nyquist Path が T_0 を左に見てまわるとすれば系は安定化し発振

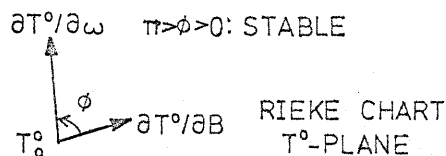


図3.2. Rieke図上の安定性判定

振幅は減小しはじめ、やがてやはり B_0 へ向う。つまり図3.3のように Nyquist Path が通かれるときは発振が安定になる。図3.3とは逆に $B < B_0$ に対する Nyquist Path が T_0 の右に、 $B > B_0$ に対して T_0 の左にくるようになるときは、外乱によって T_0 をたたく B はその後ますます B_0 から離れていくようになり発振は不安定になる。図3.3の関係を言い換えると図3.2の関係になっていることがわかる。以上 Nyquist の判定条件からも同じような結論の得られることを示したが、もとの状態に復帰する時定数などは Nyquist の条件からは求めることができない。

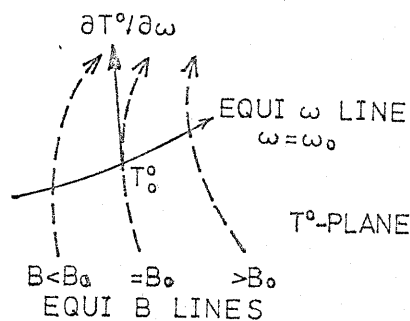


図3.3. Nyquist Path による判定

偏移 $\delta I, \omega - \omega_0$ が小さいときそのインピーダンスが

$$Z^0(I, \omega) \cong -(R_0 + R_I \delta I) + 2j\omega R_0 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \tag{3.21}$$

で表わされるような発振器を考えてみる。この発振器モデルは

$R_I > 0$ のとき コンダクタンスが 振幅と共に飽和する いわゆる n 形負性抵抗を示し, $R_I < 0$ のとき 抵抗飽和の いわゆる s 形負性抵抗を示す. またリアクタンス部は タンク回路の特性を示し $Q > 0$ のとき 負性抵抗に直列共振回路をつけた状態に対応し, $Q < 0$ のとき 負性抵抗と並列に並列共振回路をつけた状態に対応する. このような定常インピーダンスを持つ共振器を R_0 の負荷に接続する場合を考える. まず定常逆反射係数は $R_I \ll R_0$ とし $\delta B \cong \delta I$ であるから

$$T^0(B, \omega) \cong \frac{R_I}{2R_0} \delta B - jQ \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \tag{3.22}$$

となる. 以下より

$$T_0^0 = 0, \quad T_B^0 = \frac{R_I}{2R_0}, \quad T_D^0 = -\frac{Q}{\omega_0}, \quad T_D^{10} = -j \frac{Q}{\omega_0} \tag{3.23}$$

が得られる. これらを式 (3.20) へ代入して共振の安定性を調べると表 3.1 に示すような良く知られた結果が得られる. 以上の解析ではタンク回路を共振器の一部としたが, タンク回路を負荷として考えても式 (3.19) を用いれば同じ結果が得られる.

タンク回路 負性抵抗	直列共振回路	並列共振回路
	$Q > 0$	$Q < 0$
n 形 $R_I > 0$	不安定	安定
s 形 $R_I < 0$	安定	不安定

表 3.1. 負性抵抗の形とタンク回路

本論文に述べる理論は上記のようにならざるを共振器と考え, ならざるを負荷と考えても良いことが特長となっている. 従って議論とする開口あるいは参照面としては使うのに最も便利なところを採れば良い. このことは第 3.2 節で述べた D の高次の項まで考えた判定法については厳密に成り立つ (証明は省く). しかし本節で述べた緩変化する線形近似を用いると非線形の程度が余り大きな共振器については成り立たなくなる. 例えば上記の例で $R_I \approx R_0$ となるとタンク回路を共振器に入れるか負荷に入れるかで D_2 の値が変化してきて安定性の判定条件も狂ってしまふ. この場合にも D の高次の項まで考え厳密に計算すれば D_2 が一定値として求まり, 安定性の判定も不変となる.

以上の安定性の解析は T^0, S^L 表示を用いて行なったが, インピーダンス表示, アドミタンス表示を用いても同様にできる. これらいくつかの表示間の互換性についても D の高次の項まで考えれば完全に成り立つが

緩変化準線形近似では非線形の程度が小さいときにしか成り立たない。非線形の程度の小さいことは T^0, S^L 表示では

$$|S_A| \lesssim 1 \quad (3.24)$$

で表わされる。従って $|S_A| \gtrsim 1$ になると式 (3.19) の判定を用いることは危険になり、より厳密な式 (3.13), (3.15) の判定を用いる必要が生じてくる。

3.4. 測定例との比較

以上本章で述べた理論を 10GHz 帯の反射形 フライストロンを用いて実験的に確かめてみよう。

測定は 10GHz 帯のフライストロン (2K2S) を次の動作点で用いて行った。

カソード電圧 250V, カソード電流 約 25mA, リペラ電圧 約 250V

図 2.5 に示した可変負荷法を用いて測定した Rieke 図を図 3.4, 3.5 に示す。両図では発振器の後方可変短絡板の位置が変えてあるため $T_0^0 = 0$ における $b^0(t)$ の振幅 B , 周波数 $\omega/2\pi$ が異なっている。図中実線で等 ω 線も、また破線で等 B 線を示した。周波数はパルス計数器 (ビート形) で直接測定し、また B は発振器と負荷の間に方向性結合器を入れ $b^0(t)$ をとり出した後、バレットにより測定した (従って図中 B は電力の単位 dBm で示してある)。発振器の T^0 , つまり負荷の反射係数はインピーダンス直視装置と XY レコーダを直結し直接記録した。そのため等 B 線, 等 ω 線のまわりの微妙な点まで測定することができた。可変負荷は Sliding Screw とターミナル負荷により構成されているが、その周波数特性 S_d^L は発振器の周波数特性 T_0^0 に比し大きいところでも 1/10 程度しかなく事実上無視してさしつかえないことが確認されている。従って前節のように $\partial T^0/\partial B$ と $\partial T^0/\partial \omega$ のみで系の安定性が議論できる。

図 3.4 または 3.5 を見ると Rieke 図の測定されている殆んど全域で式 (3.19) の判別式, あるいは図 3.2, 3.3 に示した関係式が成立している。ただし図 3.4 の右下あたりだけは例外になっている。この領域では実は $|S_A| \gtrsim 10$ にもなっており式 (3.24) が満たされていない。従って、このように $|S_A|$ の大きな領域では Rieke 図だけで議論する

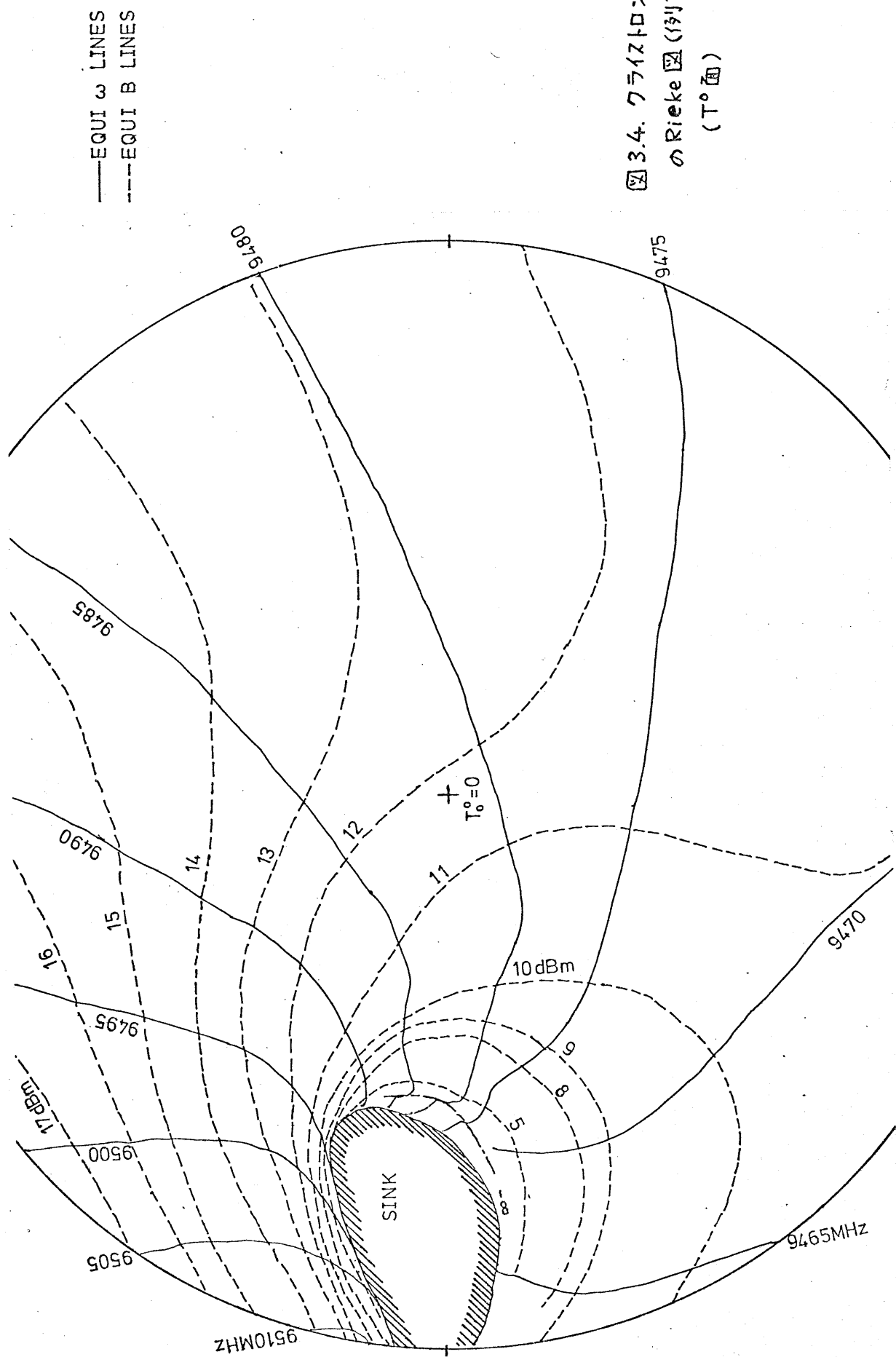
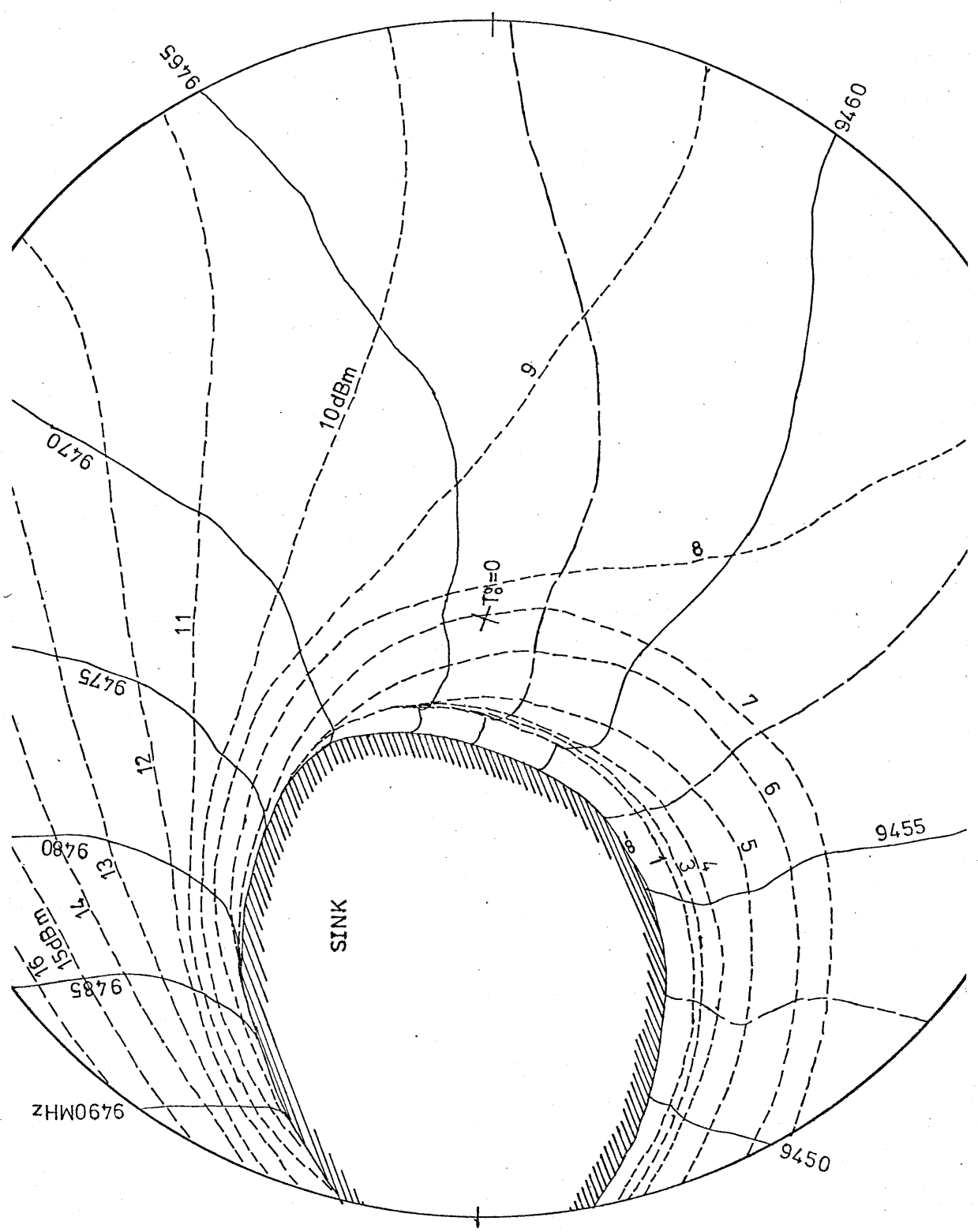


図3.4. クライストロン
 のRieke図(例1)
 (T°面)

— EQUI ω LINES
 - - - EQUI B LINES

図 3.5.7 ライストロンの Rieke 図 (例 2) (T°面)



緩変化準線形近似は用いられないことがわかる。このわずかな領域を除けば式(3.19)の判定式は確かに正しいようである。特に両図の Sink 領域の上縁

を見ると図 3.6 (a) のような図形が現われているが、この辺では明らかに式(3.19)の式で安定性が決っている。図 3.6 (a) では Sink 領域のへりて $b^0(t)$ はある振幅を持つ。(図 3.4, 3.5 の Sink 領域の下縁では $b^0(t) = 0$

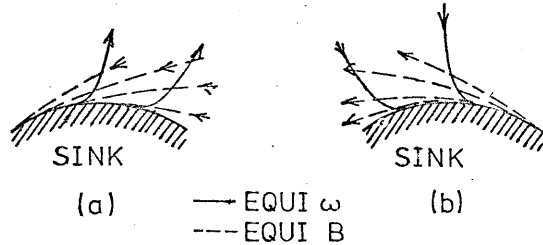


図 3.6 Sink の上縁の等 ω 線, 等 B 線 (a) とその延長線図 (b)

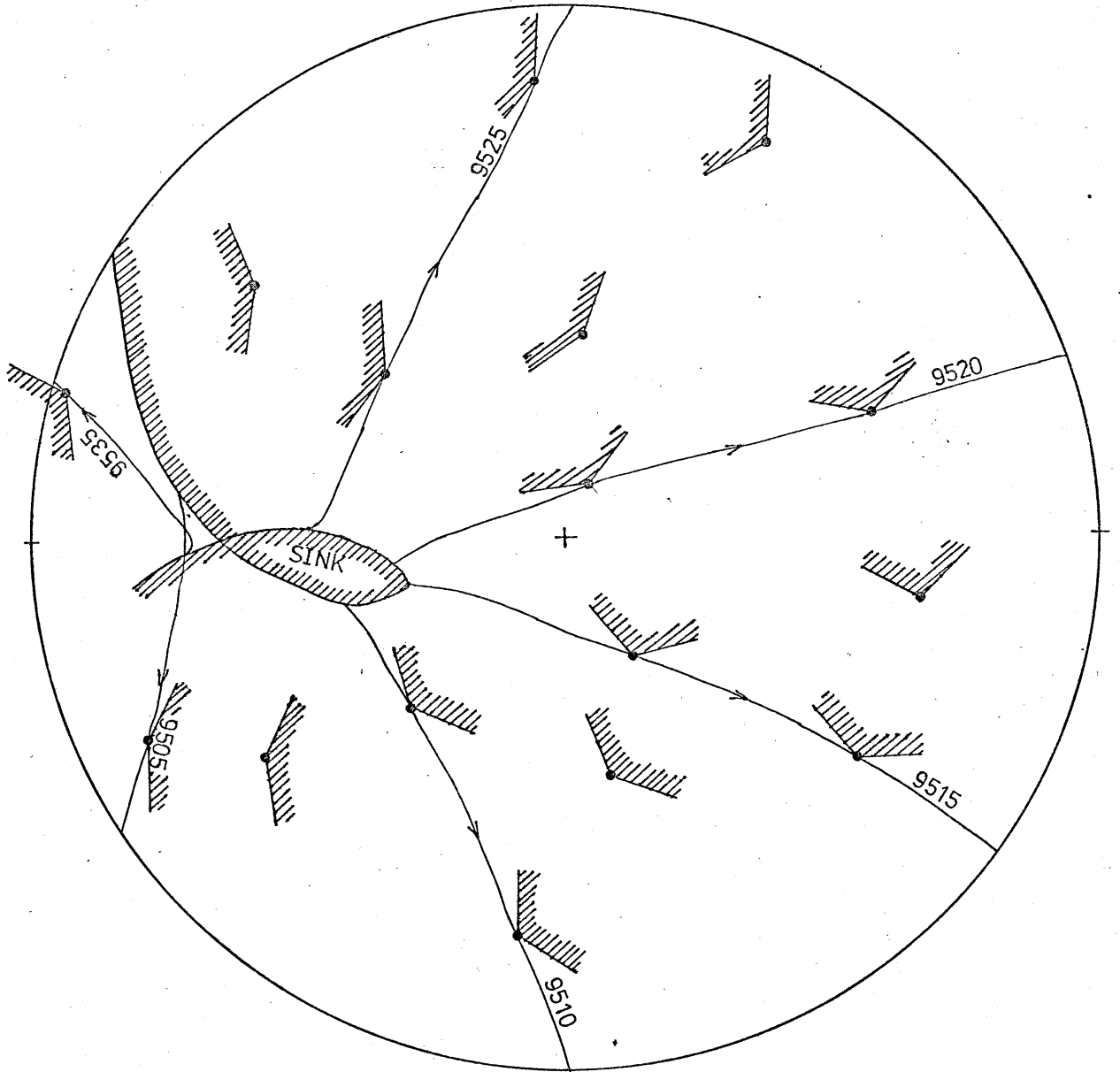
となっている) このことから図 (a) の図形は延長でき その形は図 (b) に示すような形になるはずである。(図 (b) は図 (a) と重なって同時に存在している) ところが図 (a) は $\partial T^0 / \partial \omega$ が $\partial T^0 / \partial B$ の左を向いているのに対し図 (b) では右を向いている。つまり図 (a) は安定で測定できるのに対し図 (b) は不安定で測定できないことになる。事実図 (b) の形はどうしても測定できなかつた。

フライストロンの理論によると B が大きくなっていくと T^0 は一度 $|\Gamma^0| = 1$ の円から外に出て、さらにあるところまでいくと逆に動き出し再び $|\Gamma^0| < 1$ の領域に戻ってくるということが知られている。つまり Rieke 図は少なくとも 2 枚 (実は無限枚) の等 ω , 等 B 線の網が重なっているはずである。しかしこの B の大きな方の図 (戻ってきた T^0 による図) では式(3.19)が成り立たないため、やはり測定不可能である (負荷が大きな周波数特性を持つときは場合により測定可能になるはずである)。

このように Rieke 図により式(3.19)の判定式の正しいことがある程度知れる。

式(3.19)の判定式が正しいことを、もっと直接に証明するには負荷に周波数特性の大きなものを用いればよい。そして $-\partial S^L / \partial \omega$ の方向を色々変えてどの方向からどの方向まで安定にその動作点で発振を継続するかを調べればよい。

$|S_{D1}^L|$ の大きな負荷として空洞共振器を用い $-\partial S^L / \partial \omega$ ($\cong \partial(T^0 S^L) / \partial \omega$) の方向かどの範囲で安定であるかを測定して結果を図 3.7 に示す。図は 3.4, 3.5 で示したのと同様 T^0 面に記入してある。すると確かに $-\partial S^L / \partial \omega$ は等 ω 線の左方 (B の増大する方に向けて) に方向




 $-\partial s^2 / \partial \omega$ の許される領域(方向)
 ハッチの向きを向くとき安定
 — 等 ω 線 (矢印の向きに B 増加)

図 3.7. Rieke 図と負荷の周波数特性の関係

が向くとき動作点が安定に測定できることがわかる。本来なら安定な方向は等周線の左方すべてが許されなければならないが、次の2つの理由で理論結果(図3.2)より狭くなっている。

1) 負荷として使っている空洞の $|\delta\beta|$ が発振器のIT別のせいせい5倍程度しかないため $\partial T^0/\partial\omega$ の効果が無視できない。

2) 外乱が大きく、安定領域にいても何かの拍子で動作点がとんでしまう。

4. 発振器の注入同期

ある周波数で発振している発振系に少し離れた周波数を持つ信号を注入すると発振器が注入信号周波数にひきずられて、いわゆる同期のふくまることが知られている。この問題は後に第6章で述べる多数発振器の系の特例として扱うこともできるが、比較的重要な概念のため1章を費して検討してみる。本章では従来説明されていない注入同期のヒステリシス現象、注入同期限界の非対称性、等についても取扱っている。

4.1 注入同期の基本方程式

自由振動周波数 ω_F を持つ発振系に図4.1に示すように $E_0 e^{j\omega_0 t}$ なる微弱な信号を注入すると発振器が ω_0 に引きずられて ω_F と異なる周波数で発振することがある。これを発振器の注入同期と呼んでいるが、本節ではそれについて考察する。

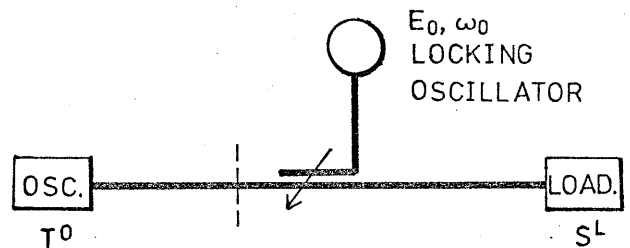


図4.1. 発振器の注入同期

なお簡単なために E_0, ω_0 は外部条件によって変化するものとする。(これも外部条件によって変化するときには後に第6章で述べるような手法で解くことができる。)

さて注入同期がかかるためには次の2つの条件が満足されなければならない。

- 1) 定常的(周波数 ω_0) で平衡条件の満足される動作点の存在すること。
- 2) その動作点が動的に安定であること。

これらの2条件が満足されればその動作点を一度送った発振系はその状態で同期されたままになる。またこの条件がくずれたとたんに同

期はずれる。注意しなければならないのは 2) で述べているのはいわゆる局所安定性、つまり発振系が 1) の動作点付近にいたときに同期するかしないかである。電源投入のとき、あるいは発振系の同期がはずれて ω_F 付近の周波数で発振している状態（ここでは $\theta(t) \cong (\omega_F - \omega_0)t$ の limit cycle で表わされる）から、同期のわかる過程を調べるには大局安定性を調べなければならない。それには、他の定常平衡点の性質や limit cycle などすべて調べ上げなければならない。この大局安定性を厳密に議論するのは容易ではないが、簡単な発振器モデル（とは言ってもかなり一般化されている）を用いると解析することができ、それについては第 4.4 節で述べる。

さて上記 1), 2) の条件は次のように求めることができる。まず考えている動作点が ω_0 で仮に存在しているものとする。すると発振器、負荷は第 3 章式 (3.1), (3.2) のように表わされる。

$$a^o(t) = [T_0^o + T_0^o \delta B^o(t) + T_0^o(D) \delta B^o(t) + T_0^{o'}(D) \theta_0^o(t)] b^o(t) \quad (4.1)$$

$$b^L(t) = [S_0^L + S_A^L \delta A^L(t) + S_0^L(D) \delta A^L(t) + S_0^{L'}(D) \theta_A^L(t)] a^L(t) \quad (4.2)$$

第 3 章と同様に

$$b^o(t) = a^L(t) \equiv a(t) \quad (4.3)$$

の振幅、位相を $A(t)$, $\theta(t)$ で表わす。図 4.1 よりもう一つの等式が得られるが、これは式 (3.4) とは異なり注入信号分だけずれる。

$$a^o(t) = b^L(t) + E_0 e^{j\omega_0 t} \quad (4.4)$$

これより式 (4.1) ~ (4.3) を代入して次式が得られる。

$$[S_0 + S_A \delta A(t) + S_0(D) \delta A(t) + S_0'(D) \theta(t)] a(t) + E_0 e^{j\omega_0 t} = 0 \quad (4.5)$$

ここで式 (3.7) に示したように $S_*^L - T_*^o = S_*$ と記した。まず $\delta A(t) = 0$, $\theta(t) = \text{const}$ とおいて定常平衡の条件を式 (4.5) から求めると

$$S_0 e^{A_0 + j\theta_0} + E_0 = 0 \quad (4.6)$$

となる。式 (4.6) を満足する A_0, θ_0 の存在するかどうか先に述べた 1) の条件を満足することに対応する。この条件は実はかなり厳しいものである。 S_0 は A_0, ω_0 における S の値であるが A_F, ω_F で自由発振することか

ら S_0 は $A=A_F, \omega=\omega_F$ で 0 になる。従って ω_F と僅かに異なる ω_0 では一般に $S_0 \neq 0$ である。従って式(4.6)が満足されるためには E_0 はある値以上の絶対値を持たねばならないことが結論される。いわゆる同期限界はこの式で定められることの多いことが後に第4.4節で示される。ここではこの式の導出にとどめておく。

次に2)の条件、つまり動的な安定性を考えてみる。これには式(4.5)の微分方程式を $A(t), \theta(t)$ について解けば良い。しかし

$$a(t) = \exp[A(t) + j\theta(t) + j\omega_0 t]$$

を式(4.5)へ代入すればわかるようにこれは非線形微分方程式であり極めて取扱いが難しい。そこで $\delta A(t), \delta\theta(t) = \theta(t) - \theta_0$ が余り大げなないという仮定のもとで式(4.5)を $\delta A(t), \delta\theta(t)$ に対し線形化する。

$$a(t) \cong [1 + \delta A(t) + \delta\theta(t)] e^{A_0 + j\theta_0 + j\omega_0 t} \quad (4.7)$$

とあいて式(4.5)へ代入し、さらに $\delta A(t), \delta\theta(t)$ の高次の項を無視すると

$$[S_0 + S_A + S_D(D)] \delta A(t) + [jS_0 + S'_D(D)] \delta\theta(t) = 0 \quad (4.8)$$

が得られる。なお E_0 は式(4.6)を用いて消去した。この式は $\delta A(t), \delta\theta(t)$ に対して線形微分方程式になっているので第3章で述べたように固有値問題として解くことができる。式(4.8)を実部、虚部に分けると

$$\begin{pmatrix} [S_0 + S_A + S_D(D)]^R & [jS_0 + S'_D(D)]^R \\ [S_0 + S_A + S_D(D)]^I & [jS_0 + S'_D(D)]^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A(t) \\ \delta\theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

が得られる。特性方程式は上式左辺の行列の行列式で与えられ、その計算を行なうと

$$\{[S_0 + S_A + S_D(D)][jS_0 + S'_D(D)]^c\}^I = 0 \quad (4.10)$$

となる。従って注入同期の安定性はこの方程式の根から知れる。

なお注入同期の解析には Adler の導いたいわゆる Adler の式が良く用いられるが、これは式(4.5)で $\delta A(t) = 0$ とし、さらに簡単化すると得られる。ここでは詳細については割愛するが、最大の違いは Adler が定振幅発振器を仮定したのに対し、ここでは任意の発振器を考えていることである。従って Adler の式では D の一次の項までしか現れない。

ω のに対し式(4.5)では D のかなり高次の項まで現われるやや取扱いにくい形になっている。なお $\delta A(t) = 0$ とするかわりに $\delta_A \rightarrow \infty$ としても Adler の式と対応することができ。

4.2 注入同期の安定性

式(4.10)の根 D を調べると注入同期の安定性を知ることができ。第3章の式(3.13)とは異なり式(4.10)は一般には $D=0$ なる根を持たない。もし持たせるとしても偶然であり第3章のように $\theta(t) = \text{任意の const.}$ に関係した自明の根ではない ($S_0 = 0$, つまり $E_0 = 0$ のときは図4.1は図3.1と全く同じものになるから ω と ω_0 のときだけは例外的に $D=0$ なる自明の根を持つことは言うまでもない)。以上のことを考えると安定性の条件は式(3.14)とはやや異なり

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta A(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \delta \theta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\theta(t) - \theta_0] = 0 \quad (4.11)$$

となる。つまり式(4.10)のすべての根 D_i に対し

$$\operatorname{Re}(D_i) < 0 \quad (i=1, 2, \dots; S_0 \neq 0)$$

$$\operatorname{Re}(D_i) < 0 \quad (i=2, 3, \dots; S_0 = 0)$$

が安定な注入同期の条件となる。

式(4.11)からわかるように、注入同期が安定なときには、 $t \rightarrow \infty$ で θ は必ず式(4.6)で表まる θ_0 へ収束する。つまり位相が固定される (Phase Locked) ことがわかる。これは後に多数発振器の同期運転の解析でも現われる重要な性質で、お互いの位相差がある一定値に固定されるという現象である。

次に緩変化準線形近似を用いて安定な条件を導いてみよう。 T^0 , S^+ が式(2.34), (2.35)で表わされるとすると式(4.9), (4.10)はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} S_0 + \operatorname{Re} S_A + \operatorname{Re} S_D \cdot D & -\operatorname{Im} S_0 - \operatorname{Im} S_D \cdot D \\ \operatorname{Im} S_0 + \operatorname{Im} S_A + \operatorname{Im} S_D \cdot D & \operatorname{Re} S_0 + \operatorname{Re} S_D \cdot D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A(t) \\ \delta \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$|S_D|^2 D^2 + 2 \operatorname{Re}[S_D^*(S_0 + \frac{1}{2} S_A)] \cdot D + \operatorname{Re}[S_0^*(S_0 + S_A)] = 0 \quad (4.13)$$

となる。式(4.13)の2次方程式の2根より系の安定性がわかるが、これをもう少し詳しく、動作点のインピーダンス S_0 面でも分類すると図4.2のようになる。特性方程式が2次方程式になるときには制御理論で知られているように系の安定性を次のように分類することができる。

- i) Stable Node; D_1, D_2 が負の2実根; $\delta A(t), \delta \theta(t)$ は制御減衰
- ii) Stable Focus; D_1, D_2 が実部負の2複素根; 振動減衰
- iii) Unstable Node; D_1, D_2 が正の2実根; 制御形増大

iv) Unstable Focus; D_1, D_2 が実部正の2複素根; 振動増大

v) Saddle Point; D_1, D_2 の-根正, -根負の2実根; 減衰波と増大波の和

vi) Vortex; D_1, D_2 が2虚根; 永久振動

図4.2にはこれらの区別も示してある。i)~vi)以外に D_1, D_2 の-方が0の場合等も考えられるが細かい事はいたづらに問題を複雑にするだけなのでここでは詳しく述べない。さて i)~vi) のため式(4.11)を満足するものは i) Stable Node と ii) Stable Focus だけである。従って S_0 が図4.2のハッチを受けた領域(原点と $-S_A$ を直径とする円より外でかつ $-S_A/2$ を通り S_0 と直交する直線の S_0 側の領域)にあるときのみ注入同期は安定となる。 $S_0=0$, つまり原点に動作点がくるときは $E_0=0, \omega_0=\omega_F$, つまり第3章で述べた一台の発振器の自由発振に対応するが、この安定性は図4.2のように原点がハッチに接しているときのみ安定になる。これを言い換えると式(3.19)と同じになる。

根 D_1, D_2 の具体的な値は式(4.13)を直接解いても得られるが図4.3に示すように作図により得ることもできる。つまりSF,

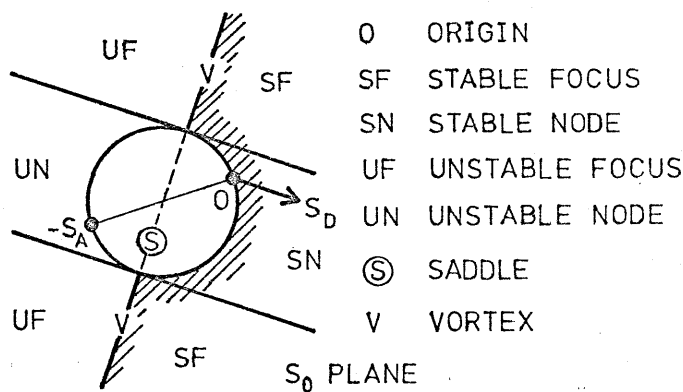


図4.2. 動作点 S_0 面上での安定性の分類

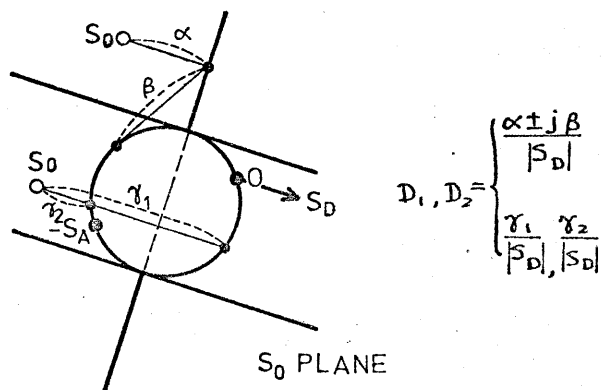


図4.3. S_0 と根 D_1, D_2 の関係

UF領域では動作点(定常平衡点) S_0 から矢印のように言った距離を α , その点から円までの接線の長さを β とする. また SN, \odot , UN領域に対しては S_0 から矢印の方向に言った距離を γ_1, γ_2 とする. すると

$$\left. \begin{aligned} D_1, D_2 &= (\alpha \pm j\beta) / |S_D| && (2 \text{ 複素根}) \\ D_1, D_2 &= \gamma_1 / |S_D|, \gamma_2 / |S_D| && (2 \text{ 実根}) \end{aligned} \right\} (4.14)$$

と根が表わされる.

なお以上述べた緩変化準線形近似は素子の非線形な性質が強く現われてくると成り立たなくなるが大体の目安としては

$$|S_0| \ll 1, \quad |S_0 + S_A| \ll 1 \quad (4.15)$$

であればこの近似が使えろと考えてよい.

4.3 注入同期の大局安定性と過渡現象

今までは $\delta A(t), \delta \theta(t)$ が余り大きくならないときの安定性, つまり局所安定性について述べてきたが, 発振器の始動時, 同期引込, 大きな摂動を受けたときの安定性はいわゆる大局安定性を調べなければならぬ. $A(t), \theta(t)$ が大きく変化するときには刻々と変化する $A(t), \theta(t)$ の付近で $A(t), \theta(t)$ に対する線形近似を行なう, Δt 後の $A(t+\Delta t), \theta(t+\Delta t)$ を求め, ... と行った手続きをとらねばならぬ. そのためにはあらゆる A, θ に対する $S_0, S_A, S_D(D), S_D'(D)$ が知られていなければならない. そこで本節では問題を簡単にするために $S_A, S_D(D), S_D'(D)$ が動作点によらず一定となる発振系を仮定して解析を行う. さらに $S_D(D), S_D'(D)$ が緩変化準線形近似で表わされる α と同じ形をとるものとする. すると式(4.5)に対応して次式が得られる.

$$[S_F + S_A A(t) + S_D D A(t) + j S_D D \theta(t)] e^{A(t) + j\theta(t)} + E_0 e^{j\omega_0 t} = 0 \quad (4.16)$$

ただし $\theta(t) = \omega_0 t + \theta(t)$ である. また S_F, S_A, S_D は定複素数である.

$E_0 = 0$ で $A(t) = A_F, \theta(t) = \omega_F t$ で自由振動するという条件を入れると S_F が A_F, ω_F などで与えられ式(4.16)は次式のように変形できる.

$$[(S_A + S_D D)(A(t) - A_F) + j S_D D(\theta(t) + \omega_0 - \omega_F)] e^{A(t) + j\theta(t)} + E_0 = 0 \quad (4.17)$$

この式より S_0 を求めると

$$S_0 = S_A \cdot (A_0 - A_F) + j S_D \cdot (\omega_0 - \omega_F) \quad (4.18)$$

が得られる。 S_A , S_D は定義よりわかるように動作点によらない一定値となる。

さて発振系の特性が $A(t)$, $\theta(t)$ の広い範囲に対して定められたので、いよいよ注入同期がかかるかどうかを調べる。まず第1に定常平衡条件を満足する動作点を求めてみる。つまり与えられた E_0 , ω_0 に対し動作点が存在するかどうか、また存在すれば何個か、どこに存在するかを議論してみる。動作点を (A_0, θ_0) 面の位置で表わしてもよいが S_0 面で表わすと第4.2節で述べた S_0 面上での安定性の分類と直接比較できるので便利である。動作点が S_0 面上で与えられれば式(4.18)を用いて簡単に A_0 を求めることができる。また θ_0 は式(4.6)より簡単に得られ、それぞれ

$$A_0 = A_F + \frac{\operatorname{Re}[S_0/S_D]}{\operatorname{Re}[S_A/S_D]} \quad (4.19)$$

$$\theta_0 = \pi - \arg S_0 \quad (4.20)$$

となる。但しここで E_0 は実正数とした。 S_0 を求めるには

$$\Delta_0 = S_0 / S_A \quad (4.21)$$

で定義される Δ_0 を用いるのが便利である。すると式(4.18)は

$$\Delta_0 = A_0 - A_F + j \frac{S_D}{S_A} (\omega_0 - \omega_F) \quad (4.22)$$

となり等 ω_0 線は Δ_0 面の実軸と平行な直線群で表わされる。この Δ_0 を用いると式(4.6)は

$$(\operatorname{Re} \Delta_0)^2 + (\operatorname{Im} \Delta_0)^2 = \varepsilon^2 e^{-2\operatorname{Re} \Delta_0} \quad (4.23)$$

ただしここで

$$\varepsilon = \frac{E_0}{|S_A|} e^{-A_F - \operatorname{Im}(S_D/S_A) \cdot (\omega_0 - \omega_F)} \quad (4.24)$$

である。従って E_0 , ω_0 を与えると ε は一義的に定まる。また式(4.23)中の $\operatorname{Im} \Delta_0$ も

$$\text{Im } \Delta_0 = \text{Re}(S_D/S_A) \cdot (\omega_0 - \omega_F) \quad (4.25)$$

となり ω_0 により一義的に定まる量であるから式 (4.23) から $\text{Re } \Delta_0$ を求めることができる。

以上の操作を図上で求められるようにしたものを図 4.4 に示す。図には種々の ε に対し式 (4.23) を満足する $\text{Re } \Delta_0$ と $\text{Im } \Delta_0$ の関係を曲線として示してある。いま式 (4.24) を用いて与えられた E_0, ω_0 に対する ε を計算し、その ε に対応する曲線を図中から選ぶ。一方求める Δ_0 は式 (4.25) の関係をも満足しなければならないから、 Δ_0 面の虚軸と $j \text{Re}(S_D/S_A) \cdot (\omega_0 - \omega_F)$ で交わり実軸と平行な線にのっていなければならない。つまり求める定常平衡点は Δ_0 面上で前者の曲線と後者の直線の交点として与えられる。これら交点は一般に 1 個とは限らない。 ω_0 が ω_F とかなり隔てていて $|\text{Im } \Delta_0| > 0.5$ の場合は E_0 の値に対し常に 1 個の平衡点 Δ_0 が対応する。しかし $|\text{Im } \Delta_0| < 0.5$ の場合には E_0 が非常に小さいときあるいは非常に大きいときには 1 個の平衡点しか存在しないが中程度の E_0 に対しては 3 個の平衡点が得られる。しかもこれらの交点は図 4.4 に示された一点鎖線の内でも分かれる。つまり 1 交点は円内に、1 交点は円外でかつ左の直線より右側に、もう 1 交点は円外でかつ右の直線より左側に位置する。

さて ω_0, E_0 を与えたときの定常平衡点 Δ_0 が求まったので次に

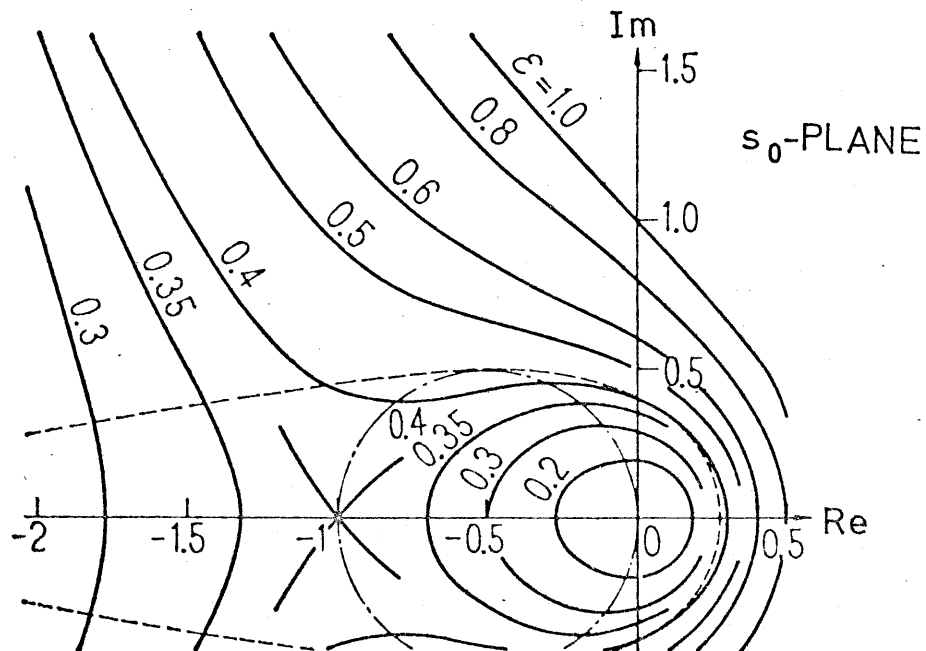


図 4.4. E_0, ω_0 の与えられたときの $\text{Re } \Delta_0$ と $\text{Im } \Delta_0$ の関係。

この状態が $A(t), \theta(t)$ が時間とともにどのように変化するかを考慮してみよう。 $A(t), \theta(t)$ の変化の仕方は初期条件によりいろいろであるが、その様子も一目で見るとは $(A(t), \theta(t))$ 面で表わした位相図を画いてみるのがよい。式 (4.17) より

$$DA(t) = -\operatorname{Re}(\rho_A/\rho_D) \cdot (A(t) - A_F) - \frac{E_0}{|\rho_D|} e^{-A(t)} \cos(\theta(t) + \theta_D)$$

$$D\theta(t) = -(\omega_0 - \omega_F)$$

$$- \operatorname{Im}(\rho_A/\rho_D) \cdot (A(t) - A_F) + \frac{E_0}{|\rho_D|} e^{-A(t)} \sin(\theta(t) + \theta_D)$$

(4.26)

が得られから $(A(t), \theta(t))$ に対しその各値で $(DA(t), D\theta(t))$ が算出でき位相図が画ける。ただし上式で θ_D とは ρ_D の位相角である。位相図上の特異点(停留点)とは $DA(t) = 0, D\theta(t) = 0$ になる点であるから、すでに求めた定常平衡点のことである。そして特異点の型とは定常平衡点の安定性の型であるから第4.2節図4.2から判定できる。(図4.2を $1/\rho_A$ 倍すると ρ_0 面になるがこれは図4.2を原点を中心に適当に回転、拡大(縮小)して点 $-\rho_A$ が ρ_0 面上の -1 に対応するようにすればよい。そのとき図4.2の原点と $-\rho_A$ を通る円は図4.4の原点と -1 を通る一実鎖線の内に対応される。このようにすると ρ_0 面上の点の安定性がただちに知られる。) 以上の特異点の性質と式(4.26)から誘導される次の各項の性質を用いると位相図が比較的簡単に得られる。

- 1) 平衡点へ収束あるいは平衡点から発散するときの $(A(t), \theta(t))$ 面上での回転方向は $\operatorname{Im}[(\rho_0 + \frac{1}{2}\rho_A)/\rho_D]$ の符号が正のとき右旋に、また負のとき左旋となる。
- 2) $A(t)$ の極めて大きなときの位相点は位相面上で $-\rho_D^*$ のベクトルの方向と平行に移動する。
- 3) $A(t)$ が負の方向に極めて大きなときの位相点の動く方向は $\theta(t)$ の値により異なるが、 $A(t)$ 軸と $\pi - \theta_D - \theta(t)$ の角度をなす方向に移動する。

1) の性質は式(4.26)を定常平衡点のまわりの小さな円で線積分すれば得られ、2), 3) の性質は式(4.26)で $A(t) \rightarrow \pm\infty$ とすれば得られる。以上の点を考慮して代表的な数個の動作点に対して位相図を求めたものを図4.5に示す。また対応する ρ_0 面上での定常平衡点も

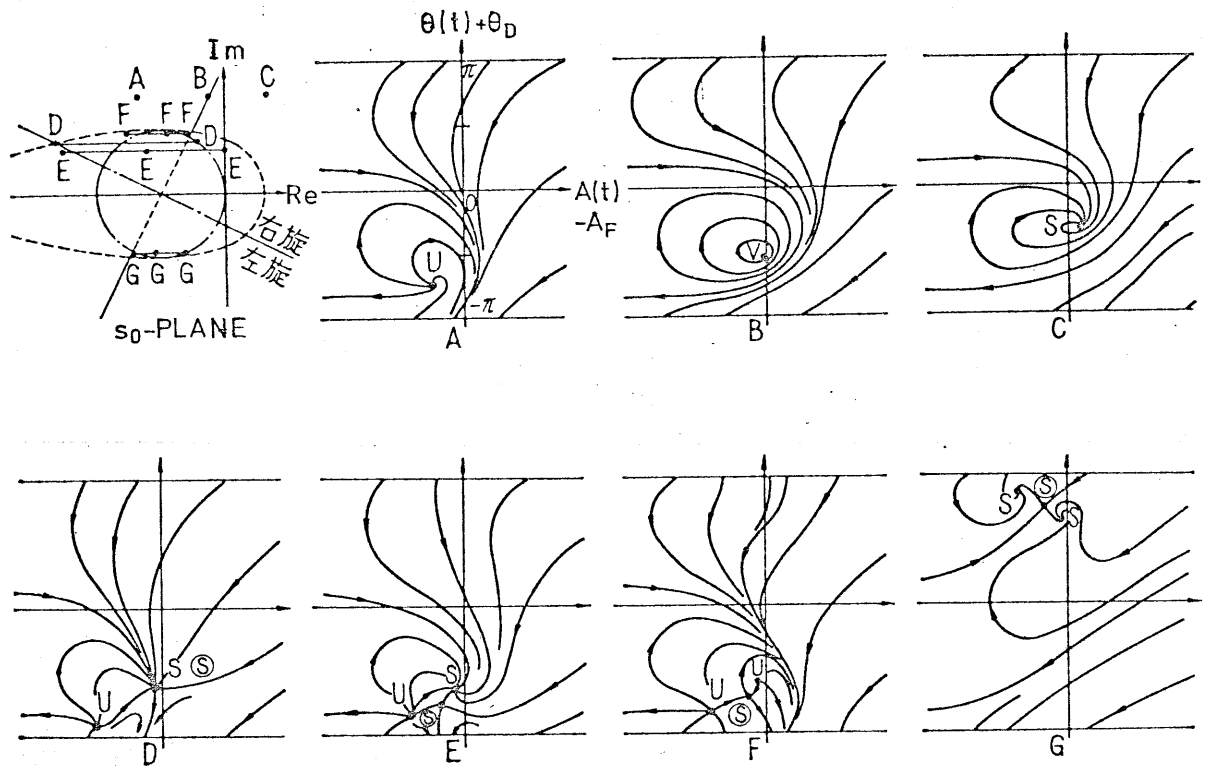


図4.5. 代表的動作点に対する定常平衡点(s_0)と位相図

比較して示した。この図に示したのは自由発振が安定に継続する発振系(つまり $Re(S_A/S_0) > 0$ の系)に同期信号を注入したときの位相図である。このような場合、動作点 C, D, E, F の図からわかるように局所安定な定常平衡点が1個でも存在するときは大局的にも安定である、つまりどんな $A(t), \theta(t)$ の初期条件から出発しても必ず定常平衡点に到達する。ただし動作点 G のように安定な平衡点が同時に2個あるときもある。このようなときには初期条件により異なる平衡点へ収束するわけ、ヒステリシス現象が現われる。動作点 A, F のように安定な平衡点が1個も存在しないときには中が限りなく変化していく回復線が生じ、位相点は終局的にはこの線上を動くようになる。これは同期はずれの状態である。動作点 B のように vortex が発生し $A(t), \theta(t)$ が共にある値の付近で周期的に変動するような状態は同期のかかりかけやはずれかけの状態に対応する。

自由発振の不安定になる系(つまり $Re(S_A/S_0) < 0$ の系)の場合の位相図もやはり図4.5のようになる。ただ位相点の移動方向がすべて図4.5に

示された方向と逆になる。従って図中の ρ は ω に、 ω は ρ になる。以上のことを考えに入れて動作点 A, D, E, F の位相図を考慮してみると局所安定点は大局安定にはなっていない。つまり $A(t)$ とある程度以上大きくするような擾動が加わって回復線(この場合回復線はすべて不安定である)を越えると位相点は $A(t) \rightarrow \infty$ へ発散してしまう。

図 4.5 の位相図を利用して同期の引き込み, 脱調について厳密に考えてみる。簡単のために自由発振が安定になる発振系を考える。まず自由発振周波数 ω_F の発振系に ω_0 の同期信号を注入し E_0 と 0 から徐々に大きくしていく過程を考える。図 4.4 を解析してみるとわかるように, その過程で定常平衡点は s_0 面上を図 4.6 に示すように実軸に平行に移動する。 E_0 が十分小さいときは平衡点は s_0 面の左方にあり, E_0 の増加につれてほぼ右方へ移動する。 $|\text{Im } s_0| > 0.5$ のときはそのまま右方へ移動するだけであるが, $|\text{Im } s_0| < 0.5$ のときはやや複雑にふるまう。平衡点が左方から徐々に移動してきて流線形部の左側に接すると, 円形の右内周上に新たに 2 個の平衡点が発生する。先の 1 個がさらに右へ移動するにつれて 2 個のうち 1 個は右方へ, 1 個は左方へ移動する。この左方へ移動する平衡点は必ず saddle point になっている。やがてこの左方へ移動する saddle point と先の 1 個の平衡点は円形の左内周で一致し, それと同時に消滅する。その時, あとから発生し右方へ移動していた平衡点は丁度, 流線形部の右側にくる。さらに E_0 を増加させるとその後はこの残った 1 個の平衡点が右方へ移動していく。逆に E_0 を減らしていくと上記とまったく逆に平衡点が移動する。前述のように自由発振の安定な発振系では安定な平衡点が 1 個でも存在すれば大局安定になりその安定な平衡点に落着く。従って図 4.6 の太線の

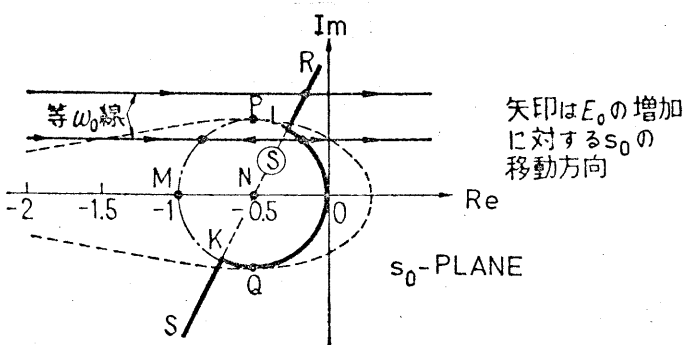


図 4.6. E_0 の増加に対する定常平衡点の移動

のところ安定な平衡点の発生する E_0 が同期引き込め脱調の起きる限界の注入信号振幅となる。この太線の限界を ω_0, E_0 の関係で示すと図 4.7 のようになる。図 4.6 の直線 RLNKs が図 4.7 の双曲線 RLNKs

で示される

$$\left| \frac{S_D}{S_A} \right|^2 (\omega_0 - \omega_F)^2 + \text{Im} \frac{S_D}{S_A} (\omega_0 - \omega_F) + \frac{1}{4} = \frac{E_0^2}{|S_A|^2} e^{-2A_F} \quad (4.27)$$

に対応する。また図 4.6 の内形が図 4.7 のゆがんだ三角形 OQKMPLO に対応する。この三角形を表わす方程式は

$$-(A_0 - A_F) + \text{Im} \frac{S_D}{S_A} (\omega_0 - \omega_F) = \frac{E_0^2}{|S_A|^2} e^{-2A_0} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} (A_0 - A_F)^2 - 2(A_0 - A_F) \text{Im} \frac{S_D}{S_A} (\omega_0 - \omega_F) + \left| \frac{S_D}{S_A} \right|^2 (\omega_0 - \omega_F)^2 \\ + (A_0 - A_F) - \text{Im} \frac{S_D}{S_A} (\omega_0 - \omega_F) = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

の二式から A_0 を消去することにより得られるが図 4.4 を用いて作図により計算する方が楽に得られる。以上の点を考えると図 4.6 の太線に対応する図 4.7 の太線 RLOQKS が同期引込限界を与え、この曲線より上の領域にある ω_0, E_0 に対しては安定に同期がかかる。

図 4.7 の原点付近では次の場合、同期が安定になる。

$$E_0 > e^{A_F} |S_A| \text{Re}(S_D/S_A) |\omega_0 - \omega_F| \quad (4.30)$$

従って同期信号周波数 ω_0 が発振系の自由発振周波数 ω_F に近くなるに従って同期信号入力も小さくて済むことがわかる。 $R_0 E_0^2 / 2$ が同期信号入力電力 P_{Lock} であり $R_0 e^{2A_F} / 2$ が発振器から負荷への入射波電力 P_{out} (出力電力 P_0 とは僅かに異なる) であるから式 (4.30) は

$$\sqrt{\frac{P_{\text{Lock}}}{P_{\text{out}}}} > |S_A| \text{Re}(S_D/S_A)$$

$$\cdot |\omega_0 - \omega_F| \quad (4.31)$$

となる。さらに第 3.3 節で述べた式 (3.23) で表わされる簡単な発振系の場合には、さらに簡単になり

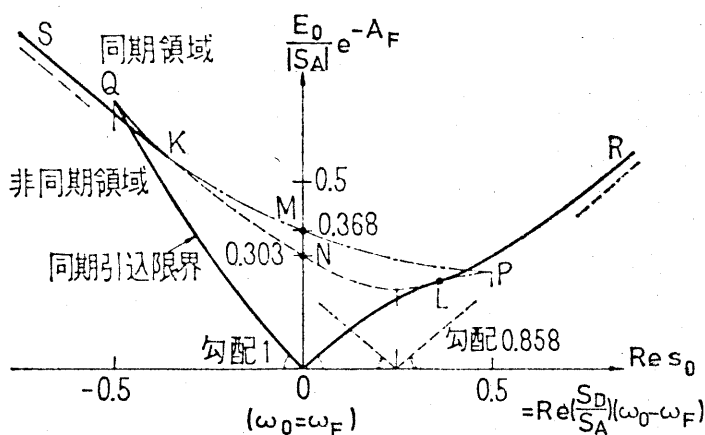


図 4.7. 同期引込限界 E_0 と ω_0 の関係。

$$\sqrt{\frac{P_{\text{Lock}}}{P_{\text{out}}}} > \frac{Q}{\omega_F} |\omega_0 - \omega_F| \quad (4.32)$$

となるが、この結果は従来の同期理論と一致する。

$\text{Re}(\rho_D/\rho_A) \cdot |\omega_0 - \omega_F|$ が 0.5 程度になってくると式(4.30)の近似が成り立たなくなり従来の理論で説明できなかったいくつかの現象が現われてくる。一番すぐにはわかることは同期引込限界が $\omega_0 - \omega_F$ の正負に対して非対称になることである。この現象は ρ_A と ρ_D の間の角度がひらくほど(つまり等 ω_0 線と等 A_0 線が通常ほぼ直交するがそれからずれるほど)顕著に現われる。また同期にヒステリシス現象が生じる。これは図 4.7 の $\text{Re}(\rho_D/\rho_A)(\omega_0 - \omega_F) = -0.5$ 付近を見ると 1 個の ω_0 に対する個々の E_0 が対応しているところがあるが、これを位相図で見ると図 4.5 の動作点 G に対応している。このような領域では安定な定常平衡点が 2 個も発生しているため E_0 が大きくなっていくときと小さくなっていくときで選ぶ安定点が異なるというヒステリシス現象となって現われる。これは実験ではインピーダンスの跳びという形で調べることが出来る。

図 4.6 に等 A_0 線を書き入れてみると容易にわかるように同期のかかる点での A_0 は殆んど A_F より小さい。($\omega_0 = \omega_F$ のときには $A_0 = A_F$ となる) 特に $|\omega_0 - \omega_F|$ が大きくなると、この現象は顕著となる。

自由発振が不安定であるような発振系 ($\text{Re}(\rho_D/\rho_A) < 0$) のときの同期引込限界は図 4.6, 4.7 で RLPMS なる曲線となる。この曲線は原点を通らない。つまり、このような系には常にある程度の E_0 を注入しないと同期がかからない。(しかし充分大きな E_0 を与えれば必ず同期がかかる。) この同期状態は大局不安定でありこのモデルでは一度脱調すると $A(t) \rightarrow \infty$ になり再度同期引込ができないことになる。しかし実際の発振器では E_0, ω_0 そうまく変動して行けば再度同期をかけることが可能な場合が多い。

以上かなり簡単なモデルについて同期現象を大局的に調べてみたが、いくつかの興味深い現象が説明された。これらの現象は実際の発振器ではより顕著に現われるがそれについては第 4.4 節で詳しく述べる。

本節最後に いわゆる同期引込の過渡時間について考察してみる。非常に荒い話としては過渡時間は式(4.13)の二根 D_1, D_2 を調べれば

わかる。一般に $A(t), \theta(t)$ は $e^{D_1 t}$ と $e^{D_2 t}$ の線形結合で表わされるが t が充分大きくなると D_1, D_2 のうち実部の大きい方の時定数が支配的になる。自由発振の安定な系へ式 (4.31) の範囲内の P_{Lock} を注入したときの実部の大きい方の D は

$$D \cong \sqrt{\frac{P_{\text{Lock}}/P_{\text{out}}}{[|S_A| \operatorname{Re}(S_D/S_A)]^2} - (\omega_0 - \omega_F)^2} \quad (4.33)$$

となる。ただし $|\omega_0 - \omega_F|$ は余り大きくないものとした。式 (4.33) で与えられる発振器に対しては上式は

$$D \cong \sqrt{\frac{\omega_F^2 P_{\text{Lock}}}{Q^2 P_{\text{out}}} - (\omega_0 - \omega_F)^2} \quad (4.34)$$

となる。これらの式を見ると P_{Lock} が丁度同期限界のとき $D=0$, つまり同期が完全にかかるのに無限の時間がかかり, P_{Lock} が増えるに従って D も増え, 充分大きな P_{Lock} に対しては D は $\sqrt{P_{\text{Lock}}}$ に比例する。例として次のような発振器を考えてみる。

$$\omega_F/2\pi = 10 \text{ GHz}, \quad Q = 1,000, \quad P_{\text{out}} = 10 \text{ mW}, \quad |\omega_0 - \omega_F|/2\pi = 1 \text{ MHz}$$

この系に同期をかけるには $P_{\text{Lock}} = 0.1 \text{ mW}$ が必要であり, このとき $D=0$ つまり $2\pi/D = \infty \text{ s}$ となる。同じ ω_0 で $P_{\text{Lock}} = 1 \text{ mW}$ とすると $2\pi/D \cong 0.33 \mu\text{s}$, $P_{\text{Lock}} = 10 \text{ mW}$ とすると $2\pi/D \cong 0.1 \mu\text{s}$ 程度の時定数で定常状態に収束する。

4.4. 注入同期の測定例

第3.4節で述べたクライストロンを用い, それに注入同期をかけて安定性を調べてみる。測定の回路としては図2.4に示した"注入同期を用いた測定回路"を用いる。注入信号のないとき負荷は無反射になるように選んだ。また結果は $-S_0$ 面, つまり $T_0^o - S_0^o$ 面に示した。図3.4の特性を持つ発振器に同期信号を入れたときの測定不能範囲を図4.8にハッチで示した。従って T_0^o が図の右の方にあるときには安定に同期がかかる。また緩変化準線形近似を用いて, つまり式(4.13)あるいは図4.2により同期限界を求めた結果を図中, 破線で示した。この両者はかなり良い一致を見ている。 $T_0^o = 0$ から離れるにつれ両者がずれてくるのは式(4.15)の条件が満た

— EXPERIMENT
--- THEORY

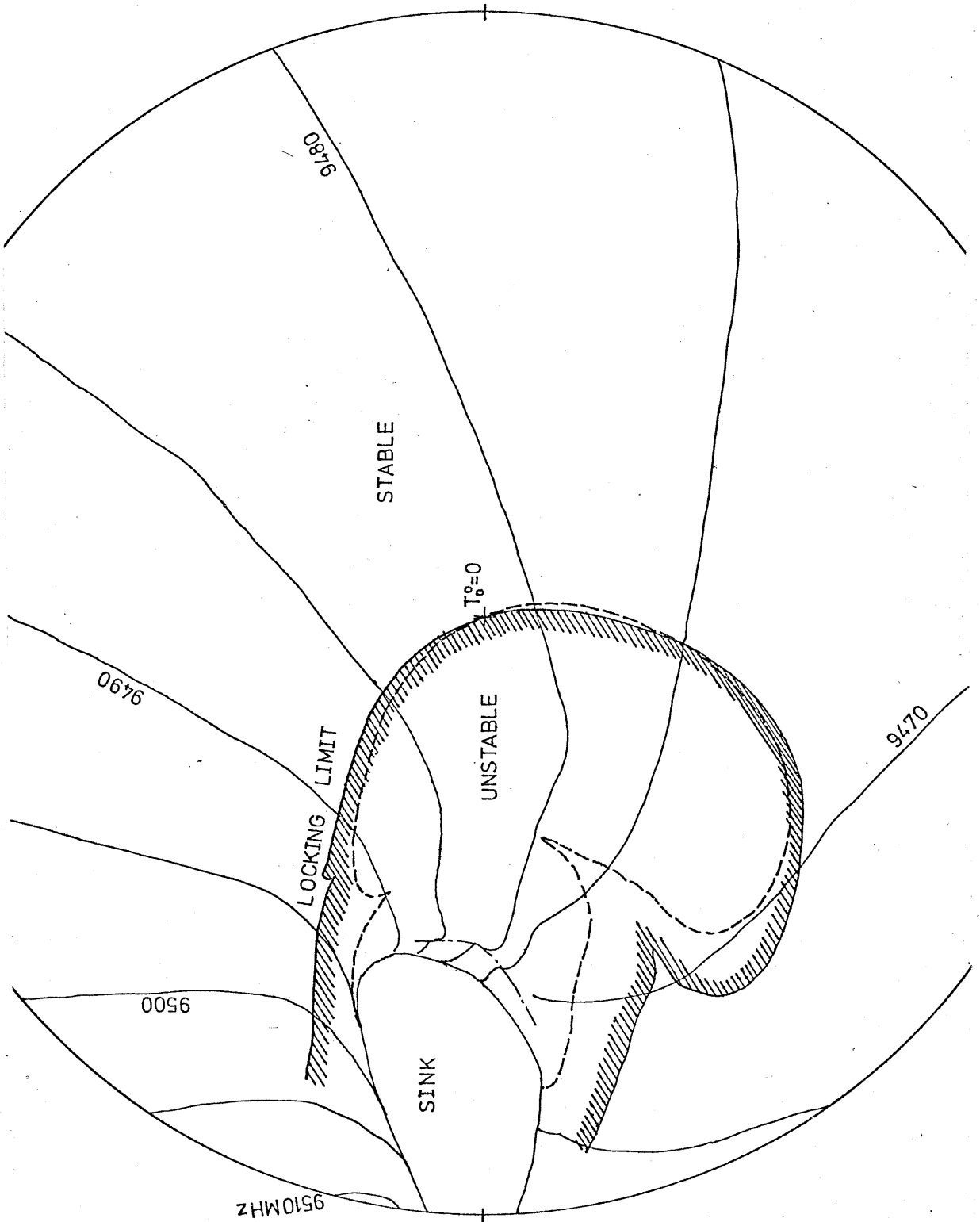
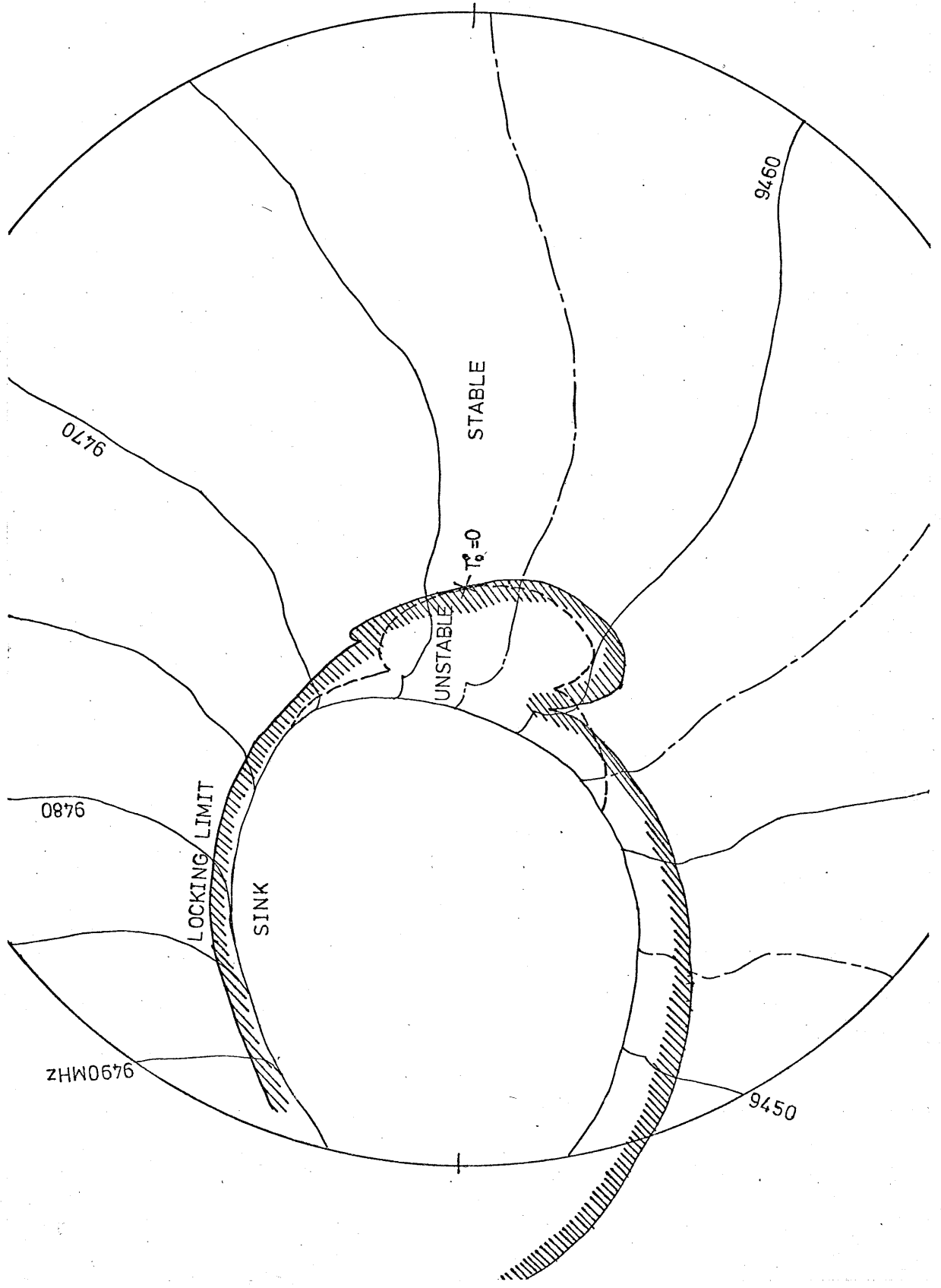


図 4.8. トライストロン
の注入同期相境界
(図 3.4 に対応)

図4.9.7ライズトンの注入同期限界 (図3.5に対応)

— EXPERIMENT
- - - THEORY



されなくなり緩変化準線形近似がなり立たなくなるからである。この場合には式(4.10)を解かなければ厳密には一致しなくなる。図4.9は同じく図3.5の特性を持つ発振器に同期信号を注入したときの同期限界、および緩変化準線形近似による理論限界である。

これらの図から同期限界線上の B_0 つまり A_0 の値と ω_0 、および T_0 を読みとれば同期信号振幅 E_0 がわかり E_0, ω_0 面で表わした同期限界曲線が得られるがその形はほぼ図4.7に示したものに近いのでここでは詳しくは述べない。ただし $\omega_0 > \omega_F$ にも $\omega_0 < \omega_F$ と同じくヒステリシスの存在する部分が発生する。

図4.8の9470MHzの線をたどっていくと一本の等 ω 線に同期限界線が3回も交わっており、明らかに前節で述べたヒステリシス現象や二重安定性が見られている。

9470MHzの線と同期限界線を模式的に表わしたものが図4.10である。例えば(i)の線に着目すると同期のはずれていく過程は理論からも実験から次のようになる。まず充分な同期信号が入っているときには T_0 ずつと右にある。信号振幅を減らすにつれ T_0 は左方に移動しDに達したとき同期Aが一担はずれB点へ跳びそこで再び安定になる。さらに信号を減らすとA点に達したとき完全に同期がはずれる。逆に同期はずれた状態から信号を増やしていくとある大きさで急に同期がかかりA点へくる。さらに信号を増やすとC点へ来たときE点へ動作点が跳ぶ。ここで完全に同期がかかる。(ii)のような線に沿って動くときにはB点がないためDで同期がはずれると、そのまま同期はずれになってしまう。しかしE点は消滅しないため同期に入るときには同じような過程をたどる。このようなヒステリシス現象が生じないためには(iii)の線のように等 ω 線と同期限界線が一つしか交点を持たないことが必要である。

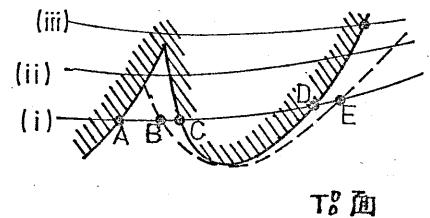


図4.10. 注入同期のヒステリシス現象

5. 発振器の雑音

発振系に種々の外乱が加わると $\Delta A(t)$, $\theta(t)$ が乱され、いわゆる AM (振幅) 雑音, PM (位相) 雑音が発生する。本章では外乱にどのようなものがあるか、またどんな形の雑音が生じるかについて検討する。解析は自由発振している発振系と注入同期されている発振系の両方に対して行なう。

5.1. 外乱の種類と雑音の基本方程式

発振系内の雑音はその電カスペクトルの大部分がキャリア周波数 ω_c 近傍に集中している。これは発振器が ω_c 付近で負性インピーダンスとなり大きな増幅作用を有しているからである。従って系内に定温程度の熱雑音が存在しているだけでキャリア周波数付近には等価的に高温な熱雑音が誘起される。このようにキャリア周波数付近に発生する雑音はキャリアの振幅や位相のぶらつきと表現することもできる。このように表現された発振器の雑音をそれぞれ AM (振幅) 雑音, PM (位相) 雑音と呼ぶ。

キャリアをぶらつかせる原因 (以下、外乱と呼ぶ) にはいろいろあるが大きく図 5.1 の4種類に分類することができる。

i) $\Delta a(t)$; 発振器から発生する外乱でそのキャリア周波数付近のスペクトルが主としてキャリアをぶらつかせる。発振器の出力ショット雑音, プラズマ雑音などが考えられる。

ii) $\Delta b(t)$; 同じく負荷側からくる外乱で熱雑音などが考えられる。

iii) $\Delta T^0(t)$; 発振器の反射係数のぶらつきで、比較的 low 周波数の成分がキャリアを変調してぶらつかせる。発振器の電源変動などで動

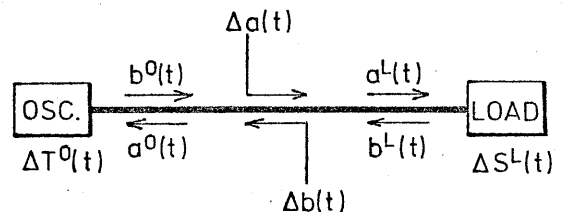


図 5.1. 発振系の雑音の原因となる外乱の種類

作点がふらつく場合, あるいはタンク回路としてつけた空洞が機械的に振動して共振周波数がふらつく場合などはこれに含まれる.

iv) $\Delta S^L(t)$; 同じく負荷の反射係数のふらつき.

以上4種類の外乱を考えると第3章の式(3.1)~(3.4), 第4章の式(4.1)~(4.4)の各式はそれぞれ次のように変更される.

$$a^o(t) = [\Delta T^o(t) + T_o^o + T_B^o \delta B^o(t) + T_D^o(D) \delta B^o(t) + T_D^o(D) \theta_B^o(t)] b^o(t) \quad (5.1)$$

$$b^L(t) = [\Delta S^L(t) + S_o^L + S_A^L \delta A^L(t) + S_D^L(D) \delta A^L(t) + S_D^L(D) \theta_A^L(t)] a^L(t) \quad (5.2)$$

$$b^o(t) + \Delta a(t) = a^L(t) \equiv a(t) \quad (5.3)$$

$$a^o(t) = b^L(t) + E_o e^{j\omega_o t} + \Delta b(t) \quad (5.4)$$

ただし $E_o = 0$ のとき自由発振系に対応するものとする. $|\Delta a(t)| \ll |a(t)|$ としてよいから式(5.3)より

$$B^o(t) = A(t) - \operatorname{Re} \frac{\Delta a(t)}{a(t)}, \quad \theta_B^o(t) = \theta(t) - \operatorname{Im} \frac{\Delta a(t)}{a(t)}$$

とおける. これより $A(t), \theta(t)$ に関する式が式(5.1)~(5.4)より求まる.

$$S_o + [S_A + S_D(D)] \delta A(t) + S_D^L(D) \theta(t) = -[\Delta S^L(t) - \Delta T^o(t)]$$

$$- [T_B^o + T_D^o(D)] \operatorname{Re} \frac{\Delta a(t)}{a(t)} - T_D^o(D) \operatorname{Im} \frac{\Delta a(t)}{a(t)} - T_o^o \frac{\Delta a(t)}{a(t)} - \frac{\Delta b(t)}{a(t)} - \frac{E_o e^{j\omega_o t}}{a(t)} \quad (5.5)$$

この方程式は左辺が $\delta A(t), \theta(t)$ の線形微分式になっており, 右辺はいくつかの雑音項が駆動力として入っており一見簡単に解けそうに見える. 事実 $\Delta a(t), \Delta b(t), E_o$ がすべて0で $\Delta S^L(t), \Delta T^o(t)$ のみが右辺を決定しているときには式(5.5)は容易に解ける. 他の項は分母に $a(t)$ つまり $e^{A(t) + j\theta(t) + j\omega_o t}$ が入っているため $A(t), \theta(t)$ に対し非線形な方程式になり, これらの項のあるときには簡単には解けない.

5.2 自由発振系の雑音

自由発振系の雑音は式(5.5)で $S_o = 0, E_o = 0$ としたときの解を

求めればよい。

1) 変調形外乱 $\Delta S^L(t)$, $\Delta T^O(t)$ による雑音

変調形外乱のみが存在するとき式(5.5)は簡単に次式のようになる。

$$[S_A + S_D(D)] \delta A(t) + S_D'(D) \theta(t) = -[\Delta S^L(t) - \Delta T^O(t)] \quad (5.6)$$

この式を実部虚部に分けると式(3.10)に等価な項のついた

$$\begin{pmatrix} [S_A + S_D(D)]^R & [S_D'(D)]^R \\ [S_A + S_D(D)]^I & [S_D'(D)]^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{Re}[\Delta S^L(t) - \Delta T^O(t)] \\ -\text{Im}[\Delta S^L(t) - \Delta T^O(t)] \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

が得られる。この式の解は付録Aの(A.17)~(A.20)を用いて

$$\delta A(t) = -\frac{\text{Im}\{[S_D'(D)]^c [\Delta S^L(t) - \Delta T^O(t)]\}}{\{[S_A + S_D(D)][S_D'(D)]^c\}^I} \quad (5.8)$$

$$\theta(t) = -\frac{\text{Im}\{[S_A + S_D(D)]^c [\Delta S^L(t) - \Delta T^O(t)]\}}{\{[S_A + S_D(D)][S_D'(D)]^c\}^I} + \theta_0 \quad (5.9)$$

となる。この解の大体の感じを把握するために次の外乱を考えてみる。

$$\Delta S^L(t) - \Delta T^O(t) = \Delta S \cos \Omega t \quad (5.10)$$

ここで Ω は ω_0 に比し充分低い周波数であり、 ΔS は複素定ベクトルで反射係数差 S_D の変動の方向と大きさを示す。例えば発振器の電源電圧に 50Hz のハムがのっているような場合 $\Omega = 50\text{Hz}$ 、 ΔS が S_A の方向をほぼ向いているような外乱が発生しやすい。簡単のために線変化準線形近似を用いさらに式(A.15)を利用すると式(5.8), (5.9)より

$$\delta A(t) = \frac{-\text{Re}(\Delta S S_D^*) [\text{Re}(S_A S_D^*) \cos \Omega t + |S_D|^2 \Omega \sin \Omega t]}{[\text{Re}(S_A S_D^*)]^2 + |S_D|^4 \Omega^2} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \theta(t) = & \frac{-[\text{Re}(S_A S_D^*) \text{Re}(\Delta S S_D^*) + |S_D|^2 \text{Im}(\Delta S S_A^*)] \Omega \cos \Omega t}{\{[\text{Re}(S_A S_D^*)]^2 + |S_D|^4 \Omega^2\} \Omega} \\ & + \frac{[\text{Re}(S_A S_D^*) \text{Im}(\Delta S S_A^*) - \Omega |S_D|^2 \text{Re}(\Delta S S_D^*)] \sin \Omega t}{\{[\text{Re}(S_A S_D^*)]^2 + |S_D|^4 \Omega^2\} \Omega} + \theta_0 \quad (5.12) \end{aligned}$$

が得られる。

ここで AM, PM, FM 雑音電力, AM-PM, AM-FM 相関雑音電力なる概念を導入しておく。まず外乱により変動する $\delta A(t), \theta(t)$ を AM 雑音, PM 雑音と呼ぶことは先に述べたが, $D\theta(t)$ を FM 雑音と呼ぶ。これは $D\theta(t)$ が瞬時周波数を表わすことから名付けられている。いま $\delta A(t), \theta(t)$ の $\Omega \sim \Omega + d\Omega$ のスペクトル成分に着目すると $d\Omega$ が充分小さいとき $\delta A(t), \theta(t)$ は Ω の周波数で変動する波になる。これを $e^{j\Omega t}$ で回転するベクトルの実部と考えることもできる。この複素面でのベクトルを改めて $\delta A(t), \theta(t)$ と表わすと AM 雑音, PM 雑音, FM 雑音は

$$\text{AM 雑音} = \text{Re} [\delta A(t)] \quad (5.13)$$

$$\text{PM 雑音} = \text{Re} [\theta(t)] \quad (5.14)$$

$$\text{FM 雑音} = \text{Re} [D\theta(t)] = \Omega \text{Re} [j\theta(t)] \quad (5.15)$$

となる。AM, PM 雑音がディメンションを持たないのに対し式(5.15)で表わされる FM 雑音は [時間]⁻¹ のディメンションを持つ。式(5.15)の替わりに、これを Ω で割って modulation index の形で表わしたものを FM 雑音と呼ぶことがある。本論文では今後この形

$$\text{FM 雑音} = \text{Re} [j\theta(t)] \quad (5.16)$$

を用いることにする。AM, PM, FM 雑音電力, AM-PM, AM-FM 相関雑音電力をそれぞれ以下のように定義する。

$$\text{AM 雑音電力 } N_A = \overline{[\text{Re} [\delta A(t)]]^2} = \frac{1}{2} \overline{\delta A(t)^* \delta A(t)} \quad (5.17)$$

$$\text{PM 雑音電力 } N_P = \overline{[\text{Re} [\theta(t)]]^2} = \frac{1}{2} \overline{\theta(t)^* \theta(t)} \quad (5.18)$$

$$\text{FM 雑音電力 } N_F = \overline{[\text{Re} [j\theta(t)]]^2} = N_P$$

$$\text{AM-PM 相関雑音電力 } N_{AP} = \overline{\text{Re} [\delta A(t)] \text{Re} [\theta(t)]} = \frac{1}{2} \overline{\text{Re} [\delta A(t) \theta(t)^*]} \quad (5.19)$$

$$\text{AM-FM 相関雑音電力 } N_{AF} = \overline{\text{Re} [\delta A(t)] \text{Re} [j\theta(t)]} = \frac{1}{2} \overline{\text{Im} [\delta A(t) \theta(t)^*]} \quad (5.20)$$

式(5.19)と(5.20)を合わせて複素相関雑音電力 N_c と定義すると便利である。

$$N_c = N_{AP} + jN_{AF} = \frac{1}{2} \overline{\delta A(t) \theta(t)^*} \quad (5.21)$$

つまり種々の雑音電力は N_A, N_P, N_c の3つの量を計算すれば得られる。
式(5.17), (5.18), (5.21)をまとめて行列表示すると

$$\begin{pmatrix} N_A & N_c \\ N_c^* & N_P \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta A(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}^* \quad (5.22)$$

となる。なお式(5.17)~(5.22)に現れた横線は統計的平均を示す。

以上の準備をしたところで、式(5.11), (5.12)より複素 $\delta A(t), \theta(t)$ を求め式(5.22)へ代入して雑音電力を求めると次のようになる。

$$N_A = \frac{1}{2} \frac{[\operatorname{Re}(\Delta S S_D^*)]^2}{[\operatorname{Re}(S_A S_D^*)]^2 + |S_D|^4 \Omega^2} \quad (5.23)$$

$$N_P = \frac{1}{2} \frac{[\operatorname{Im}(\Delta S S_A^*)]^2 + [\operatorname{Re}(\Delta S S_D^*)]^2 \Omega^2}{\{[\operatorname{Re}(S_A S_D^*)]^2 + |S_D|^4 \Omega^2\} \Omega^2} \quad (5.24)$$

$$N_c = \frac{1}{2} \frac{-\operatorname{Re}(\Delta S S_D^*) [j \operatorname{Im}(\Delta S S_A^*) - \operatorname{Re}(\Delta S S_D^*) \Omega]}{\{[\operatorname{Re}(S_A S_D^*)]^2 + |S_D|^4 \Omega^2\} \Omega} \quad (5.25)$$

ΔS を一定にして Ω を変えたときの N_A, N_P の変化、および

$$C_c = C_{AP} + jC_{AF}$$

$$= \frac{N_c}{\sqrt{N_A N_P}} \quad (5.26)$$

で定義される相関係数の変化のようすを図5.2に示した。

N_A は $\Omega \rightarrow 0$ で一定になるのに対し N_P は Ω^{-1} で大きくなっていく。つまり $\theta(t)$ は $\Omega=0$ 付近の僅かな外乱でその値を大きく変える。

発振器の電源電圧の変動に

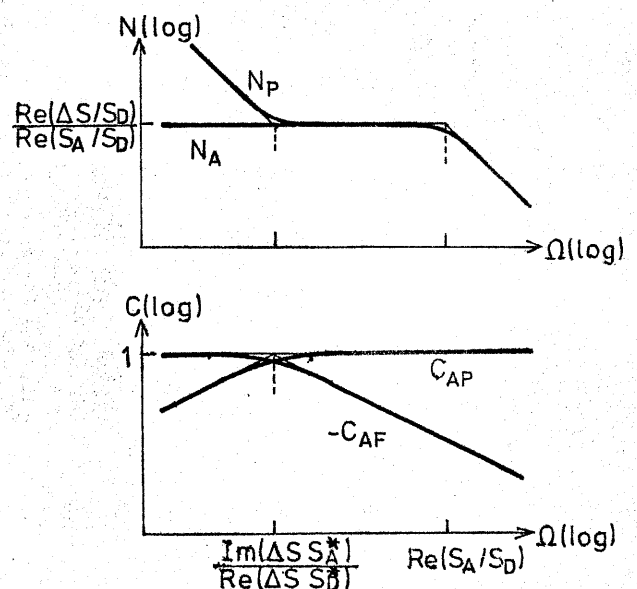


図5.2. 変調形外乱による雑音の周波数特性

起因する s_0 の変動は先に述べたように ΔS がほぼ s_A の方向を向く。従って $\text{Im}(\Delta S s_A^*) \cong 0$ となり、 N_p は $\Omega \rightarrow 0$ で有限となる。 N_p が modulation index で表わされた FM 雑音電力であるから $\Omega^2 N_p$ を考えると $\Omega \rightarrow 0$ で $\Omega^2 N_p \rightarrow 0$ となる。つまり $\Delta S \parallel s_A$ の外乱による雑音は主として振幅変動に影響し低周波の周波数変動を発生しないことがわかる。これに対し空洞共振器が機械的に振動しているような場合には $\Delta S \perp s_0$ となる。このときには $\text{Re}(\Delta S s_0^*) = 0$ となり $N_A = 0$ となる。また $\Omega \rightarrow 0$ で $\Omega^2 N_p \rightarrow \frac{1}{2} [\text{Im}(\Delta S s_A^*)]^2 / [\text{Re}(s_A s_0^*)]^2$ となる。従ってこのような外乱では AM 雑音は発生せず PM 雑音, FM 雑音のみが発生する。

以上単一周波数 Ω の外乱について考えたが、色々の周波数の成分の混ざった外乱、たとえば $\Delta S^L(t) - \Delta T^0(t)$ が白色雑音のような場合にも簡単に取扱うことができる。式 (5.6) は線形方程式であるから $\Delta S^L(t) - \Delta T^0(t)$ の Ω 成分は $s_A(t)$, $\theta(t)$ の Ω 成分だけに影響を及ぼす。従って単一周波数の結果を成分ごとに適用してあとから合成すればよい。例えば $\Delta S^L(t) - \Delta T^0(t)$ が白色雑音であるときの N_A, N_p, N_c の周波数スペクトルは図 5.2 で与えられる。また $\Delta S^L(t) - \Delta T^0(t)$ の電力スペクトルが $N(\Omega)$ で与えられるときには図 5.2 の重みを $N(\Omega)$ に与えた結果が N_A, N_p, N_c の電力スペクトルとなる。

次に外乱がもっと一般的な形

$$\Delta S^L(t) - \Delta T^0(t) = \Delta S^+ e^{j\Omega t} + \Delta S^- e^{-j\Omega t} \quad (5.27)$$

で与えられたときの雑音を算出してみる。まず式 (5.7) の右辺は

$$\begin{pmatrix} -\text{Re}(\Delta S^+ e^{j\Omega t} + \Delta S^- e^{-j\Omega t}) \\ -\text{Im}(\Delta S^+ e^{j\Omega t} + \Delta S^- e^{-j\Omega t}) \end{pmatrix} = \text{Re} \begin{pmatrix} (-\Delta S^+ - \Delta S^{-*}) e^{j\Omega t} \\ (j\Delta S^+ - j\Delta S^{-*}) e^{j\Omega t} \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

となる。 $s_A(t)$, $\theta(t)$ を複素ベクトルと考えるときは式 (5.28) 右辺の Re をはずして計算すればよい。その結果は

$$s_A(t) = j \frac{[s_0'(j\Omega)]^* \Delta S^+ - s_0'(j\Omega) \Delta S^{-*}}{\{[s_A + s_0(j\Omega)][s_0'(-j\Omega)]^*\}^I} e^{j\Omega t} \quad (5.29)$$

$$\theta(t) = -j \frac{[s_A + s_0(-j\Omega)]^* \Delta S^+ - [s_A + s_0(j\Omega)] \Delta S^{-*}}{\{[s_A + s_0(j\Omega)][s_0'(-j\Omega)]^*\}^I} e^{j\Omega t} \quad (5.30)$$

となる。緩変化準線形近似を用いると上の二式は

$$\delta A(t) = - \frac{S_D^* \Delta S^+ + S_D \Delta S^{-*}}{\text{Re}[S_A S_D^*] + j |S_D|^2 \Omega} e^{j\Omega t} \quad (5.31)$$

$$\theta(t) = \frac{(S_A^* + j S_D^* \Omega) \Delta S^+ - (S_A + j S_D \Omega) \Delta S^{-*}}{\{[\text{Re}[S_A S_D^*] + |S_D|^2 \Omega]\} \Omega} e^{j\Omega t} + \theta_0 \quad (5.32)$$

と変形できる。これから雑音電力を計算すると

$$N_A(\Omega) = \frac{|S_D|^2 N^+(\Omega) + 2 \text{Re}[S_D^{*2} N^+(\Omega)] + |S_D|^2 N^-(\Omega)}{[\text{Re}(S_A S_D^*)]^2 + |S_D|^4 \Omega^2} \quad (5.33)$$

$$N_p(\Omega) = \frac{|S_A - j S_D \Omega|^2 N^+(\Omega) - 2 \text{Re}[(S_A^{*2} + S_D^{*2} \Omega^2) N^+(\Omega)] + |S_A + j S_D \Omega|^2 N^-(\Omega)}{[\text{Re}(S_A S_D^*)]^2 + |S_D|^4 \Omega^2} \quad (5.34)$$

$$N_c(\Omega) = \frac{-S_D^* (S_A - j S_D \Omega) N^+(\Omega) + 2j \text{Im}[S_D^* S_A^* N^+(\Omega)] + 2 \text{Im}[S_D^{*2} N^+(\Omega)] \Omega + S_D (S_A^* - j S_D^* \Omega) N^-(\Omega)}{[\text{Re}(S_A S_D^*)]^2 + |S_D|^4 \Omega^2} \quad (5.35)$$

が得られる。ここで

$$N^+(\Omega) = \frac{1}{2} |\Delta S^+|^2, \quad N^{\pm}(\Omega) = \frac{1}{2} \overline{\Delta S^+ \Delta S^{\mp}}, \quad N^-(\Omega) = \frac{1}{2} |\Delta S^-|^2 \quad (5.36)$$

を表わしてゐる。例へば $N^+(\Omega) = N^-(\Omega) = \frac{1}{2} |S|^2$, $N^{\pm}(\Omega) = \frac{1}{2} \Delta S^2$ とおくと式(5.23)~(5.25)となる。式(5.33)~(5.35)のように外乱を雑音電力の形で与えておくと $N(\Omega)$ を単一同数数の雑音電力と考えてもよいし、 $\Omega \sim \Omega + d\Omega$ で定義される雑音電力密度 (雑音電力は $N(\Omega)d\Omega$ となる) と考えることもでき便利である。

以上振幅変動, 位相変動という形で表わした場合の雑音電力について述べたが, 次にこれを $e^{A(t)+j\theta(t)+j\omega_0 t}$ のスペクトル, つまり実周波数 ω でのスペクトルに変換してみる。まず $\Delta S^{\pm}(t) = \Delta T^{\pm}(t)$ が $\pm j\Omega$ の成分 (2つの単一スペクトル) しか持たないときには $\delta A(t)$, $\theta(t)$ も Ω で変動する関数になる (式(5.31), (5.32) 参照)。外乱が充分小さいと $\delta A(t)$ も小さな量となるが $\theta(t)$ の方は何とも言えない。つまり外乱が小さくても Ω が少ない場合は $\theta(t)$ は大きく変動する可能性がある。

$\theta(t)$ が 1 に比べ充分小さな変動しかしないときには

$$e^{A(t)+j\theta(t)+j\omega_0 t} \cong e^{A_0+j\theta_0+j\omega_0 t} (1 + \delta A(t) + j\delta\theta(t)) \quad (5.37)$$

と近似できる。 $\delta A(t)$, $\theta(t)$ を $e^{j\Omega t}$ で変動する複素ベクトルと考えると
 式 (5.37) はさらに

$$\begin{aligned} & a_0(t) (1 + \operatorname{Re} \delta A(t) + j \operatorname{Re} \theta(t)) \\ &= a_0(t) + \frac{1}{2} a_0(t) (\delta A(t) + j\theta(t)) + \frac{1}{2} a_0(t) (\delta A(t)^* + j\theta(t)^*) \quad (5.38) \end{aligned}$$

と変形できる。ここで第1項は ω_0 で変動するキャリアそのものを示し、
 第2項は $\omega_0 + \Omega$ で変動する上側帯波、第3項は $\omega_0 - \Omega$ で変動する
 下側帯波を表わす。つまり modulation index の小さいような外乱では
 ω_0 のキャリアと $\omega_0 \pm \Omega$ の側波帯が発生する。側波帯の電力は

$$\tilde{N}_{\text{upper}} = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} a_0(t) (\delta A(t) + j\theta(t)) \right|^2 = P_{\text{out}} \left(\frac{1}{2} N_A + \frac{1}{2} N_P + N_{AF} \right) \quad (5.39)$$

$$\tilde{N}_{\text{lower}} = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} a_0(t) (\delta A(t)^* + j\theta(t)^*) \right|^2 = P_{\text{out}} \left(\frac{1}{2} N_A + \frac{1}{2} N_P - N_{AF} \right) \quad (5.40)$$

となる。(ここでは電力の単位をもち、今までの無次元と N と異なるので \sim をつけた) ここで

$$P_{\text{out}} = \frac{1}{2} |a_0(t)|^2 \quad (5.41)$$

とる。 Ω を小さくすると N_P が支配的になるのでキャリア付近の雑音
 電力はキャリアに対し対称で $\sim \frac{1}{2} P_0^A N_P$ の値を持つことがわかる。

Ω が充分小さくて $\theta(t)$ が 1 に対し無視できないほど大きな値
 をとるときには式 (5.37) の近似は成り立たなくなり

$$e^{A(t) + j\theta(t) + j\omega_0 t} \cong e^{A_0 + j\omega_0 t} e^{j\theta(t)} (1 + \delta A(t)) \quad (5.42)$$

としか近似できない。 $e^{j\theta(t)}$ は $\theta(t)$ が大きく変化するときよく知られ
 ているように Bessel 函数で表わされる Ω 間隔のスペクトルを持つ。
 従って $1 + \delta A(t)$ のスペクトルと $e^{j\theta(t)}$ の Bessel 函数のスペクトルとの
 畳み込み総和をこれは最終的なスペクトルが得られる。

外乱がいくつかの離散的な成分より成り立つときには次のように
 する。まず各成分ごとに $\theta(t)$ を算出し (そのうち $\theta(t)$ が 1 程度以上に
 なるものの総和を $\theta_L(t)$ で表わす。また残りを集めたものを $\theta_H(t)$ で表
 わす。すると $\theta_H(t)$ は微小量であるから

$$e^{A(t) + j\theta(t) + j\omega_0 t} \cong e^{A_0 + j\omega_0 t} e^{j\theta_L(t)} (1 + \delta A(t) + j\theta_H(t)) \quad (5.43)$$

と近似できる。 modulation index が 1 程度を越えるような外乱は

比較的 Ω の小さいものが多い $e^{j\theta_L(t)}$ は一般に高い周波数成分を持つ。 $e^{j\theta_L(t)}$ のスペクトル中は変調理論よりほぼ式(5.34)で与えられる $N_p(\Omega)$ を用いて $\sqrt{N_p(\Omega)\Omega^2}$ で与えられるから、この値を各成分に対し計算しその最大値をとればよい。かぎりの $|dS/d\Omega|$ 程度の狭い中しか持たない。従って式(5.43)のスペクトルは $(1+dA(t)+j\theta_H(t))a_0(t)$ のスペクトルが上で与えられる中程度ぼけた形で表わされる。特に Ω の大きな、つまりキャリアから離れた領域のスペクトルについてはこのぼけは殆んど問題とならないから $\tilde{N}_{upper}, \tilde{N}_{lower}$ は式(5.39), (5.40)で近似してもさしつかえない。上述のスペクトルのぼけ巾を Ω_F で表わすと $\omega_0 - \Omega_F \leq \omega \leq \omega_0 + \Omega_F$ のスペクトルについては式(5.39), (5.40)の近似は成り立たなくなる。この領域のスペクトルは $a_0(t)e^{j\theta_L(t)}$ のスペクトルで近似できる。

外乱が連続的な場合にも上で述べた近似法がほぼ適用できる。特に問題になるのは外乱の各成分がランダムな場合である。しかも比較的白色に近い外乱を考える(つまり $N^+(\Omega), N^z(\Omega), N^-(\Omega)$ が Ω に対してゆくりした変動しかないものとする)。このような場合 $\theta_L(t)$ と $\theta_H(t)$ を分類するにはある周波数 Ω_c より下の成分を持つものと上の成分を持つものと分けられる。この Ω_c を出すには $\overline{\theta_H(t)^2}$ がせいぜい $\frac{4}{\pi^2}$ の程度におさまるようにする条件を使えばよい。 Ω_c はどうせかなり低い周波数なので式(5.34)の $\Omega \rightarrow 0$ の解を利用して

$$\overline{\theta_H(t)^2} \cong \int_{\Omega_c}^{\infty} \frac{|S_A|^2 N^+(\Omega) - 2\text{Re}[S_A^{*2} N^z(\Omega)] + |S_A|^2 N^-(\Omega)}{[\text{Re}(S_A S_D^*)]^2 \Omega^2} d\Omega$$

$$\cong \frac{|S_A|^2 N^+(\Omega_c) - 2\text{Re}[S_A^{*2} N^z(\Omega_c)] + |S_A|^2 N^-(\Omega_c)}{[\text{Re}(S_A S_D^*)]^2 \Omega_c} \cong \frac{4}{\pi^2} \quad (5.44)$$

この最後の等式から得られた Ω_c を用いて $e^{j\theta_L(t)}$ によるスペクトルのぼけ巾 Ω_F を計算してみると ($0 \sim \Omega_c$ で $N^+(\Omega), N^z(\Omega), N^-(\Omega)$ は殆んど変化しない)

$$\Omega_F^2 \cong \int_0^{\Omega_c} N_p(\Omega) \Omega^2 d\Omega \cong 4\Omega_c^2 / \pi^2 \quad (5.45)$$

となる。つまりぼけ巾は(5.44)で与えられる Ω_c を $\frac{\pi}{2}$ で割ったものになる。ランダムなふらつきをする $\theta^L(t)$ により PM 変調を受けそのぼけ巾がほぼ $\Omega_F (= 2\Omega_c/\pi)$ になるような雑音スペクトルは自己相関関数を利用

して解くことができる。その結果キャリアに近い周波数付近の雑音スペクトルはほぼ次式で与えられる。

$$\tilde{N}(\omega) \cong P_{out} \frac{\Omega_c/\pi}{(\omega - \omega_0)^2 + (2\Omega_c/\pi)^2} \quad (\omega_0 - \Omega_c \leq \omega \leq \omega_0 + \Omega_c) \quad (5.46)$$

この式を $-\infty \sim \infty$ の ω で積分すると P_{out} になる。つまりこの式は外乱によるゆれ動いたキャリアの作るスペクトルを表わしている。この式のキャリアから離れたところでの値はほぼ $P_{out} N_p (1 - \omega - \omega_0)/2$ で与えられる。 N_A, N_{AF} の効果がきいてくるくらいキャリアから離れるとそこでこの雑音スペクトルは前述のようにほぼ次式で近似できる。

$$\tilde{N}(\omega) \cong P_{out} \left[\frac{1}{2} N_A (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} N_p (\omega - \omega_0) + N_{AF} (\omega - \omega_0) \right] \quad (\omega_0 + \Omega_c < \omega) \quad (5.47)$$

$$\tilde{N}(\omega) \cong P_{out} \left[\frac{1}{2} N_A (\omega_0 - \omega) + \frac{1}{2} N_p (\omega - \omega_0) - N_{AF} (\omega - \omega_0) \right] \quad (\omega < \omega_0 - \Omega_c) \quad (5.48)$$

なお $\Omega_F (= 2\Omega_c/\pi)$ を飽和周波数と呼ぶこともある。

2) 直接形外乱 $\Delta a(t), \Delta b(t)$ による雑音

直接形外乱のみが存在するときには式(5.5)より次の微分方程式

$$\begin{aligned} & [S_A + S_D(D)] \delta A(t) + S_D'(D) \theta(t) \\ &= -[T_B^0 + T_D^0(D)] \operatorname{Re} \frac{\Delta a(t)}{a(t)} - T_D^0(D) \operatorname{Im} \frac{\Delta a(t)}{a(t)} - T_0^0 \frac{\Delta a(t)}{a(t)} - \frac{\Delta b(t)}{a(t)} \end{aligned} \quad (5.49)$$

が成立する。この式は変調形外乱の式(5.6)と根本的に異なり各外乱の項の分母に $a(t)$ が入ってきている。このためキャリア付近の外乱によって Locking 現象が現われる。例えは

$$\Delta a(t) = \Delta a e^{j\omega t}, \quad \Delta b(t) = \Delta b e^{j\omega t} \quad (5.50)$$

で与えられる場合、 ω が ω_0 に充分近いときには第4章で述べたように $\Delta a(t), \Delta b(t)$ により Locking が生じ

$$a(t) = e^{A_0 + \delta A + j\theta_0} e^{j\omega t} = a e^{j\omega t} \quad (5.51)$$

なる解が得られる。ここで $\delta A, \theta_0, a$ は時間によらない定数であり

$$S_A \delta A + S_D^{(1)} j(\omega - \omega_0) = -T_B^0 \operatorname{Re} \frac{\Delta a}{a} - T_0^0 \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{a} \quad (5.52)$$

を満足せねばならず。この条件は $|\omega - \omega_0|$ がある程度小さくなる
と成立たず (第4章図4.7参照)。例えば式(5.52)で T_B^0 が小さい
ときにはこの限界を定める $|\omega - \omega_0| \leq \Omega_c$ は次のようになる。

$$\Omega_c \cong \frac{|T_B^0 \Delta a + \Delta b| / |S_A|}{|a_0(t)| \operatorname{Im}(S_D^{(0)} / S_A)} \quad (5.53)$$

$\omega_0 - \Omega_c \leq \omega \leq \omega_0 + \Omega_c$ の範囲の $\Delta a(t)$, $\Delta b(t)$ に対しては式(5.51)より

$$\delta A(t) = \delta A = \text{const}$$

$$\theta(t) = (\omega - \omega_0)t + \theta_0 \quad (5.54)$$

が成り立つ。これから AM 雑音は $\Omega = 0$ の成分のみを持ち FM 雑音も
 $\Omega = 0$ の成分のみを持つことがわかる。FM 雑音が $\Omega = 0$ の成分
を持つとこれを modulation index で表わした PM 雑音は形式的に $\Omega = 0$
 $= \infty$ の大きさのステップ関数を持つ。

$|\omega - \omega_0| > \Omega_c$ なる $\Delta a(t)$, $\Delta b(t)$ に対しては Locking 現象が
生じない。従って式(5.49)右辺の $a(t)$ は

$$a(t) \cong e^{A_0 + j\theta_0 + j\omega_0 t} = a_0(t) \quad (5.55)$$

と近似して差しつかえない。実際には $a(t)$ は $a_0(t)$ の付近で僅かに
変動し、これを AM, PM 雑音となして現われるわけであるがその
効果は式(5.49)の右辺では高次の微小量となり無視できる。従って
(5.45)の右辺は

$$-[T_B^0 + T_D^0(D)] \operatorname{Re} \frac{\Delta a(t)}{a_0(t)} - T_D^0(D) \operatorname{Im} \frac{\Delta a(t)}{a_0(t)} - T_0 \frac{\Delta a(t)}{a_0(t)} - \frac{\Delta b(t)}{a_0(t)} \quad (5.56)$$

となる。こうなると式(5.56)は $\omega - \omega_0$ の周波数で変動する項になる
から先に述べた式(5.27)で書きなおすことができる。つまり式(5.56)
を $e^{j(\omega - \omega_0)t}$ で変化する成分と $e^{-j(\omega - \omega_0)t}$ で変化する成分に分けて
これを ΔS^+ , ΔS^- でおけばよい ($T = T'$ し $\omega - \omega_0 = \Omega$ とする)。その結果は

$$\Delta S^+ = -\frac{1}{2} [T_B^0 + T_D^0(j\Omega)] \frac{\Delta a(t)}{a_0(t)} + \frac{j}{2} T_D^0(j\Omega) \frac{\Delta a(t)}{a_0(t)} - T_0 \frac{\Delta a(t)}{a_0(t)} - \frac{\Delta b(t)}{a_0(t)} \quad (5.57)$$

$$\Delta S^- = -\frac{1}{2} [T_B^0 + T_D^0(-j\Omega)] \frac{\Delta a(t)^*}{a_0(t)^*} - \frac{j}{2} T_D^0(-j\Omega) \frac{\Delta a(t)^*}{a_0(t)^*} \quad (5.58)$$

となるから、これを式(5.29)~(5.36)へ代入すれば AM, PM 雑音、および

各雑音電力が得られる。

$e^{A(t)+j\theta(t)+j\omega_0 t}$ のスペクトルを考えてみよう。まず $\Delta a(t), \Delta b(t)$ が $|\omega - \omega_0| \leq \Omega_c$ の単一周波数しか持たないときはキャリアはこの ω で Lock されているからそのスペクトルは ω に鋭いスペクトルを持つ。しかもその電力は当然のことながらほぼ P_{out} で与えられる。 $\Delta a(t), \Delta b(t)$ が $|\omega - \omega_0| > \Omega_c$ で与えられる ω の単一スペクトルのときはキャリアは $\Omega = \omega - \omega_0$ で変調を受け ω_0 のキャリアと $\omega_0 \pm \Omega$ (つまり ω と $2\omega_0 - \Omega$) の上下側波帯を生じる。これは発振系の非線形な性質によって外乱の ω の周波数とキャリア周波数 ω_0 が混合して $2\omega_0 - \omega$ の信号が生じると考えてもよい。なお各周波数のスペクトルは $\omega - \omega_0 = \Omega$ として式(5.39) ~ (5.41) で表わされる。

第5.1節で述べたように $\Delta a(t), \Delta b(t)$ はショット雑音, プラズマ雑音, 熱雑音等, 本質的にランダム白色なスペクトルをとるものが多い。このような場合の解析は変調形雑音の解析で示した方法と同じような手法が用いられ, ある周波数 Ω_c で分けられた $\theta_L(t)$ と $\theta_H(t)$ で考えることができる。 Ω_c は式(5.44)で計算できるが $N^+(\Omega), N^-(\Omega), N^\pm(\Omega)$ を $\Delta a(t), \Delta b(t)$ の雑音スペクトル $\tilde{N}_{\Delta a}(\omega), \tilde{N}_{\Delta b}(\omega)$ で与えておこう。

$$N^+(\Omega) = \left\{ |T_0^0 + \frac{T_B^0}{2} + jT_D^0 \Omega|^2 \tilde{N}_{\Delta a}(\omega_0 + \Omega) + \tilde{N}_{\Delta b}(\omega_0 + \Omega) + \left| \frac{T_B^0}{2} \right|^2 \tilde{N}_{\Delta a}(\omega_0 - \Omega) \right\} / (2P_{out}) \quad (5.59)$$

$$N^-(\Omega) = \left\{ |T_0^0 + \frac{T_B^0}{2} - jT_D^0 \Omega|^2 \tilde{N}_{\Delta a}(\omega_0 - \Omega) + \tilde{N}_{\Delta b}(\omega_0 - \Omega) + \left| \frac{T_B^0}{2} \right|^2 \tilde{N}_{\Delta a}(\omega_0 + \Omega) \right\} / (2P_{out}) \quad (5.60)$$

$$N^\pm(\Omega) = \left\{ (T_0^0 + \frac{T_B^0}{2} + jT_D^0 \Omega) \frac{T_B^0}{2} \tilde{N}_{\Delta a}(\omega_0 + \Omega) + (T_0^0 + \frac{T_B^0}{2} - jT_D^0 \Omega) \frac{T_B^0}{2} \tilde{N}_{\Delta a}(\omega_0 - \Omega) \right\} / (2P_{out}) \quad (5.61)$$

特に $\Delta a(t) = 0$ のときは簡単に

$$N^+(\Omega) = \tilde{N}_{\Delta b}(\omega_0 + \Omega) / (2P_{out}), \quad N^-(\Omega) = \tilde{N}_{\Delta b}(\omega_0 - \Omega) / (2P_{out}), \quad N^\pm(\Omega) = 0 \quad (5.62)$$

となる。式(5.59) ~ (5.61)により N^+, N^-, N^\pm が決まると Ω_c が決定され式(4.46) ~ (4.48)を用いて変調形外乱の場合とほぼ同様の雑音スペクトル $\tilde{N}(\omega)$ が得られる。

$\Delta a(t) = 0$ として $\tilde{N}_{\Delta b}(\omega)$ がランダム白色の場合の $N_A(\Omega), N_P(\Omega), N_C(\Omega)$ を一例として算出してみよう。簡単のために $\Omega > \Omega_c$ の領域を考えかつ $\tilde{N}_{\Delta b}(\omega)$ を完全な白色雑音

$$\tilde{N}_{\Delta b}(\omega) = \tilde{N}_{\Delta b} = \text{const} \quad (5.63)$$

を考へてみると式(5.62), (5.63)を式(5.33)~(5.35)へ代入して

$$N_A(\Omega) = \frac{|S_D|^2}{[\operatorname{Re}(S_A S_D^*)]^2 + |S_D|^4 \Omega^2} \frac{\tilde{N}_{\Delta b}}{P_{\text{out}}} \quad (5.64)$$

$$N_P(\Omega) = \frac{|S_A|^2 + |S_D|^2 \Omega^2}{\{[\operatorname{Re}(S_A S_D^*)]^2 + |S_D|^4 \Omega^2\} \Omega^2} \frac{\tilde{N}_{\Delta b}}{P_{\text{out}}} \quad (5.65)$$

$$N_C(\Omega) = \frac{-j \operatorname{Im}(S_A S_D^*)}{\{[\operatorname{Re}(S_A S_D^*)]^2 + |S_D|^4 \Omega^2\} \Omega} \frac{\tilde{N}_{\Delta b}}{P_{\text{out}}} \quad (5.66)$$

が得られる。この結果を図5.3に示す。 $N_A(\Omega)$, $N_P(\Omega)$ は先に変調形外乱に対して計算した式(5.23), (5.24)と極めて類似の周波数特性を持つていることがわかる。図5.2と5.3のグラフが多少異なるのは式(5.24)の分子がきめる切変り周波数を分母がきめる切変り周波数より低くとした(ΔSの方向がAM性)ため、ΔSが S_A と直角な方向をとるFM性外乱のときは切変り周波数が反転し2つの図は3分ほど同じ形となる。

本節の最後に発振器の増幅作用について述べる。負荷側から発振器に向、てある微弱な信号(周波数 ω と $b(t)$)を入力したとき発振器からは次の3つの波が出てくる。ただし $\Omega = \omega - \omega_0$ (正負いづれでもよい)とし $|\Omega| > \Omega_c$ とする。

$a_0(t)$ at ω_0

$$\frac{j S_A^* - 2 S_D^* \Omega}{[\operatorname{Re}(S_A S_D^*) + j |S_D|^2 \Omega] \Omega} \Delta b(t) \quad \text{at } \omega_0 + \Omega$$

$$\frac{j S_A}{[\operatorname{Re}(S_A S_D^*) + j |S_D|^2 \Omega] \Omega} \Delta b(t) \quad \text{at } \omega_0 - \Omega$$

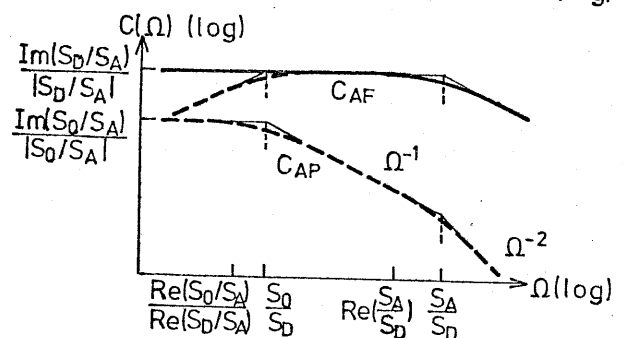
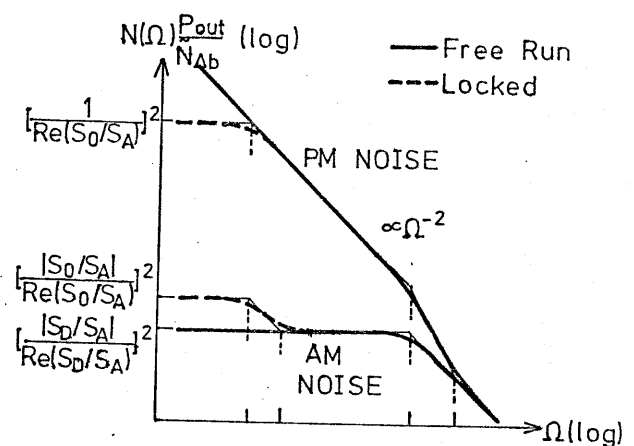


図5.3. ランダム白色外乱に対する雑音電力

このうちの2式を見ると Ω の低いところで利得のあることがわかる。

$$G \cong \frac{|S_A|}{2 \operatorname{Re}(S_A S_D^*) |\Omega|} \quad (5.67)$$

また位相は $\Delta b(t)$ よりほぼ $\frac{\pi}{2} T$ だけ進む。式(3.33)で示した簡単な発振器の場合 $G \cong \omega_0 / 12Q\Omega$ で与えられる。従って $|\omega - \omega_0| \cong \omega_0 / 12Q$ の領域の $\Delta b(t)$ に対しては増幅現象があることがわかる。なお増幅波は $\omega_0 \pm \Omega$ と2ヶ所に発生する。 Ω_c は式(5.52)より

$$\Omega_c \cong \frac{|S_A|}{\operatorname{Re}(S_A S_D^*)} \frac{|\Delta b(t)|}{|a_0(t)|} \quad (5.68)$$

この Ω_c を形式的に増幅波の式へ代入すると増幅波の振幅は上下側り波帯とも $|a_0(t)|/2$ となる。 Ω_c は Locking 限界を定める値であるから "Locking 現象は、注入波を発振器が増幅してキャリア自身の大きさ程度になると現われる" ということもできる。

本節の解析では緩変化導線形近似を適宜用いたが、発振器の雑音は本質的にキャリア周辺にしか存在せずその意味で $D = j\Omega$ の小さいという緩変化近似は極めて有効である。

5.3 注入同期系の雑音

注入同期系の雑音は前節で述べた自由発振系の雑音に比べ非常に容易に解析することができる。同期信号の振幅 E_0 は外乱に比べずっと大きな値を持っていると考えられるから位相 $\theta(t)$ は $E_0 e^{j\omega_0 t}$ の注入信号で Lock されて定まる θ_0 の付近を僅かにしか変動しない。従って外乱のある場合にも第4章で述べたような近似が使える。

$$a(t) \cong a_0(t) (1 + \delta A(t) + j\delta\theta(t)) \quad (5.69)$$

この式を雑音の基本式(5.5)へ代入して一次の微分層までとると

$$\begin{aligned} [S_0 + S_A + S_D(D)] \delta A(t) + [jS_0 + S_D'(D)] \delta\theta(t) = -[\Delta S^L(t) - \Delta T^O(t)] \\ - [T_B^O + T_D^O(D)] \operatorname{Re} \frac{\Delta a(t)}{a_0(t)} - T_D^O(D) \operatorname{Im} \frac{\Delta a(t)}{a_0(t)} - T_0^O \frac{\Delta a(t)}{a_0(t)} - \frac{\Delta b(t)}{a_0(t)} \end{aligned} \quad (5.70)$$

が得られる。ここで0次の項は式(4.6)を用いて消去した。この方程式は完全に線形であり $\Delta S^L(t)$, $\Delta T^O(t)$ の $\pm\Omega$ 成分, $\Delta a(t)$, $\Delta b(t)$ の $\omega_0 \pm \Omega$ 成分は $\delta A(t)$, $\delta\theta(t)$ の $\pm\Omega$ 成分としか結合しない。前節で示したよ

うにまず式(5.70)の右辺をまとめて $e^{j\Omega t}$ と $e^{-j\Omega t}$ の成分で表わす。

$$[\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_A + \mathcal{S}_D(D)] \delta A(t) + [j\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}'_D(D)] \delta \theta(t) = \Delta \mathcal{S}^+ e^{j\Omega t} + \Delta \mathcal{S}^- e^{-j\Omega t} \quad (5.71)$$

前節式(5.27)~(5.30)と導いたのと同様の手順で複素ベクトルで表わされた $\delta A(t)$, $\delta \theta(t)$ を求めると次のようになる。

$$\delta A(t) = j \frac{[j\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}'_D(-j\Omega)]^* \Delta \mathcal{S}^+ - [j\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}'_D(j\Omega)] \Delta \mathcal{S}^-}{\{[\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_A + \mathcal{S}_D(j\Omega)][j\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}'_D(-j\Omega)]^*\}^{\frac{1}{2}}} e^{j\Omega t} \quad (5.72)$$

$$\delta \theta(t) = -j \frac{[\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_A + \mathcal{S}_D(-j\Omega)]^* \Delta \mathcal{S}^+ - [\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_A + \mathcal{S}_D(j\Omega)] \Delta \mathcal{S}^-}{\{[\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_A + \mathcal{S}_D(j\Omega)][j\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}'_D(-j\Omega)]^*\}^{\frac{1}{2}}} e^{j\Omega t} \quad (5.73)$$

これらの式は先に前節で自由発振系に対して示した式(5.29), (5.30)と非常に似てゐる。事実 Ω がある程度大きな領域に対してはこれらの値は殆んど一致する。 Ω の小さい領域では式(5.72), (5.73)中の \mathcal{S}_0 の項がきいてきてこれらの値は式(5.29), (5.30)と大きくずれてくる。特に $\Omega \rightarrow 0$ で式(5.30)の $|\theta(t)| \rightarrow \infty$ になるのに対し式(5.73)の $\delta \theta(t)$ は有限値に収束する。従つて $\Delta \mathcal{S}^+$, $\Delta \mathcal{S}^-$ が充分小さな量であるときには $\delta A(t)$, $\delta \theta(t)$ も確かに小さな量となり式(5.69)の近似が成立することになる。

式(5.72), (5.73)より緩変化準線形近似を用いて雑音電力を計算すると

$$N_A(\Omega) = \frac{|\mathcal{S}_0 - j\mathcal{S}_D \Omega|^2 N^+(\Omega) + 2 \operatorname{Re}[(\mathcal{S}_0^2 + \mathcal{S}_D^2 \Omega^2)^* N^+(\Omega)] + |\mathcal{S}_0 + j\mathcal{S}_D \Omega|^2 N^-(\Omega)}{|\operatorname{Re}[(\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_A) \mathcal{S}_0^*] + 2j \operatorname{Re}[(\mathcal{S}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{S}_A) \mathcal{S}_D^*] \Omega - |\mathcal{S}_D|^2 \Omega^2|^2} \quad (5.74)$$

$$N_P(\Omega) = \frac{|\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_A - j\mathcal{S}_D \Omega|^2 N^+(\Omega) - 2 \operatorname{Re}[(\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_A)^2 + \mathcal{S}_D^2 \Omega^2]^* N^+(\Omega) + |\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_A + j\mathcal{S}_D \Omega|^2 N^-(\Omega)}{|\operatorname{Re}[(\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_A) \mathcal{S}_0^*] + 2j \operatorname{Re}[(\mathcal{S}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{S}_A) \mathcal{S}_D^*] \Omega - |\mathcal{S}_D|^2 \Omega^2|^2} \quad (5.75)$$

$$N_C(\Omega) = j \frac{(\mathcal{S}_0 - j\mathcal{S}_D \Omega)^* (\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_A - j\mathcal{S}_D \Omega) N^+(\Omega) - 2j \operatorname{Im}[(\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_A)^* \mathcal{S}_0^* N^+(\Omega)]}{|\operatorname{Re}[(\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_A) \mathcal{S}_0^*] + 2j \operatorname{Re}[(\mathcal{S}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{S}_A) \mathcal{S}_D^*] \Omega - |\mathcal{S}_D|^2 \Omega^2|^2} \\ - \frac{(\mathcal{S}_0 + j\mathcal{S}_D \Omega) (\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_A + j\mathcal{S}_D \Omega)^* N^-(\Omega)}{|\operatorname{Re}[(\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_A) \mathcal{S}_0^*] + 2j \operatorname{Re}[(\mathcal{S}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{S}_A) \mathcal{S}_D^*] \Omega - |\mathcal{S}_D|^2 \Omega^2|^2} \quad (5.76)$$

が得られる。とりとじて前節で自由発振系に対して求めた図5.3と同じ条件、つまり $\Delta \mathcal{S}^+$, $\Delta \mathcal{S}^-$ として白色ガウス雑音と仮定したときの $N_A(\Omega)$, $N_P(\Omega)$, $C_{AP}(\Omega)$, $C_{AF}(\Omega)$ の概略の周波数特性を同じ図5.3に破線で

示した。図からわかるように $\Omega_L (\cong |S_{01}|/|S_{D1}|)$ より大きな Ω に対しては同期信号のあるときとないときの雑音電力には殆んど差が現われぬ。また $\Omega \lesssim \Omega_L$ の領域では同期の影響が現われ特に $N_p(\Omega)$ は大きく軽減される。 Ω_L は第4章式(4.31)で示される同期引込限界の周波数差 $|\omega_0 - \omega_{F1}|$ とほぼ同じ値を持つ。

$$\Omega_L \cong \frac{|S_A|}{\text{Re}(S_A S_D^*)} \sqrt{\frac{P_{\text{Lock}}}{P_{\text{out}}}} \quad (5.77)$$

この Ω_L を同期巾と呼ぶ。

$e^{A(t) + j\theta(t) + j\omega_0 t}$ のスペクトルも同期発振系については簡単に得られる。式(5.69)の近似がかなり厳密に成り立つので雑音スペクトルについてもかなり厳密に次式で与えられる。(式(5.39), (5.40)参照)

$$\tilde{N}(\omega_0 + \Omega) = P_{\text{out}} \left(\frac{1}{2} N_A(\Omega) + \frac{1}{2} N_p(\Omega) + N_{AF}(\Omega) \right) \quad (\text{上側波帯}) \quad (5.78)$$

$$\tilde{N}(\omega_0 - \Omega) = P_{\text{out}} \left(\frac{1}{2} N_A(\Omega) + \frac{1}{2} N_p(\Omega) - N_{AF}(\Omega) \right) \quad (\text{下側波帯}) \quad (5.79)$$

この結果を利用すると先に求めた式(5.74)~(5.76)の N_A, N_p, N_c を代入して実周波数での雑音スペクトルを得る。特に S_0 が S_A に比べ小さくかつ $|\Omega| \lesssim \Omega_L$ の領域ではほぼ次のようになる。

$$\tilde{N}(\omega) = \frac{|S_A|^2}{[\text{Re}(S_A S_0^*)]^2 + [\text{Re}(S_A S_D^*)]^2 \Omega^2} \tilde{N}_{\Delta b} \quad (\omega_0 - \Omega_L \leq \omega \leq \omega_0 + \Omega_L) \quad (5.80)$$

ここで $\tilde{N}_{\Delta b}$ は $\Delta S^+, \Delta S^-$ を $\Delta b(t)$ で表わしたときの雑音電力である。なお式(5.69)よりわかるように同期発振系ではキャリアは揺らぐことなく ω_0 に δ 関数状の鋭いピークを持つ。

6. 多発振器の相互同期系

出力を増強するために、幾台もの発振器を相互に同期させながら一斉に発振させる方法がある。この方法は商用周波数ではすでに広く利用されているが、マイクロ波帯でも半導体発振器の出力増強の一手段として用いられる。マイクロ波帯では僅かな線路長でも大きな位相回転が生じたり、また発振器の特性がバラつくことが多いので商用周波数帯の相互同期系の解析よりも一般的な解析法が必要となる。以下に系の安定性を中心にした解析を示す。

6.1. 多発振器の相互同期系の基本方程式

幾台もの発振器を図6.1に示すように1つの結合回路で結合し、相互に同期をかけて単一周波数 ω_0 で発振させる系を考える。このような系の安定性は第4章に述べた注入同期系の解析に比しどの発振器も同期信号によりLockされているため簡単な形では得られない。しかし基本となる微分方程式は行列表示を用いれば自由発振系の場合と同じような手順で得ることができる。

相互同期系は通常出力増強の目的で使われることが多い。従って系内には通常1個以上の共通負荷が含まれる。ここではこのような共通負荷は結合回路に

含まれているとする。図6.1に示すように n 台の発振器が n 開口の結合回路に接続されている場合を考える。各発振器の周波数 ω_0 における最適な結合回路への入射波振幅を A_{oi} ($i=1, 2, \dots, n$) とする。すると結合回路は次のことを考えて設計され

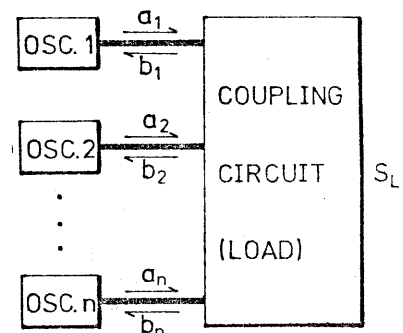


図6.1. n 台の発振器の相互同期系

なければならぬ。

1) 周波数 ω_0 の定常状態を考えたとき、各開口からの入射波振幅が A_{0i} で定常平衡になること。

2) 平衡動作点付近で動的に安定であること。

3) 共通負荷に現われる雑音が最少になること。

この3条件のうちで3)の条件は後に第7章で調べることにして本章では1)と2)の条件について考察する。

第 i 番目の発振器の入射波、反射波を $a_i^0(t)$, $b_i^0(t)$ とすると第3章式(3.1)と同様に次式でその応答特性を表わすことができる。

$$a_i^0(t) = [T_{0i}^0 + T_{0i}^0 \delta B_{\alpha}^0(t) + T_{D_i}^0(D) \delta B_{\alpha}^0(t) + T_{D_i}^{10}(D) \theta_{\beta}^0(t)] b_i^0(t) \quad (6.1)$$

一方結合回路は線形と仮定するとよく知られているように、その特性を n 行 n 列で表わすことができる。一般にその i, j 要素は周波数特性を持ち $S_{ij}^L(j\omega_0)$ のような形をとる。そのとき結合回路の入射波、反射波を $a_i^L(t)$, $b_i^L(t)$ とし

$$b_i^L(t) = \sum_{j=1}^n S_{ij}^L(D) a_j^L(t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6.2)$$

あるいは行列表示をして

$$b^L(t) = [S^L(D)] a^L(t) \quad (6.3)$$

が成り立つ。第3章と同じように

$$b_i^0(t) = a_i^L(t) \equiv a_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6.4)$$

なる $a_i(t)$ の振幅 $A_i(t)$, 位相 $\theta_i(t)$ の $2n$ 個の変数を用いる。 $\delta A_i^L(t)$ ($= A_i^L(t) - A_{0i}^L = A_i^L(t) - A_{0i}$) と $D\theta_{\alpha i}^L(t) (= D\theta_i(t))$ が充分小さい量として、式(6.2)を微小偏移近似で表わすと $i=1, 2, \dots, n$ に対して

$$b_i^L(t) = \sum_{j=1}^n [S_{0ij}^L + S_{Aij}^L \delta A_j^L(t) + S_{Dij}^L(D) \delta A_j^L(t) + S_{Dij}^{1L}(D) \theta_{\alpha j}^L(t)] a_j^L(t) \quad (6.5)$$

となる。 $T = T^L$ 式(2.39)と同様に

$$S_{0\alpha ij}^L = S_{\alpha ij}^L(j\omega_0), S_{Aij}^L = 0, S_{Dij}^L(D) = -j S_{Dij}^{1L}(D) = S_{\alpha ij}^L(D + j\omega_0) - S_{\alpha ij}^L(j\omega_0) \quad (6.6)$$

である。式(6.1), (6.5)を次の n 個の平衡式

$$a_i^0(t) = b_i^L(t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6.7)$$

へ代入すると $i=1, 2, \dots, n$ の n 本の微分方程式

$$\sum_{j=1}^n [S_{0ij} + S_{Aij} \delta A_j(t) + S_{Dij}(D) \delta A_j(t) + S'_{Dij}(D) \theta_j(t)] a_j(t) = 0 \quad (6.8)$$

が得られる。ここで

$$S_{0ij} = S_{0ij}^L - T_{0i}^0 \delta_{ij}, \quad S_{Aij} = S_{Aij}^L - T_{Bi}^0 \delta_{ij}$$

$$S_{Dij}(D) = S_{Dij}^L(D) - T_{Di}^0(D) \delta_{ij}, \quad S'_{Dij}(D) = S'_{Dij}{}^L(D) - T_{Di}^{10}(D) \delta_{ij} \quad (6.9)$$

である。 δ_{ij} は Kronecker δ である。 また $a_j(t)$ は $\delta A_j(t)$ と $\theta_j(t)$ の関数で

$$a_j(t) = e^{A_j(t) + j\theta_j(t) + j\omega_0 t} = e^{A_{0j} + \delta A_j(t) + j\theta_j(t) + j\omega_0 t} \quad (6.10)$$

である。 こうして得られた式 (6.8) が相互同期系の基本微分方程式である。

まず式 (6.8) を用いて定常状態で満足されるべき条件を求めてみよう。

$A_j(t) = A_{0j}$, $\theta_j(t) = \theta_{0j}$, つまり $a_j(t)$ が

$$a_{0j}(t) = e^{A_{0j} + j\theta_{0j} + j\omega_0 t} = a_{0j} e^{j\omega_0 t} \quad (6.11)$$

で系が仮に定常平衡になったとすると、これらの値を式 (6.8) へ代入して次の等式が $i=1, 2, \dots, n$ に対して成り立たねばならない。

$$\sum_{j=1}^n S_{0ij} a_{0j} = 0 \quad (6.12)$$

あるいは行列表示をして

$$[\beta_0] 1] = 0] \quad (6.13)$$

が得られる。ここで

$$[\beta_0] = \begin{pmatrix} (S_{011}^L - T_{01}^0) a_{01} & S_{012}^L a_{02} & \dots \\ S_{021}^L a_{01} & (S_{022}^L - T_{02}^0) a_{02} & \dots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

$$1] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad 0] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

である。 $[S_0^L]$ つまり $[S_0^L(j\omega_0)]$ は少なくともこの式 (6.12) あるいは式 (6.13) を

満足しなければならぬ。なお式(6.12)を行列表示する際 $[S_0]a_0=0$ としてもよかつたが、わざわざ $[\beta_0]$ という新しい行列を導入した理由については動的安定性を考慮するときに明らかにされよう。

式(6.1)を定常状態で考えてみると

$$a_{oi}^0(t) = T_{oi}^0 b_{oi}^0(t) \quad (6.16)$$

となるが、これを利用して結合回路へ供給される全電力 P_0 を算出することができ、式(2.38)と同様に

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (|a_{oi}^L(t)|^2 - |b_{oi}^L(t)|^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (|b_{oi}^0(t)|^2 - |a_{oi}^0(t)|^2) \\ &= \sum_{i=1}^n (1 - |T_{oi}^0|^2) \frac{|b_{oi}^0|^2}{2} = \sum_{i=1}^n P_{oi} \end{aligned} \quad (6.17)$$

となる。つまり結合回路に供給される全電力 P_0 は各発振器の出力 P_{oi} の和となる。従って結合回路をきちんと設計して各発振器が最適の T_{oi}^0 あるいは $B_{oi}^0 (= A_{oi})$ で発振すれば必ず合成率は100%となる。多くの場合、合成率が余り上らないときがあるが、これは各発振器の共振器の中心周波数が ω_0 と僅かに異なっていて T_{oi}^0 が思ったよりすばらしい反射損が生じているか、あるいは結合回路に入った電力が共通負荷以外の場所で消費されているかのどちらかに起因する。

式(6.13)より次の重要な式が得られる。

$$|[\beta_0]| = 0 \quad (6.18)$$

つまり $[\beta_0]$ の行列式は0である。

式(6.12)で a_{oj} の位相を一齐に一定量だけ動かしても等号は成立する。つまり式(6.13)の θ_{oj} のかわりに $\theta_{oj} + \theta_0$ (θ_0 は j によらない一定値) を代入しても式(6.12)は成立する。このように相互同期系の位相には1つだけ自由度がある。(一般には自由度は1つとはかまわれないが、場合によると2つ以上になることがある。しかしそのような場合は2つ以上の独立した相互同期系が混在することと等価的に同じになる。) この1つの自由度は1台の発振器の自由発振系でも位相不定という形で現れたものであつた。これ以上の自由度はないと考えてよいから相互同期している系内の任意の2つの発振器の位相差 $\theta_{oi} - \theta_{oj}$ は自由にならない(過渡的には一定でなくなる)。従って相互同期系が安定であれば n 台の発振器はあたかも1台の発振器のようにふるまう。

系に外乱が加わったのちに再びもとの状態に復帰できるかどうか、つまり系の安定性については式(6.8)の微分方程式を $A_j(t), \theta_j(t)$ について解けばよい。しかし $a_j(t)$ が $A_j(t), \theta_j(t)$ の指数関数であり非線形であるので容易には解けない。そこで第4章で示した局所安定性を調べる方法を用いてこの方程式をとく。外乱を充分小さいものとするば $\delta A_j(t) = A_j(t) - A_{0j}$, $\delta \theta_j(t) = \theta_j(t) - \theta_{0j}$ も微小量と考えられ、高次の微小量を無視すればこれら $2n$ 変数に対し線形微分方程式が得られる。式(6.8)の $a_j(t)$ を

$$a_j(t) = e^{\delta A_j(t) + \delta \theta_j(t)} a_{0j} e^{j\omega_0 t} \quad (6.19)$$

とあき $\delta A_j(t), \delta \theta_j(t)$ の一次の項までとると $i=1, 2, \dots, n$ に対し

$$\sum_{j=1}^n [S_{0ij} + S_{Aij} + S_{Dij}(D)] a_{0j} \delta A_j(t) + \sum_{j=1}^n [j S_{0ij} + S_{D'ij}(D)] a_{0j} \delta \theta_j(t) = 0 \quad (6.20)$$

が得られる。なお0次の項は式(6.12)を用いて消去した。これを行列表示すると、

$$\left([\beta_0] + [\beta_A] + [\beta_D(D)] \quad ; \quad j[\beta_0] + [\beta_{D'}(D)] \right) \begin{pmatrix} \delta A(t) \\ \delta \theta(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (6.21)$$

ここで最初の“(から)”までは n 行 $2n$ 列の行列でありその中に現れる各 $n \times n$ 行列は次のようである。

$$[\beta_A] = \begin{pmatrix} -T_{B1}^0 a_{01} & 0 & \dots \\ 0 & -T_{B2}^0 a_{02} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

$$[\beta_D(D)] = \begin{pmatrix} (S_{D11}^L(D) - T_{D1}^0(D)) a_{01} & S_{D12}^L(D) a_{02} & \dots \\ S_{D21}^L(D) a_{01} & (S_{D22}^L(D) - T_{D2}^0(D)) a_{02} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

$$[\beta_{D'}(D)] = \begin{pmatrix} (S_{D11}^{L'}(D) - T_{D1}^{10}(D)) a_{01} & S_{D12}^{L'}(D) a_{02} & \dots \\ S_{D21}^{L'}(D) a_{01} & (S_{D22}^{L'}(D) - T_{D2}^{10}(D)) a_{02} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

また $[\beta_0]$ は式 (6.14) により定義されている。次の“(”から)”までは $2n$ 次元縦ベクトルで α 中に現われる n 次元ベクトルは

$$\delta A(t) = \begin{pmatrix} \delta A_1(t) \\ \delta A_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \delta \theta(t) = \begin{pmatrix} \delta \theta_1(t) \\ \delta \theta_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

である。 $\delta A_j(t), \delta \theta_j(t)$ が実数であることを考慮すると式 (6.20) を実部、虚部分けて次の $2n$ 個の方程式が得られる。 ($i=1, 2, \dots, n$)

$$\sum_{j=1}^n \{ [\delta_{0ij} + \delta_{Aij} + \delta_{Dij}(D)] a_{0j} \}^R \delta A_j(t) + \{ [j \delta_{0ij} + \delta'_{Dij}(D)] a_{0j} \}^R \delta \theta_j(t) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n \{ [\delta_{0ij} + \delta_{Aij} + \delta_{Dij}(D)] a_{0j} \}^I \delta A_j(t) + \{ [j \delta_{0ij} + \delta'_{Dij}(D)] a_{0j} \}^I \delta \theta_j(t) = 0 \quad (6.26)$$

あるいは行列表示すると

$$\left[\begin{pmatrix} \text{Re}[\beta_0] & -\text{Im}[\beta_0] \\ \text{Im}[\beta_0] & \text{Re}[\beta_0] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Re}[\beta_A] & 0 \\ \text{Im}[\beta_A] & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [\beta_D(D)]^R & [\beta'_D(D)]^R \\ [\beta_D(D)]^I & [\beta'_D(D)]^I \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \delta A(t) \\ \delta \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

となる。この式は今後幾度も出てくるので簡単に

$$(\{\beta_0\} + \{\beta_A\} + \{\beta_D(D)\}) \delta(t) = 0 \quad (6.28)$$

と表わすことにする。 $\{\beta_0\}, \{\beta_A\}, \{\beta_D(D)\}$ はそれぞれ式 (6.27) 中の $2n \times 2n$ の各行列を表わし、 $\delta(t), 0$ は同じく $2n$ 次元の縦ベクトルを表わす。

系の安定性は第3章、第4章における解析と同様式 (6.28) の特性方程式

$$|\{\beta_0\} + \{\beta_A\} + \{\beta_D(D)\}| = 0 \quad (6.29)$$

のすべての根 D_i を調べればわかる。式 (6.29) は位相のもつ一つの自由度と深い関連を持つ $D=0$ なる根を持つ。それは次のようにしてわかる。行列 $(\{\beta_0\} + \{\beta_A\})$ について

$$(\{\beta_0\} + \{\beta_A\}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{Im}[\beta_0] & 1 \\ \text{Re}[\beta_0] & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.30)$$

が成り立つ (後の等号は式 (6.13) の実部と虚部をそれぞれ得られる)。ところがこの式は見方を変えると式 (6.28) で $D=0$ ($\{\beta_D(0)\} = 0$ であることに注意),

$$\delta(t) = \begin{pmatrix} \delta A(t) \\ \delta \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

と書いたものに等しい。従って式(6.28)は $D=0$ と一つの固有値として持ち(従って式(6.29)の1つの根である), その固有ベクトルは式(6.31)で与えられることが結論として得られる。式(6.31)は $\delta A_i(t)=0$, $\delta \theta_i(t)=\theta_0$ ($i=1, 2, \dots, n$, また θ_0 は i によらない一定値)なる解のあることを意味する。つまりすべての発振器の位相が一定値だけずれた状態に対応している。従って外乱が加わると安定な系でも位相がそらってしまう可能性があるのである。

$D=0$ の根を D_1 とすると, D_1 以外の根について

$$\operatorname{Re}(D_i) < 0 \quad (i=2, 3, \dots) \quad (6.32)$$

の成り立つとき相互同期が安定に継続する。これら D_i を式(6.29)から求めるのは一般には容易ではない。緩変化近似を用いて発振器や結合回路の特性を D の1次の項までで表わしても式(6.29)は $2n$ 次方程式になってしまう。一根 D_1 がわかっているので $(2n-1)$ 次方程式が解ければよいのであるがそれでも大変である。各行列の値が数値で与えられているときには電子計算機等の手段を用いて解かざるを得ない。しかしいくつかの仮定を追加すればこれらの根を求めることが可能である。以下の節ではこうして安定性を調べてみる。

6.2. 対称な相互同期系

実用的な相互同期系には各開口に対して対称性のよいものが多い。つまり殆んど同じ特性を持つ発振器を n 台同相で発振させ全く対等な n 開口を持つ結合回路へ電力を送り込む方式である。

例は図6.2に示すようなものが考えられる。a)は直列に発振器を接続して電圧を n 倍にすることにより n 倍の出力を得る方法であり, b)は同様に発振器を並列にする商用周波帯でよく用いられる方法である。また c)は Magic-T をいくつか用い右と左のアームから来る電力を合せて上のアームへ出しトナメント方式で一番上の共通負荷へ n 倍の電力を供給する方法である。この方式は一般に $n=2^m$ の形をとる。また Magic-T の下のアームはいわゆる結合アームで, 左右の位相が合わないときにだけ,

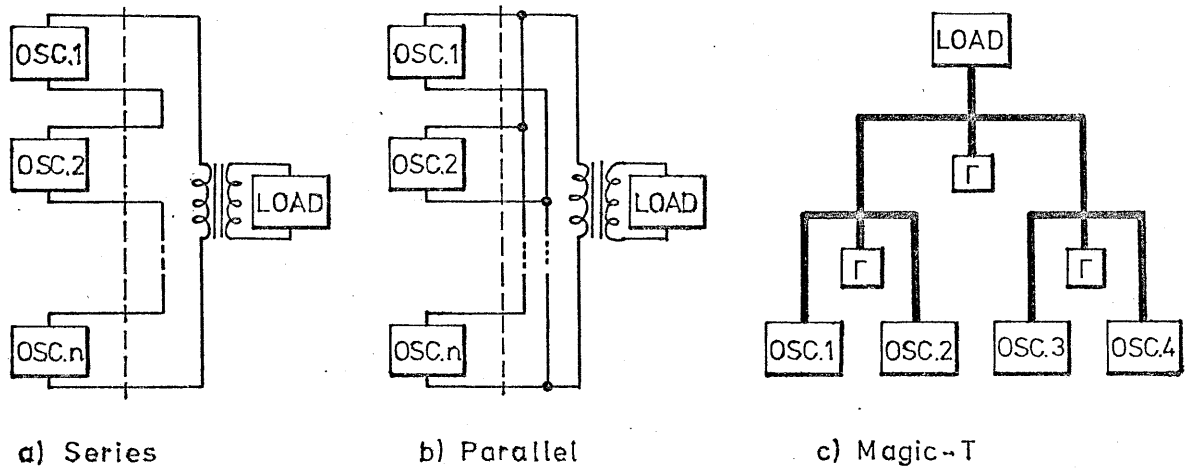


図6.2. 対称な構造を持つ相互同期系の例

反射係数 Γ により、反射波を発生して相互同期をかける役をする。 $T_{oi} = 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) とすると周波数 ω_0 での定常状態で a), b), c) のどの回路の共通負荷は R_0 となるように選ばなければならない。

一般に共通負荷が $\omega \cong \omega_0$ 付近で

$$R_0 \left(1 + 2jQ_L e^{j\varphi_L} \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right) \quad (6.33)$$

のようなインピーダンスの周波数依存性、つまり反射係数で表わして

$$jQ_L e^{j\varphi_L} \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \quad (6.34)$$

を持つとすると (例えば共通タンク回路を持つような場合)、図6.2の a), b), c) の $[S_0^L]$, $[S_A^L]$, $[S_D^L(D)]$, $[S_D'^L(D)]$ は次のようにまとめられる。

$$[S_0^L] = \begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{n})\Gamma & -\frac{1}{n}\Gamma & \dots \\ -\frac{1}{n}\Gamma & (1 - \frac{1}{n})\Gamma & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots \end{pmatrix}, \quad [S_A^L] = 0$$

$$[S_D^L(D)] = -j[S_D'^L(D)] = \begin{pmatrix} \frac{Q^L e^{j\varphi_L}}{n\omega_0} D & \frac{Q^L e^{j\varphi_L}}{n\omega_0} D & \dots \\ \frac{Q^L e^{j\varphi_L}}{n\omega_0} D & \frac{Q^L e^{j\varphi_L}}{n\omega_0} D & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

ここで a) は上式で $\Gamma=1$ とすればよい。また b) は $\Gamma=-1$ とすればよい。従って $n=2^m$ の発振器数のときは c) の回路の $\Gamma=1$ としたものと a) が全く同じ特性を持ち、c) の回路の $\Gamma=-1$ としたものが b) の特性と一致する特性を持つ。

式(6.35)の各行列を見ると、どの行列も

$$\begin{pmatrix} d & c & c & \cdots \\ c & d & c & \cdots \\ c & c & d & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

の形をしている。このように対称な構造を持つ結合回路の $[S_0^L]$, $[S_D^L(D)]$, $[S_D'^L(D)]$ は必ず式(6.36)のような形をとる。次に $[S_0]$, $[S_A]$, $[S_D(D)]$, $[S_D'(D)]$ は発振器の諸特性がこれらの対角要素にしか関係しないことからやはり式(6.36)の形をとる。さらに

$$a_{0i} = a_0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6.37)$$

つまり各発振器が同相、同振幅で発振しているとすると

$$\begin{aligned} [\beta_0] &= [S_0] a_0, & [\beta_A] &= [S_A] a_0, \\ [\beta_D(D)] &= [S_D(D)] a_0, & [\beta_D'(D)] &= [S_D'(D)] a_0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

となるから、これらの行列も式(6.36)の形をとる。特に $[\beta_A]$ は対角要素のみを持つ行列となる。

一般に $[S_0]$, $[S_A]$, $[S_D(D)]$, $[S_D'(D)]$ が次のように与えられるときを考える。

$$\begin{aligned} [S_0] &= \begin{pmatrix} (1-\frac{1}{n})S_0 & -\frac{1}{n}S_0 & \cdots \\ -\frac{1}{n}S_0 & (1-\frac{1}{n})S_0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, & [S_A] &= \begin{pmatrix} -T_B & 0 & \cdots \\ 0 & -T_B & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \\ [S_D(D)] &= \begin{pmatrix} \frac{S_D(D)}{n} - T_D(D) & \frac{S_D(D)}{n} & \cdots \\ \frac{S_D(D)}{n} & \frac{S_D(D)}{n} - T_D(D) & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, & [S_D'(D)] &= \begin{pmatrix} \frac{S_D'(D)}{n} - T_D'(D) & \frac{S_D'(D)}{n} & \cdots \\ \frac{S_D'(D)}{n} & \frac{S_D'(D)}{n} - T_D'(D) & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.39)$$

ここで $[\delta_0]$ が少し複雑な形をしているのは式(6.37)の条件下で定常平衡条件式(6.13)が満足されるよう各項が選ばれているからである。式(6.37), (6.39)を式(6.38)へ代入すると $[\beta_0], [\beta_A], [\beta_D(D)], [\beta'_D(D)]$ が得られ、さらに $\{\beta_0\}, \{\beta_A\}, \{\beta_D(D)\}$ が得られる。これらを式(6.29)へ代入して得られる $2n \times 2n$ の行列式は幸いなことに n 個の 2×2 の行列式に分解することができる。($2n \times 2n$ の行列式(6.29)の $2 \sim n$ 列の和を1列に加え、 $n+2 \sim 2n$ 列の和を $n+1$ 列に加える。次に $2 \sim n$ の各行から1行を引く、 $n+2 \sim 2n$ の各行から $n+1$ 行を引く。こうして得られた行列式の行および列をそれぞれ入れ替えて i 行と $n+i$ 行、 i 列と $n+i$ 列が組になるようにすると直ちに次の因数分解が得られる。)

$$\begin{vmatrix} [-T_B a_0 + \delta_D(D) a_0 - T_D(D) a_0]^R & [\delta'_D(D) a_0 - T'_D(D) a_0]^R \\ [-T_B a_0 + \delta_D(D) a_0 - T_D(D) a_0]^I & [\delta'_D(D) a_0 - T'_D(D) a_0]^I \end{vmatrix} \\ \times \begin{vmatrix} [\delta_0 a_0 - T_B a_0 - T_D(D) a_0]^R & [j\delta_0 a_0 - T'_D(D)]^R \\ [\delta_0 a_0 - T_B a_0 - T_D(D) a_0]^I & [j\delta_0 a_0 - T'_D(D)]^I \end{vmatrix}^{n-1} = 0 \quad (6.40)$$

あるいは

$$\{[-T_B + \delta_D(D) - T_D(D)][\delta'_D(D) - T'_D(D)]^C\}^I \times \{[\delta_0 - T_B - T_D(D)][j\delta_0 - T'_D(D)]^C\}^{I(n-1)} = 0 \quad (6.41)$$

となる。この式は面白いことに前の項が自由発振の安定性判定の式(3.13)に一致し、後の項が注入同期系の安定性判定の式(4.10)に一致していることである。ただし前項が完全に一致しているのに対し、後項は負荷が周波数特性を持たないときの判定式に一致している。

以上をまとめると対称な相互同期系は次の2つの条件が成立するとき安定と言える。

1) n 台の発振器が完全に同じ変化をしてあたかも1台の発振器のように振舞うとして、その自由発振系が安定であること。

2) 1台の発振器に注目し、その発振器以外(つまり結合回路と他の $(n-1)$ 台の発振器)が ω_0 の定常状態で凍結していると仮定したときにその発振器が安定にLockされること。

例として第3章式(3.22)に述べた簡単な発振器を n 台動作させることを考える。つまり発振器の特性が $(i=1, 2, \dots, n)$ に対し

$$T_{0i}^0 = 0, \quad T_{Bi}^0 = \frac{R_I}{2R_0}, \quad T_{Di}^0(D) = -\frac{Q}{\omega_0} D, \quad T_{Di}^{\prime 0}(D) = -j\frac{Q}{\omega_0} D \quad (6.42)$$

で与えられているとする。また結合回路の周波数特性が無視できるとする。つまりその特性式(6.35)のうち $[S_D^L(D)], [S_D^R(D)]$ が $[0]$ であるとす。まず式(6.41)の前半から

$$D=0, \quad \frac{\omega_0}{2R_0} \frac{R_I}{Q} \quad (6.43)$$

が得られる。これは1台の発振器が自由発振しているときの根と一致している。従って第3.3節表3.1と同じ判定が得られる。また後半の式より R_I/R_0 が $|\Gamma|$ に対し無視できるときには

$$D \approx \frac{S_0}{T_D} = -\omega_0 \frac{\Gamma}{Q} \quad 2(n-1) \text{ 個の根} \quad (6.44)$$

が得られる。これより表6.1の判定が得られる。従って n 形発振器は並列共振回路、共列形結合回路 (Magic Tを用いるときは $\text{Re}\Gamma < 0$) で相互同期が安定となり、 S 形発振器は直列共振回路、直列形結合回路 ($\text{Re}\Gamma > 0$) で安定となる。以上各発振器がそれぞれ共振器を持つ場合について述べたが、まとめて結合回路が共通の共振器を持つときにも同様なことが言える。

実際の相互同期系ではよく負荷特性が問題となる。つまりどのくらいの負荷変動にまで同期が安定であるかという問題である。例えば図6.2の a), b), c) の共通負荷が定常状態で反射係数にして 0 から Γ^L に変化したとすると式(6.35)のうちで $[S_0^L]$ だけが

$$[S_0^L] = \begin{pmatrix} (1-\frac{1}{n})\Gamma + \frac{1}{n}\Gamma^L & -\frac{1}{n}\Gamma + \frac{1}{n}\Gamma^L & \dots \\ -\frac{1}{n}\Gamma + \frac{1}{n}\Gamma^L & (1-\frac{1}{n})\Gamma + \frac{1}{n}\Gamma^L & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

のように変る。これに応じて各発振器の振幅 A_0 , 周波数 ω_0 が適当にずれて T_{0i}^0 が Γ^L になる。このように動作点がずれても $T_{0i}^0, T_{0i}^0(D), T_{0i}^0(D), [S_D(D)], [S_D^R(D)]$ が余り変化しないものとする。この新しい状態は S_0 だけを Γ から $\Gamma - \Gamma^L$ に変えることと表現できる(式(6.43)の対角要素から Γ^L を引く式(6.39)の $[S_0]$ と比較すればわかる)。このことにより式(6.43)は殆んど影響を受けないが、式(6.44)は大きく影響を受ける。

テンク 結合回路 結合回路	直列共振回路 $Q > 0$	並列共振回路 $Q < 0$
a) 直列形 c) $\text{Re}\Gamma > 0$	安定	不安定
b) 並列形 c) $\text{Re}\Gamma < 0$	不安定	安定

表6.1. 共振回路の形と結合回路

Γ^L の負荷変動があっても同期が安定であるためには式(6.44)より

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\Gamma}{T_D}\right) \lesssim \operatorname{Re}\left(\frac{\Gamma^L}{T_D}\right) \quad (6.46)$$

あるいは式(6.42)であらわされる発振器に対しては

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\Gamma}{Q}\right) \gtrsim \operatorname{Re}\left(\frac{\Gamma^L}{Q}\right) \quad (6.47)$$

が成り立たねばならない。以上のことより $\operatorname{Re}(\Gamma/T_D)$ はできるだけ小さい(負方向に大きい)ことが負荷特性を良くするのに望ましいことがわかる。従って n 形発振器には並列形結合回路が、また s 形発振器には直列形結合回路が最も望ましいことが結論される。

以上 $a_{0i} = a_0$ なる発振系について考察したが、これ以外に

$$a_{0i} = a_0 e^{j i \theta} \quad (e^{j n \theta} = 1) \quad (6.48)$$

のように隣合した発振器の位相が順に θ ずつ変化して 1 巡してもとに戻す ($n\theta = 2m\pi$) ように設計する方法がある。結論から言うところのような系は $n \leq 2$ でないとは不安定である。従って対称な回路(結合回路が可逆なもの)は $n \geq 3$ については $a_{0i} = a_0$ になる方がよい。この事実も次節でも別の形で言明される。さて式(6.48)のような入力に対しては $[S_0]$ は

$$[S_0] = \begin{pmatrix} \frac{S_0}{n} & \frac{S_0}{n} & \dots & \\ \frac{S_0}{n} & \frac{S_0}{n} & & \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

のような形をとらねばならない。これから式(6.29)を求めるにはまず式(6.29)を変形して

$$\left| \begin{pmatrix} [\beta_0] + [\beta_A] + [\beta_D(D)] & j[\beta_0] + [\beta'_D(D)] \\ [\beta_0]^c + [\beta_A]^c + [\beta_D(D)]^c & -j[\beta_0]^c + [\beta'_D(D)]^c \end{pmatrix} \right| = 0 \quad (6.50)$$

として次の操作を行なうときこれに因数分解できる。まず $2 \sim n$ 行から 1 行を引く、 $n+2 \sim 2n$ 行から $n+1$ 行を引く。続いて $2 \sim n$ 行の和に適当な値を掛け 1 行から引く $(1, 2) \sim (1, n); (1, n+2) \sim (1, 2n)$ 要素を 0 にする。同じく $n+2 \sim 2n$ 行の和を用いて $n+1$ 行に 0 を作る。すると次のように因数分解できる。

$$[(s_0 - T_B + s_D(D) - T_D(D)) [j s_0 + j s_D(D) - T_D'(D)]^c \{ [T_B + T_D(D)] [T_D'(D)]^c \}^{I(n-1)} = 0 \quad (6.51)$$

この式の後半は $T_D'(0) = 0$ であるから $D=0$ を $(n-1)$ 重根として持っている。
 $D=0$ なる根は1根しか許されていないからこれは明らかに不安定である。
 (厳密に言うと安定と不安定の境であるが対称性が僅かに崩れたいずれ
 たちどころに不安定になってしまう。) ただし $n=1, 2$ の場合だけは
 許される。 $n=2$ であると丁度2つの開口からくる波が逆位相になってい
 ることに対応する。 (しかし逆位相ということは開口を片方だけ上下入
 り替えると同相になるので本質的には前に検討したものと同等
 になってしまう ($s_D(D)$ の入り方が変わる)。

以上に述べた以外にも対称な回路は沢山ある。 任意の2つ
 の開口の入替に対し不変なものは式(6.35)で表わされるものしかない
 が、輪廻のようなものも考えれば式(6.48)以下に述べたものやその他各
 々の回路が考えられる。 しかしそれらの議論は各論になってしまうの
 でここではこれ以上述べないこととする。

6.3. 準線形な発振器の相互同期系

発振器の非線形性が小さくかつ結合回路が可逆な場
 合には前節で述べた対称性が成り立っていないなくても近似的に式
 (6.28)の固有値問題を解くことができる。 それには非線形項
 $\{\beta_A\}$ を無視した方程式をまず解き、さらに $\{\beta_A\}$ を摂動項として
 より高い近似解を得るという方法をとる。 簡単のためにさらに本
 節では緩変化近似を用いるがこの仮定はなくても解析可能である。
 準線形緩変化近似を用いると式(6.27)は

$$\left[\begin{pmatrix} \text{Re}[\beta_0] & -\text{Im}[\beta_0] \\ \text{Im}[\beta_0] & \text{Re}[\beta_0] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Re}[\beta_A] & 0 \\ \text{Im}[\beta_A] & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Re}[\beta_D] & -\text{Im}[\beta_D] \\ \text{Im}[\beta_D] & \text{Re}[\beta_D] \end{pmatrix} D \right] \begin{pmatrix} \delta A(t) \\ \delta \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.52)$$

あるいは簡単に式(6.28)に対応して

$$(\{\beta_0\} + \{\beta_A\} + \{\beta_D\} D) \delta(t) = 0 \quad (6.53)$$

となる。

1) 摂動項 $\{\beta_A\}$ を無視した第1次近似解

式(6.53)の $\{\beta_A\}$ を無視したときの固有解を $D_0, \delta_0(t)$ とすると固有

有方程式は次のようになる。

$$(\{\beta_0\} + \{\beta_D\} D_0) \delta_0(t) = 0 \quad (6.54)$$

この方程式の $2n$ 個の解 $D_{0i}, \delta_0(t)]_i$ は次のようにして求めることができる (付録 C 参照)。

$$([\beta_0] + [\beta_D] D_0) \delta_0(t) = 0 \quad (6.55)$$

の固有値問題の n 個の解を $D_{0i}, \delta_0(t)]_i$ とすると

$$\begin{cases} D_{0(2i-1)} = D_{0i} \\ \delta_0(t)]_{2i-1} = \begin{pmatrix} \delta_0(t)]_i \\ -j \delta_0(t)]_i \end{pmatrix} \end{cases}, \quad \begin{cases} D_{0(2i)} = D_{0i}^* \\ \delta_0(t)]_{2i} = \begin{pmatrix} \delta_0(t)]_i^* \\ j \delta_0(t)]_i^* \end{pmatrix} \end{cases} \quad (6.56)$$

と表わされる。ここで固有ベクトルが複素数になっているが必ず共役なベクトルがある為、 $\delta(t)]$ は実数で表わすことが可能である。 D_{0i} は式 (6.55) の特性方程式

$$|[\beta_0] + [\beta_D] D_0| = 0$$

または

$$|[\lambda_0] + [\lambda_D] D_0| = 0 \quad (6.57)$$

の根として求めることができる。ところがこの式は D_0 に関する n 次方程式になっている。さらに式 (6.57) は $|[\lambda_0]| = 0$ より $D_0 = 0$ なる根を持つから (これを D_{01} とする), 結局 $n-1$ 次方程式が解ければよい。 $[\beta_0] 1] = 0$ より式 (6.55) と比較して D_{01} の固有ベクトルは $\delta_0(t)]_1 = 1$ であることがわかる。これより $D_0 = 0$ は縮退した固有値となり (これを D_{01}, D_{02} とする), 対応する固有ベクトルは次のようになる。

$$\delta_0(t)]_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}, \quad \delta_0(t)]_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} \quad (6.58)$$

こうして得られた $2n$ 個の固有解 $D_{0i}, \delta_0(t)]_i$ ($i=1, \dots, 2n$) は独立性と直交性が成り立っている (付録 C 参照)。つまり

a) 異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに独立である。従って任意のベクトルは $2n$ 個の固有ベクトルの一次結合で表わすことができる。

b) 結合回路が可逆なときには固有ベクトルに次の直交関係が成立する。

$$\delta_0(t)_j^T \{a_0\} \{\beta_D\} \delta_0(t)_i = 0, \quad \delta_0(t)_j^T \{a_0\}^* \{\beta_D\} \delta_0(t)_i = 0 \quad (i \neq j) \quad (6.59)$$

ただし $\{a_0\}$ は $2n \times 2n$ 行列で次のように定義される。

$$\{a_0\} = \begin{pmatrix} a_{01} & 0 & \dots & ja_{01} & 0 & \dots \\ 0 & a_{02} & \dots & 0 & ja_{02} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ ja_{01} & 0 & \dots & -a_{01} & 0 & \dots \\ 0 & ja_{02} & \dots & 0 & -a_{02} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.60)$$

2) 摂動項 $\{\beta_A\}$ を考慮したときの近似解 $D_i, \delta(t)_i$

図6.3に D_{0i} と D_{0i} の関係を示した。こうして得られた D_{0i} は摂動項 $\{\beta_A\}$ を考慮するとごく僅かに変化して D_i になる。これも図6.3に示した。縮退している D_{0i} は通常縮退が解けて2つの D_i に分離する。 $\{\beta_A\}$ を充分小さいとしているからこれらの変化は極めて少なく D_i を D_{0i} で近似してもほとんど問題ない。従って相互同期が安定であるためには D_{0i} の実部、つまり D_{0i} の実部がすべて負であることが必要となる。大方はこれでよいが二つ問題がある。それは $D_0 = 0$ (D_{01}, D_{02}) から得られる D_1, D_2 である。これらの根は虚軸に極めて近いので詳しい解析が必要となる。

D_1, D_2 は次のようにして求める。 D_1, D_2 に対する固有ベクトルを $\delta(t)_1, \delta(t)_2$ とするとそれらは次のように $2n$ 個の固有ベクトル $\delta_0(t)_i$ の和で表わすことができる。 ($D_1, D_2; \delta(t)_1, \delta(t)_2$ の1, 2はしばらく取去って議論する)

$$\delta(t)_j = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -j1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ j1 \end{pmatrix} + \sum_{i=3}^{2n} c_i \delta_0(t)_i \quad (6.61)$$

ここで $D_{1,2}$ が D_{01}, D_{02} に近いので、 c_1, c_2 に比し c_i ($i=3, \dots, 2n$) は十分小さい量になる。二次以上の微小量を無視すると

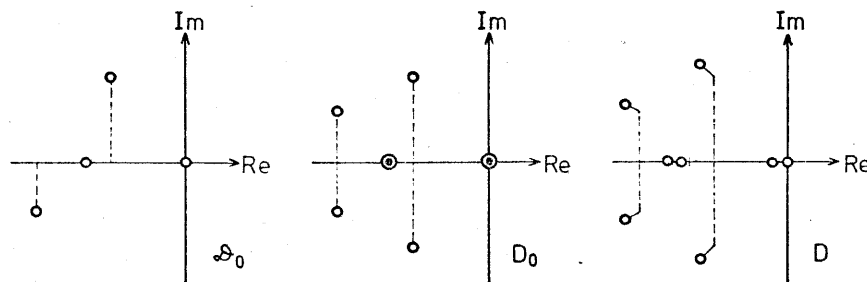


図6.3. 三種類の固有値の関係 a) D_0 , b) D_0 (非摂動時), c) D (摂動時)

$$(\{\beta_0\} + \{\beta_A\} + \{\beta_D\} D) \delta(t) = (\{\beta_A\} + \{\beta_D\} D) \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -j1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ j1 \end{pmatrix} \right] - \sum_{i=3}^{2n} c_i D_{0i} \{\beta_D\} \delta_0(t)_i (= 0)$$

この式の左辺に左から $\begin{pmatrix} 1 \\ -j1 \end{pmatrix}^T \{a_0\}$ および $\begin{pmatrix} 1 \\ j1 \end{pmatrix}^T \{a_0\}^*$ を掛けるに次の2式

$$\begin{aligned} c_1 (2D a_0)^T [\beta_D] 1 + a_0^T [\beta_A] 1 + c_2 a_0^T [\beta_A] 1 &= 0 \\ c_1 a_0^T [\beta_A]^* 1 + c_2 (2D a_0)^T [\beta_D]^* 1 + a_0^T [\beta_A]^* 1 &= 0 \end{aligned} \quad (6.62)$$

が得られる。これらの式から c_1, c_2, D を求めると固有解が得られる。これが求める $D_1, \delta(t)_1; D_2, \delta(t)_2$ のより近似度の高い解である。

$$\begin{cases} D_1 = 0 \\ \delta(t)_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}, \quad \begin{cases} D_2 = -\text{Re } \lambda_A \\ \delta(t)_2 = \begin{pmatrix} \text{Re } \lambda_A & 1 \\ \text{Im } \lambda_A & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (6.63)$$

ここで $\delta(t)_i$ の算出では c_i を小さいものとして無視した。また

$$\lambda_A = \frac{a_0^T [S_A] a_0}{a_0^T [S_D] a_0} \quad (6.64)$$

であり式 (6.62), (6.64) 中の a_0 は

$$a_0 = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.65)$$

である。このようにして得られた式 (6.63) を見ると $D_1, \delta(t)_1$ は先に式 (6.31) で述べた位相の持つ1つの自由度に対応する固有解そのものであることがわかる。

相互同期系の安定性は固有値 D_i の値だけかわかれば判定できるが D_1, D_2 は式 (6.63) で D_3, \dots, D_{2n} は式 (6.56) で得られるから次の安定性判定の条件が成り立つ。相互同期が安定であるには

i) 式 (6.64) の λ_A を計算して

$$-\text{Re } \lambda_A < 0. \quad (6.66)$$

ii) 式 (6.57) の n 個の根のうち $D_{01} (= 0)$ 以外に対し

$$\text{Re } D_{0i} < 0. \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (6.67)$$

の2条件が成立することである。

例として前節で扱った発振器系に対して以上に述べたことを適用してみよう。完全に対称な系は式(6.37), (6.38)で表わされるが $a_0 = 1/a_0$ だから λ_A は簡単に計算できる。 $1)^T [S_D] 1$ とは $[S_D]$ のすべての要素の和をとることだから λ_A の分母は $n a_0^2 (S_D - T_D)$, 同様に分子は $-n a_0^2 T_B$ であるから $\lambda_A = -T_B / (S_D - T_D)$ となり D_1, D_2 は次のようになる。

$$D_1 = 0, \quad D_2 = \text{Re}[T_B / (S_D - T_D)]$$

また $1 [S_0] + [S_D] D_0 = 0$ を解くと

$$D_{0i} = S_0 / T_D \quad (i=2, \dots, n) \quad \text{つまり} \quad D_i \cong S_0 / T_D \quad (i=3, \dots, 2n)$$

が得られる。これらの D_i は丁度式(6.41)の解とほぼ一致している。つまり D_1, D_2 が式(6.41)の前半の解に、 D_3, \dots, D_{2n} が後半の解になっている。厳密に言うと式(6.41)の後半の解は半分が S_0 / T_D で残り半分が $(S_0 - T_B) / T_D$ になり、上の結果とやや異なるが T_B の小さい近似であるから問題は生じない。

次に輪廻の対称性を持つ式(6.48), (6.49)で表わされる系について考えてみる。すると形式的に同じ操作を行なうと

$$D_1 = 0, \quad D_2 = - \frac{T_B \sum_{i=1}^n e^{2ji\theta}}{T_D \sum_{i=1}^n e^{2ji\theta}}$$

$$D_{3,4} \cong -S_0 / (S_D - T_D), \quad D_i \cong 0 \quad (i=5, \dots, 2n)$$

が得られる。 D_3, D_4 が式(6.51)の前半の根に、残りが後半の根に対応している。第1次近似の D_{0i} がこのように多くの0を持つときには実はこの方法が使えず式(6.61)~(6.63)のような操作を縮退しているすべてのベクトルの和に対して行なわねばならないがそれをしなくても上記のようにほぼ正しい解が得られる。この解からわかるように $n \geq 3$ ではこの系は不安定である。 $n=2$ では D_5 以下がなくなるから

$$\text{Re}(T_B / T_D) > 0, \quad \text{Re}[S_0 / (S_D - T_D)] > 0$$

のとき安定な同期系が得られることは前節の結果と同じである。

ところで式(6.63)を見ると D_1, D_2 に対する固有ベクトルは興味深い性質をしている。原点に D_1, D_2 が近い (D_i は一致している) ことから、ゆっくりした外乱

に対する系の振幅, 位相の変動の様子はこれら2つの固有ベクトルの一次結合で与えられると考えてよい. とこが $\delta(t)\}_1, \delta(t)\}_2$ のいずれも $\delta A(t) = \text{const} \times 1], \delta \theta(t) = \text{const} \times 1]$ の形をしていいるから, 振幅変動, 位相変動はそれぞれ開口に依らない同じ形をとる. つまりゆっくりした変動に対しては次式が成り立つ.

$$\delta A_1(t) = \delta A_2(t) = \dots = \delta A_n(t), \quad \delta \theta_1(t) = \delta \theta_2(t) = \dots = \delta \theta_n(t) \quad (6.68)$$

このようにゆっくりした外乱に対しては相互同期系はあたかも1台の発振器のように振舞う. この性質は雑音の解析でも重要な意味を持つ.

以上の解析で結合回路を可逆としたが実際の回路にはいくつかの単向管やサーキュレータが使われることが多い. このような場合には本節で述べた摂動法が使えずもとに戻って式(6.28)を用いねばならない. しかし単向管1個だけが1台の発振器と結合回路の間に入っているときだけは本節の方法で解析が可能である. この場合単向管とそれと組になっている発振器をまとめて1つの発振器と考えることができる(単向管は発振器から結合回路に向けてあるとする). 単向管の単向性が余りよくない場合を考える. 単向管の出口でこの発振器を考えると負荷変動によりその単向管から出てくる波の振幅, 周波数は僅かに変動する. しかしその変動は裸の発振器に比べ極めて少ない. これは見方を変えると同じ振幅や周波数の変動に対し大きな T^0 の変動を伴うことになる. このことから不完全な単向管のついた発振器はほぼ次の式でその特性を近似することができる.

$$T_0^0 = \frac{T_0^{\text{origin}}}{k}, \quad T_B^0 = \frac{T_B^{\text{origin}}}{k}, \quad T_D^0(D) = \frac{T_D^{\text{origin}}(D)}{k}, \quad T_D^{10}(D) = \frac{T_D^{\text{origin}}(D)}{k} \quad (6.69)$$

ここで裸の発振器の特性には origin を付した. また単向管の順方向の損失, 移相回転を無視し, 逆方向の減衰量を $1/k$ とした. 理想的な単向管の場合には式(6.69)で $k \rightarrow 0$ とすればよい. なお普通は $T_0^{\text{origin}} = 0$ での振幅, 周波数を基準にするので式(6.69)で $T_0^0 = 0$ とおける. これらの結果を用いると理想的な単向管を持った発振器が2ヶ以上存在する系は不安定という結論が得られる. 一般に単向管を持った発振器は系から同期されることのないので, このような発振器が2ヶ以上あるときには完全な同期がかからないのは当たり前である. No. 1の発振器だけが単向管を持っているときには, いわゆる $(n-1)$ 台の発振器系に注入同期を

かけた状態に対応するが、このときの固有値は次のようにして求めることができる。まず λ_A であるが分母、分子とも $T_{D1}^0 a_{01}^2$, $T_{A1}^0 a_{01}^2$ が他の項に比べ圧倒的に大きいから $k \rightarrow 0$ とすると D_1, D_2 が次のように求まる。

$$D_1 = 0, \quad D_2 = -\operatorname{Re}(T_{A1}^{\text{origin}} / T_{D1}^{\text{origin}}) \quad (6.70)$$

また $D_3 \sim D_{2n}$ は式 (6.57) から求まるが、この式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} & | [S_0] + [S_D] \Delta_0 | \\ &= \begin{vmatrix} S_{011} + S_{D11} \Delta_0 & [*] \\ * & [S_0^{(n-1)}] + [S_D^{(n-1)}] \Delta_0 \end{vmatrix} \\ &= (S_{011} + S_{D11} \Delta_0) | [S_0^{(n-1)}] + [S_D^{(n-1)}] \Delta_0 | \quad (=0) \end{aligned} \quad (6.71)$$

ただし第2式中の*, [*] は適当な $(n-1)$ 次の縦ベクトルおよび横ベクトルであり, $[S_0^{(n-1)}]$, $[S_D^{(n-1)}]$ は $[S_0]$, $[S_D]$ から第1行, 第1列をとり除いた $(n-1) \times (n-1)$ の行列である。また第2式から第3式の誘導では S_{D11} が他の項に対し圧倒的に大きいとした。 $(S_{011} + S_{D11} \Delta_0) = 0$ の根は $k \rightarrow 0$ で $\Delta_0 = 0$ となるからこれは式 (6.70) の D_1, D_2 のもとになる Δ_{01} である。従って $D_3 \sim D_{2n}$ は

$$| [S_0^{(n-1)}] + [S_D^{(n-1)}] \Delta_0 | = 0 \quad (6.72)$$

の $(n-1)$ 個の根 $\Delta_{02} \sim \Delta_{0n}$ を用いて Δ_{0i} , Δ_{0i}^* で近似的に求めることができる。一般に $| [S_0] | = 0$ であっても $| [S_0^{(n-1)}] | \neq 0$ であるから式 (6.72) は $\Delta_0 = 0$ なる根を持たない。ここで式 (6.70) の D_1, D_2 は実は注入同期をかける方の発振器の自由発振での固有値になっている。式 (6.72) を $n=2$, つまり同期信号を与える発振器と受ける発振器2台の系に対し適用すると第4章式 (4.13) が得られる ($S_A \rightarrow 0$ とする)。

n の大きな系を考えてみよう。どの発振器もほぼ一様に負荷に結合しているとするとき、式 (6.39) などを見るとわかるように $[S_0]$, $[S_D]$ は対角要素以外が極めて小さい行列になっている。しかも $[S_D]$ の対角要素は殆んど発振器の特性で決ってしまう。このような系にさらに $n+1$ 番目の発振器をつけると固有値がどう変化するかを考えてみる。この新しい発振器も他の n 台と発振器とほぼ同じ特性を持つとすると (n が大きくなるほど殆ど、た特性でもかまわなくなる), 新しい系と古い系では殆んど固有値に変化がなく、ただ新しい系は新しく2個の固有値が

つけ加わるとだけになる。これは次のようにして示される。まず λ_A については、 $n+1$ 台になっても、分母も分子も n 台のときと比較して $1/n$ 程度ぐらいしか変化しない。従って λ_A も殆んど変化せず新しい固有値 D'_1, D'_2 は D_1, D_2 と殆んど同じである($D'_1 = D_1 = 0$)。 $D'_3 \sim D'_{2(n+1)}$ は $n+1$ 台の系に対する式(6.57)を解けばよい。ところで

$$\begin{aligned} & |[S_0^{(n+1)}] + [S_D^{(n+1)}] \Delta_0| \\ & \cong \begin{vmatrix} [S_0] + [S_D] \Delta_0 & * \\ [* & S_{0(n+1)(n+1)} + S_{D(n+1)(n+1)} \Delta_0 \end{vmatrix} \\ & \cong |[S_0] + [S_D] \Delta_0| (S_{0(n+1)(n+1)} - T_{D(n+1)}^0 \Delta_0) (=0) \end{aligned} \quad (6.73)$$

と近似できる。第1式の $[S_0^{(n+1)}], [S_D^{(n+1)}]$ の $n+1$ 行, $n+1$ 列を除いた行列と n 台の系の $[S_0], [S_D]$ が殆んど同じことから第2式のように近似できる。第2式の n 次の適当な縦ベクトル $*$ と横ベクトル $[*$ の各要素が極めて小さいことから更に第3式が近似できる。また前述のように $S_{D(n+1)(n+1)} \cong -T_{D(n+1)}^0$ であるからそれも用いた。式(6.73)より $\Delta_{01} \sim \Delta_{0n}$ はほぼ $\Delta_{01} \sim \Delta_{0n}$ に等しい。従って $D'_3 \sim D'_{2n}$ もほぼ $D_3 \sim D_{2n}$ に等しい。式(6.73)第3式の後半から $\Delta_{0(n+1)}$ が得られるが、これから D_{2n+1}, D_{2n+2} は

$$D_{2n+1} \cong S_{0(n+1)(n+1)} / T_{D(n+1)}^0, \quad D_{2n+2} \cong D_{2n+1}^* \quad (6.74)$$

となるがこれらが新しく加わる固有値である。この結果は第 $n+1$ 番目の発振器が第4章で述べた注入同期を受けているときの固有値と一致している。従って n 台の大きな系が安定であれば、この大きな系は図4.1の同期信号源と周波数特性を持たない負荷に対応することがわかる。商用周波帯の発電機の並列運転の解析は通常このようにして行なわれている。

6.4 Magic-Tによる2台の発振器の相互同期

実用的な相互同期系には n の大きなものがよく研究されているが実験室では2台の相互同期系がよく研究されている。第6.2節で述べたように結合回路としてはMagic-Tを用いると色々な状態が実現できる。本節では図6.4のような相互同期系を考察してみよう。

結合回路は Magic-T とその 2つのアームに接続された 整合負荷, 反射係数 Γ のインピーダンスからなる.

すると負荷の特性は

$$[S_p] = \begin{pmatrix} \Gamma/2 & -\Gamma/2 \\ -\Gamma/2 & \Gamma/2 \end{pmatrix} \quad (6.75)$$

となる. Γ が周波数特性を無視できるとすると $[S_p] = [0]$ としよ. 本節ではこの Γ を 0 付近で $|\Gamma|$ を一定にしてその位相を徐々に変えたときに系の状態がどのように変化していくかを考

える. このような状態は Γ を減衰器の後に可変短絡板を付いたもので表わすことにより実現できる. (つまり短絡板の位置を徐々に変化する.)

発振器の特性は準線形緩変化近似を用いてそれぞれ

$$T_{o1}^0 = T_{B1}^0 (A_{01} - A_{F1}) + j T_{D1}^0 (\omega_0 - \omega_{F1}), \quad T_{B1}^0 = \text{const}, \quad T_{D1}^0 = \text{const} \quad (6.76)$$

$$T_{o2}^0 = T_{B2}^0 (A_{02} - A_{F2}) + j T_{D2}^0 (\omega_0 - \omega_{F2}), \quad T_{B2}^0 = \text{const}, \quad T_{D2}^0 = \text{const}$$

と表わされるとする.

ここで面倒なのは前節までは発振器の動作点の方が与えられていて結合回路の方を選んだのに対し, 本節では結合回路の方が先に決まっています. 発振器の動作点はそれに矛盾しないように選ぶなくてはならない. 一見同じ手間のように見えるが発振器の動作点は振幅が複雑にからんでくるため近似的にしか得られない. 定常平衡点が求まればこれからその点の同期安定性を調べるのはたやすくできる.

まず定常平衡点を求めよう. 式 (6.75) より

$$[S_0] = \begin{pmatrix} \Gamma/2 - T_{o1}^0 & -\Gamma/2 \\ -\Gamma/2 & \Gamma/2 - T_{o2}^0 \end{pmatrix} \quad (6.77)$$

であるから定常平衡条件式 (6.13) より次の 2式が得られる.

$$(2T_{o1}^0/\Gamma - 1)(2T_{o2}^0/\Gamma - 1) = 1$$

$$(2T_{o1}^0/\Gamma - 1)(2T_{o2}^0/\Gamma - 1)^* = \exp[2(A_{02} - A_{01})]$$

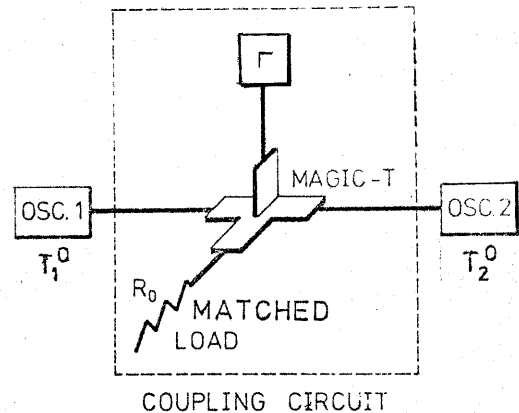


図 6.4. Magic-T による相互同期

$T_{01}^{\circ}, T_{02}^{\circ}$ は式 (6.76) で与えられるからこれら 2 式より A_{01}, A_{02}, ω_0 を決定することができる。しかし Γ が小さくかつ $A_{F1} = A_{F2}$ のときは比較的簡単に解ける。この条件では発振器はほぼ $T_{01}^{\circ} \cong 0, T_{02}^{\circ} \cong 0$ で発振するから出力がバランスしていると言ってもよい。この場合、上の 2 式の後式左辺は右辺に比し A_{01}, A_{02} の変化に対し極めて大きく変化する。そこで右辺は $\exp[2(A_{F2} - A_{F1})]$ で置き換えられるがこの値は 1 である。従って θ を補助変数として次のように表わすことができる。

$$2T_{01}^{\circ}/\Gamma - 1 = -e^{j\theta}, \quad 2T_{02}^{\circ}/\Gamma - 1 = -e^{-j\theta} \quad (6.78)$$

この補助変数は丁度 No.1 の発振器と No.2 の発振器の位相差になっており次の関係式が成立する。

$$a_{02} = e^{j\theta} a_{01} \quad (6.79)$$

式 (6.78) から A_{01}, A_{02} と θ の関数として求めることができるが ω_0 と θ の関係式は前式と後式から 2 つ求まる。それは

$$\omega_0 = \omega_{L1} - \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\Gamma e^{j\theta}/T_{B1}^{\circ}) / \operatorname{Re}(T_{D1}^{\circ}/T_{B1}^{\circ}) \quad (6.80)$$

$$\omega_0 = \omega_{L2} - \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\Gamma e^{-j\theta}/T_{B2}^{\circ}) / \operatorname{Re}(T_{D2}^{\circ}/T_{B2}^{\circ})$$

この式から ω_0 と θ を決定できるから定常平衡点が定まることになる。なお式 (6.80) 中の ω_{L1}, ω_{L2} は互いに相手の発振器を整合負荷に置き換えたときの自由発振周波数であり負荷周波数と呼ばれる。 ω_{L1}, ω_{L2} は

$$2T_{01}^{\circ}/\Gamma - 1 = 0, \quad 2T_{02}^{\circ}/\Gamma - 1 = 0 \quad (6.81)$$

より計算でき

$$\omega_{L1} = \omega_{F1} + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\Gamma/T_{B1}^{\circ}) / \operatorname{Re}(T_{D1}^{\circ}/T_{B1}^{\circ}) \quad (6.82)$$

$$\omega_{L2} = \omega_{F2} + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\Gamma/T_{B2}^{\circ}) / \operatorname{Re}(T_{D2}^{\circ}/T_{B2}^{\circ})$$

となる。

相互同期時に整合負荷に供給される出力電力 P は式 (6.79) より

$$P = \left| \frac{a_{01}}{\sqrt{2}} + \frac{a_{02}}{\sqrt{2}} \right|^2 = P_0 (1 + \cos \theta) \cong P_F (1 + \cos \theta) \quad (6.83)$$

ここで P_F は各発振器の自由発振での出力である。各発振器が P_0 ずつ出力を出しているにもかかわらず P が $2P_0$ でなく式 (6.83) でしか与えられないのは残りの電力が Γ に消費されているからである。

同期はずれの状態は極めて荒い近似であるが2台の発振器が独立に発振しているモデルで表わすことができる。実際には同期はずれの状態でも2台の発振器は互いに引き合っているわけであるが、ここではその効果は無視する。すると発振周波数は ω_{L1} および ω_{L2} になりまた出力は

$$P = \left| \frac{a_{01}}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{a_{02}}{\sqrt{2}} \right|^2 = P_0 \cong P_F \quad (6.84)$$

となる。

定常平衡点を求める方法がわかったので次に2つの典型例について具体的な解析を行なう。

1) 2台の発振器が同じ特性を持つ場合。

$$T_{B1}^0 = T_{B2}^0 = T_B^0 \text{ (正実数)}, \quad T_{D1}^0 = T_{D2}^0 = T_D^0 \text{ (正実数)}$$

とすると式 (6.80), (6.82) は $\phi = \arg \Gamma$, $\Omega = |\Gamma| / (2T_D^0)$ として

$$\omega_0 = \omega_{L1} - \Omega \sin(\phi + \theta), \quad \omega_0 = \omega_{L2} - \Omega \sin(\phi - \theta) \quad (6.85)$$

$$\omega_{L1} = \omega_{F1} + \Omega \sin \phi, \quad \omega_{L2} = \omega_{F2} + \Omega \sin \phi \quad (6.86)$$

ここで

$$\Delta \omega = (\omega_{F2} - \omega_{F1}) / 2, \quad \omega_d = \omega_0 - (\omega_{L1} + \omega_{L2}) / 2 \quad (6.87)$$

で定義すると式 (6.85), (6.86) よりこれらから

$$\Delta \omega / \Omega = -\sin \theta \cos \phi, \quad \omega_d / \Omega = -\cos \theta \sin \phi \quad (6.88)$$

と書ける。 $\Delta \omega$, Ω は発振器の特性で定まる定数なのでこの式より θ が、従ってまた ω_d が ϕ の関数として求まる。式 (6.87) を用いて ω_0 が決まるから定常動作点は作図の助けを借りて求めることができる。

次に固有値を計算してこの動作点の安定性を調べよう。まず λ_A は

$$\lambda_A = \frac{T_{B1}^0 a_{01}^2 + T_{B2}^0 a_{02}^2}{T_{D1}^0 a_{01}^2 + T_{D2}^0 a_{02}^2} = \frac{T_B^0}{T_D^0} \quad (6.89)$$

となりこの場合正実数である。従って $D_1 = 0$, $D_2 < 0$ でありこの2固有値に

関しては問題はない。 D_3, D_4 は式 (6.57) の ω_0 を求めれば定まり

$$D_3 \cong 2\Omega \cos\theta e^{j\phi}, \quad D_4 \cong 2\Omega \cos\theta e^{-j\phi} \quad (6.90)$$

となる。従って相互同期が安定であるためには

$$\cos\theta \cos\phi < 0 \quad (6.91)$$

でなければならぬ。この条件により先に求めた定常平衡点のうち半分は不安定と判定され捨てられる。

こうして求めた $f (= \omega_0 / 2\pi)$, P を結合アーム T の位相 ϕ の関数として示したものが図 6.5 である。図中太い破線は荒い近似で計算した非同期状態であり実線が同期状態を示す。a), b), c) と 2 台の発振器の自由発振周波数が近よるにつれ同期巾も広がり大きな P が得られるようになる。特に c) の $\Delta\omega = 0$ ではダミー負荷に出てくる電カを中々変えることにより大きく $0, 2P_F$ とスイッチングすることができる。

図 6.5 には N と ϕ の関係も示されているがこれは雑音特性でありそれについては次章で詳しく述べる。

周波数 f と ϕ の関係で特徴的なことは図 6.5 b) の図に見られるように同期状態の関係が S 字形にうねることである。実は定常平衡点だけで考え式 (6.91) の条件を入れないと逆 S 字形のうねりがこの S 字形のうねりとからんで出てくる。しかし安定性を考えるとこの S 字形うねりだけが安定という結論が得られる。

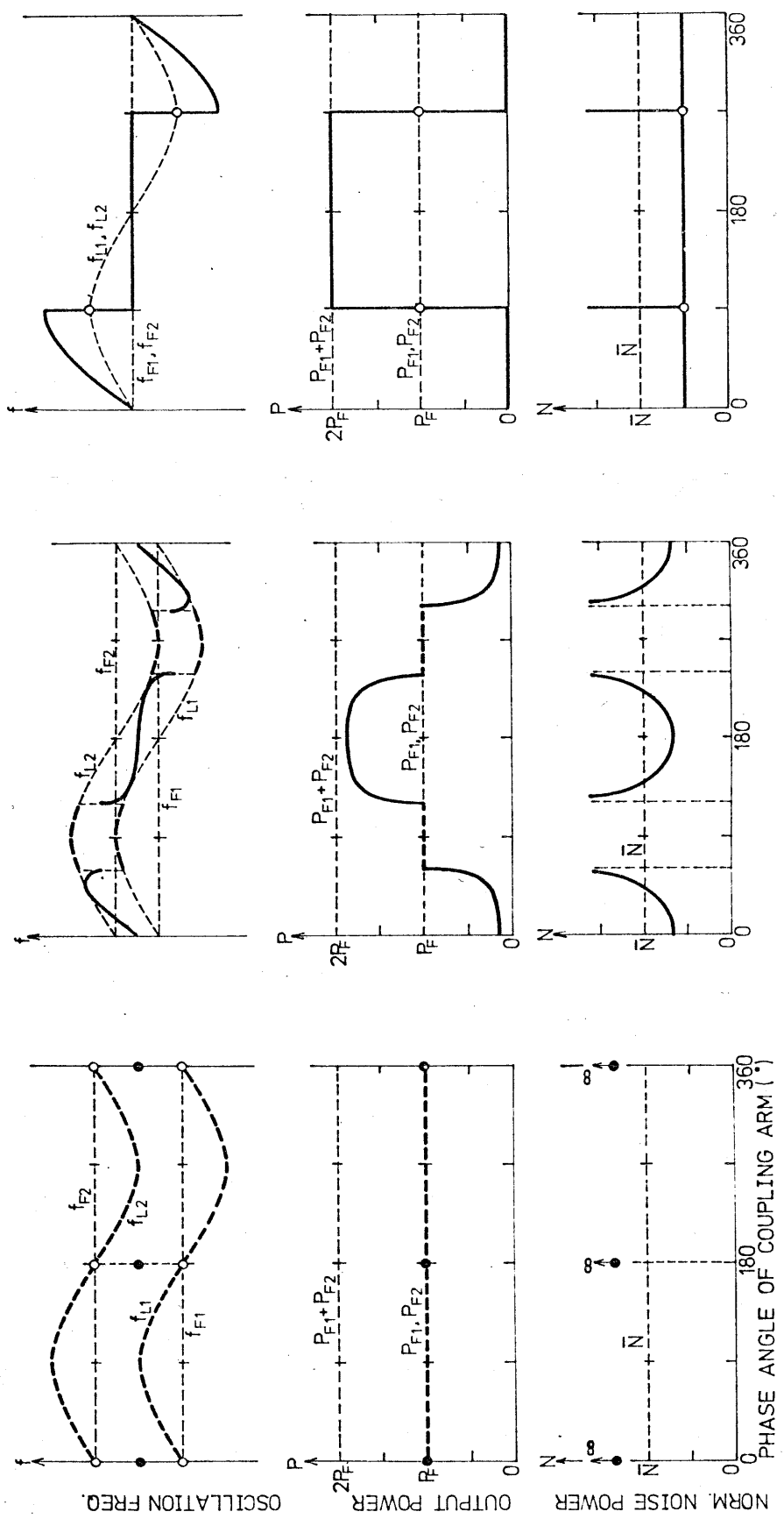
θ については結果を示さなかったが式 (6.83) の関係があるから P のグラフから直ちに $\cos\theta$ を読みとることもできる。その結果 θ は ϕ が π の付近で最も 0 に近付き、 ϕ が 0 の付近で最も π に近づくことわかる。また同期のはずれる付近で $\pm \frac{\pi}{2}$ になる。

2) 2 台の発振器が逆の特性を持つ場合。

$$T_{B1}^0 = -T_{B2}^0 = T_B^0 \text{ (正実数)}, \quad T_{D1}^0 = -T_{D2}^0 = T_D^0 \text{ (正実数)}$$

とする。このような状態は低周波数では実現しづらいが、マイ70歳では Magic-T の開口と No. 2 の発振器の間に入 $g/4$ 線路をつけることにより容易に実現できる。

この場合には前の場合の式 (6.85) ~ (6.91) に対応して次の各式が得られる。



(c) 0

(b) 0.5

(a) $|\Delta\omega|/\Omega=1$

図 6.5. 同じ特性を持つ 2 台の発振系の結合アーム位相中に対する周波数, 出力電力, 雑音の特性

$$\omega_o = \omega_{L1} - \Omega \sin(\phi + \theta), \quad \omega_o = \omega_{L2} + \Omega \sin(\phi - \theta) \quad (6.85')$$

$$\omega_{L1} = \omega_{F1} + \Omega \sin \phi, \quad \omega_{L2} = \omega_{F2} - \Omega \sin \phi \quad (6.86')$$

$$\Delta\omega/\Omega = (1 - \cos\theta) \sin\phi, \quad \omega_o/\Omega = -\sin\theta \cos\phi \quad (6.88')$$

$$\lambda_A = \frac{T_{B1}^o a_{o1}^2 + T_{B2}^o a_{o2}^2}{T_{D1}^o a_{o1}^2 + T_{D2}^o a_{o2}^2} \quad (6.89')$$

$$D_3 \cong 2j\Omega \sin\theta e^{j\phi}, \quad D_4 \cong -2j\Omega \sin\theta e^{-j\phi} \quad (6.90')$$

$$\sin\theta \sin\phi > 0 \quad (6.91')$$

これらの結果を考慮して求めた f と ϕ , P と ϕ の関係を種々の $\Delta\omega$ に対して計算したものを図 6.6 に示す。この場合には図 6.5 とは異なり中の $0 \sim 2\pi$ の変化に対して 1 つ所しか同期がつかからない。しかも負荷に大出力が出てくるのは $\Delta\omega = \pm 0$ 付近であり、この付近はわずかな $\Delta\omega$ の変動により同期がつかたりはずれたりする不安定な状態になっている。つまり余り望ましい回路とは言えない。

この場合にも f と ϕ の関係には同期巾内での字形に変化するという特徴が現われている。前の場合と同じように逆S字形の定常平衡点は不安定なので見限りされない。

2台の発振器の位相差 θ を P と ϕ の図から読みとると $\theta = 0$ または π の状態が同期のはずれる不安定な状態になっている。前の場合には $\theta = \pi/2$ で同期がはずれたのと比較すると面白い。一般に

$$T_{D1}^o a_{o1}^2 + T_{D2}^o a_{o2}^2 = 0 \quad (6.92)$$

で同期のはずれることが次章で示される。

前の場合には $\Delta\omega \geq 0$ でも $\Delta\omega \leq 0$ でも $|\Delta\omega|$ が等しければ f - ϕ 図, P - ϕ 図は同じ形をとるが、この場合には $\Delta\omega > 0$ と $\Delta\omega < 0$ ではすべての図が ϕ 方向に π だけずれる。その一例は図 6.6 の (e), (f) に現われている。(e) は $\Delta\omega = +0$, (f) は $\Delta\omega = -0$ のときに対応している。それ故に $\Delta\omega = 0$ は前述のように不安定となる。

N については第 7 章を参照された。

T_B^o, T_D^o が正実数ではなく $e^{j\phi_0}$ の方向を向いているときには、いずれ

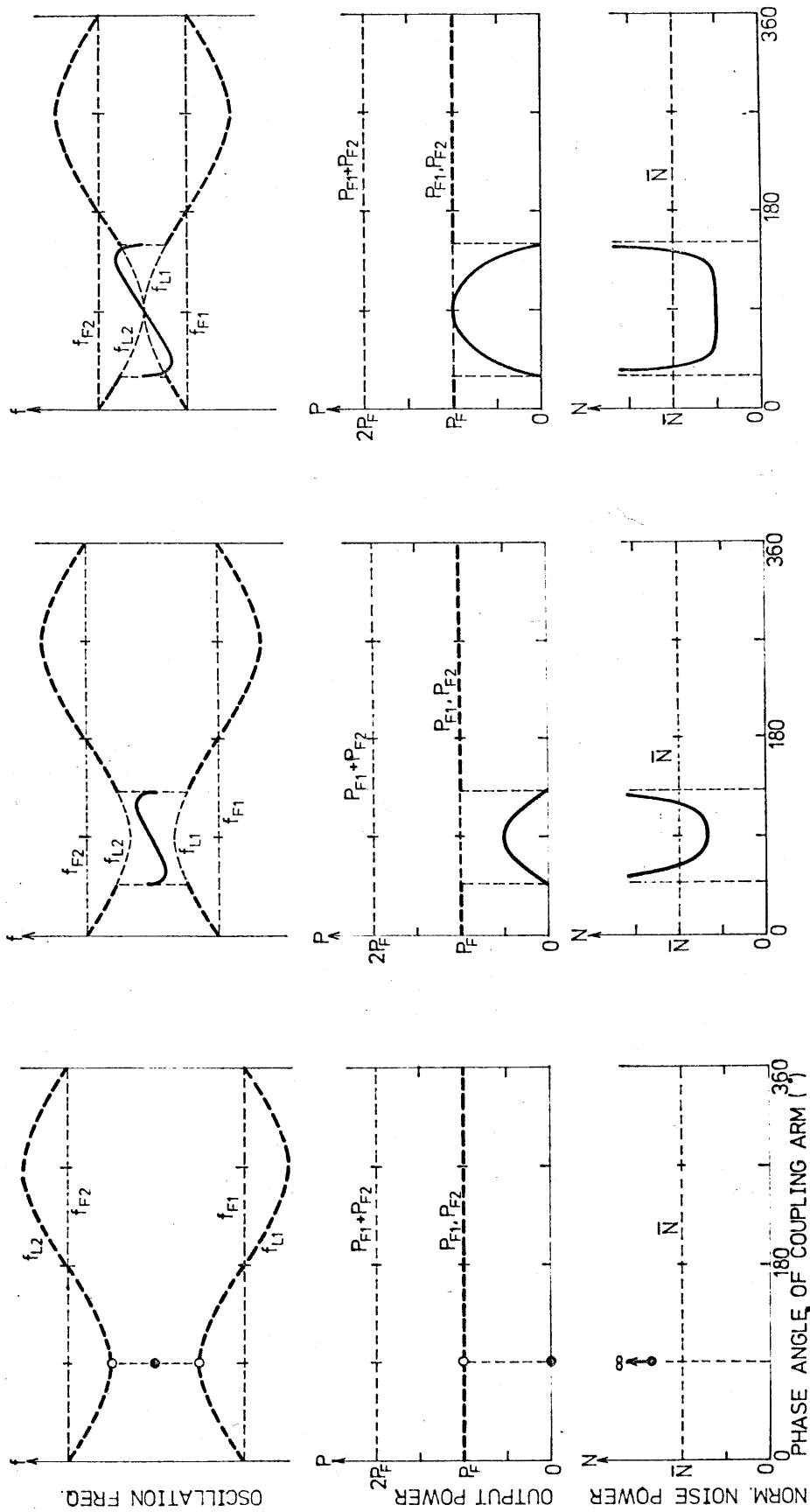


図6.6-1. 逆の特性を持つ2台の発振系の混合アーム位相中に対する周波数, 出力電力, 雑音の特性 (続)

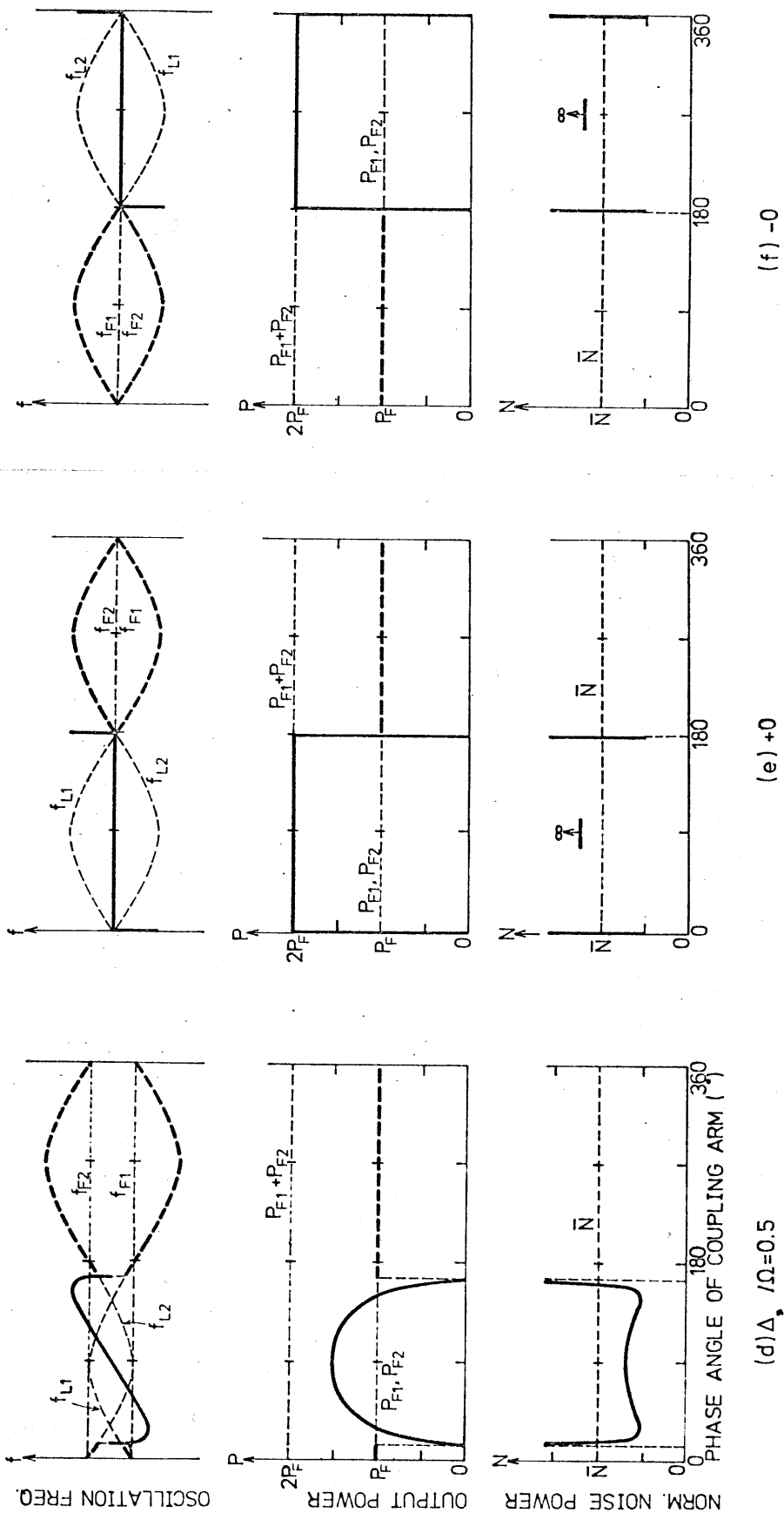


図6.6-2. 送の特性を持つ2台の発振系の結合アーム位相中に対する周波数, 出力電力, 雑音の特性

場合にも その f - ϕ 図, P - ϕ 図は 図 6.5, 6.6 の横軸を ϕ から $\phi - \phi_0$ に変えることにより得られる。また $T_{B1}^0, T_{D1}^0; T_{B2}^0, T_{D2}^0$ が かつてな方向をとるときにも本節で示したような解析法を用いることにより 図 6.5 や 6.6 と似たような結果を得ることができるとは、その操作はいたずらに複雑なだけなのでここでは語り愛する。

Magic-T を用いた 2 台の発振器の実験結果は色々報告されているが、その一例⁵⁰⁾ を 図 6.7, 6.8 に示す。この実験は 10 GHz 帯で Gunn 発振器を用いてなされたものであり 図 6.7 はほぼ 図 6.5 (b) に、また 図 6.8 はほぼ 図 6.6 (b) に対応している。これらの結果にはその同期領域の f - ϕ 図に前述の S 字形が現われており理論を良く裏付けている(逆 S 字形は測定されていない)。

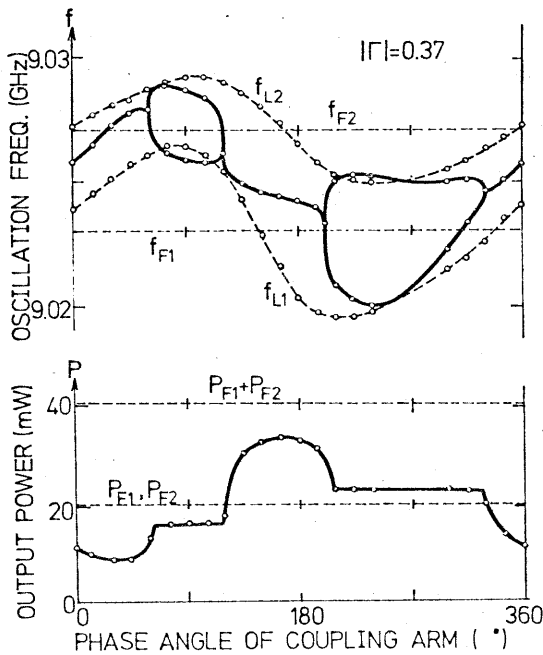


図 6.7. ガン発振器による相互同期系の実験結果 (ほぼ 図 6.5 (b) に対応)

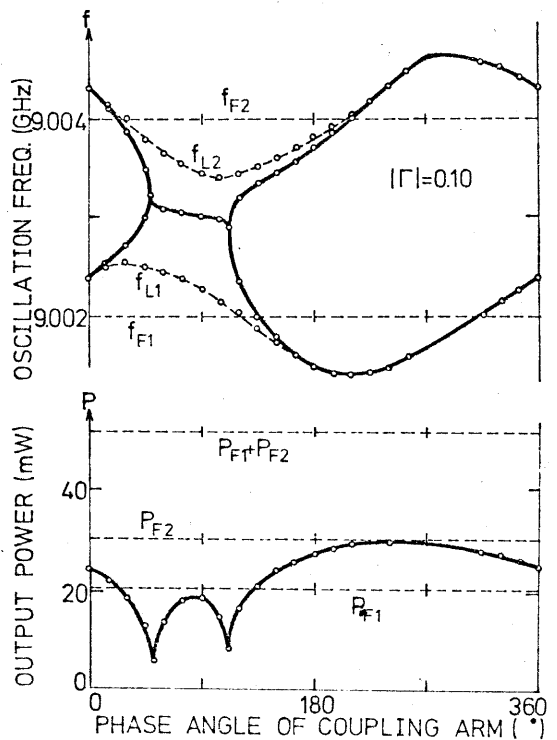


図 6.8. ガン発振器による相互同期系の実験結果 (ほぼ 図 6.6 (b) に対応)

7. 相互同期系の雑音

相互同期系の雑音も第5章で述べたように各開口での $a_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) の振幅 $\delta A_i(t)$, 位相 $\theta_i(t)$ の変動という形で解析することが出来る。相互同期系では $\delta A_i(t)$, $\theta_i(t)$ の低周波数成分があたかも1台の発振器の如くふるまいにより一致して動くという現象が現われる。その他の性質については第5章の結果とほぼ同じである。

7.1 相互同期系の雑音の基本方程式

第5.1節の解析法をそのまま用いると相互同期系の雑音の基本方程式を得ることが出来る。ただ雑音のもとになる外乱源が各ポート, 行列の各要素にあるため式がやや複雑になる。

各ポートで $b_i^0(t)$ に重なる外乱を $\Delta a_i(t)$, $b_i^L(t)$ に重なる外乱を $\Delta b_i(t)$, また T_{oi}^0 の変動を $\Delta T_{oi}^0(t)$, S_{oij}^L の変動を ΔS_{oij}^L とすると雑音のないときの式 (6.1), (6.5), (6.4), (6.7) はそれぞれ次のように変る。 $i=1, 2, \dots, n$ とし

$$a_i^0(t) = [\Delta T_{oi}^0(t) + T_{oi}^0 + T_{\theta i}^0 \delta B_i^0(t) + T_{pi}^0(D) \delta B_i^0(t) + T_{pi}^{10}(D) \theta_{\theta i}^0(t)] b_i^0(t) \quad (7.1)$$

$$b_i^L(t) = \sum_{j=1}^n [\Delta S_{ij}^L(t) + S_{oij}^L + S_{Aij}^L \delta A_j^L(t) + S_{Dij}^L(D) \delta A_j^L(t) + S_{Dij}^{1L}(D) \theta_{A_j}^L(t)] a_j^L(t) \quad (7.2)$$

$$b_i^0(t) + \Delta a_i(t) = a_i^L(t) \equiv a_i(t) \quad (7.3)$$

$$a_i^0(t) = b_i^L(t) + \Delta b_i(t) \quad (7.4)$$

これらの式から $b_i^0(t)$, $a_i^0(t)$, $b_i^L(t)$ を消去すると雑音の基本方程式を得ることが出来る。ここで次の近似を用いた。

$$B_i^0(t) = A_i(t) - \operatorname{Re} \frac{\Delta a_i(t)}{a_i(t)}, \quad \theta_{\theta i}^0(t) = \theta_i(t) - \operatorname{Im} \frac{\Delta a_i(t)}{a_i(t)}$$

1次の微小量まで採ると $i=1, 2, \dots, n$ に対し

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left\{ [S_{0ij} + S_{Aij} \delta A_j(t) + S_{Dij}(D) \delta A_j(t) + S'_{Dij}(D) \theta_j(t)] \right. \\ & + [\Delta S_{ij}^L(t) - \delta_{ij} \Delta T_j^0(t)] + \delta_{ij} [T_{Bj}^0 + T_{Dj}^0(D)] \operatorname{Re} \frac{\Delta a_j(t)}{a_j(t)} + \delta_{ij} T_{Dj}^{i0}(D) \operatorname{Im} \frac{\Delta a_j(t)}{a_j(t)} \\ & \left. + \delta_{ij} T_{0j}^0 \frac{\Delta a_j(t)}{a_j(t)} + \delta_{ij} \frac{\Delta b_j(t)}{a_j(t)} \right\} a_j(t) = 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

が得られる。ここで S_{0ij} , S_{Aij} , $S_{Dij}(D)$, $S'_{Dij}(D)$ は前章と同じく式(6.9)で定義される。この式が相互同期系の雑音の基本方程式であり、第2行目以下の各項が外乱による駆動項を表す。

$a_j(t) = \exp(A_j(t) + j\theta_j(t) + j\omega_0 t)$ であるからこの式は非線形微分方程式であり、それ故に第5章で示したような外乱による Locking 現象などの非線形な性質が現われる。しかしこれらの現象は第5章の結果から考えると $\delta A_j(t)$, $\theta_j(t)$ の非常に低周波部の成分にしか現われず、またその低周波部を除いた比較的高い変化をする成分はその振幅が余り大きくないことが予想される。このことを考慮して $\delta A_j(t)$, $\theta_j(t)$ をある周波数 Ω_c より遅く変動する部分と速く変動する部分に分けて考えてみる (Ω_c の決め方は後に示す)。前者には L を、後者には H を付けると

$$\delta A_j(t) = \delta A_{Lj}(t) + \delta A_{Hj}(t) \quad (7.6)$$

$$\delta \theta_j(t) = \theta_{Lj}(t) + \delta \theta_{Hj}(t) \quad (7.7)$$

と表わされる。これらを式(7.5)へ代入すると

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left\{ S_{0ij} + [S_{0ij} + S_{Aij}] \delta A_{Lj}(t) + [S_{0ij} + S_{Aij} + S_{Dij}(D)] \delta A_{Hj}(t) + [jS_{0ij} + S'_{Dij}(D)] \delta \theta_{Hj}(t) \right. \\ & + [\Delta S_{ij}^L(t) - \delta_{ij} \Delta T_j^0(t)] + \delta_{ij} [T_{Bj}^0 + T_{Dj}^0(D)] \operatorname{Re} \frac{\Delta a_j(t) e^{-j\omega_0 t}}{|a_{0j}| e^{j\theta_{Lj}(t)}} + \delta_{ij} T_{Dj}^{i0}(D) \operatorname{Im} \frac{\Delta a_j(t) e^{-j\omega_0 t}}{|a_{0j}| e^{j\theta_{Lj}(t)}} \\ & \left. + \delta_{ij} T_{0j}^0 \frac{\Delta a_j(t) e^{-j\omega_0 t}}{|a_{0j}| e^{j\theta_{Lj}(t)}} + \delta_{ij} \frac{\Delta b_j(t) e^{-j\omega_0 t}}{|a_{0j}| e^{j\theta_{Lj}(t)}} \right\} |a_{0j}| e^{j\theta_{Lj}(t)} = 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

ここで

$$a_j(t) \cong |a_{0j}| e^{j\theta_{Lj}(t) + j\omega_0 t} (1 + \delta A_{Lj}(t) + \delta A_{Hj}(t) + \delta \theta_{Hj}(t)) \quad (7.9)$$

を用いた。また $\delta A_{Lj}(t)$, $\theta_{Lj}(t)$ の時間微分は無視した。また式(7.8)の定数項より

$$\sum_{j=1}^n S_{0ij} |a_{0j}| e^{j\theta_{Lj}(t)} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (7.10)$$

が得られるが、これを定常平衡の式(6.12)

$$\sum_{j=1}^n S_{0ij} a_{0j} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

と比較すると $\theta_{Lj}(t)$ は j に依らない 1 の位相 $\theta_L(t)$ を用いて

$$\theta_{Lj}(t) = \theta_L(t) + \arg a_{0j} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

とならなければならぬことが結論される。あるいは

$$|a_{0j}| e^{j\theta_{Lj}(t)} = a_{0j} e^{j\theta_L(t)} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (7.11)$$

である。このことは先に前章で示した式(6.31)あるいは式(6.63)を言い換えたものである。

式(7.11)を式(7.8)へ代入し、緩い変化をする部分と速い変化をする部分に分けると次の二式が得られる。

$$\sum_{j=1}^n \{ [S_{0ij} + \delta_{Aij}] a_{0j} \delta A_{Lj}(t) + [\Delta S_{ij}(t) \text{の低周波成分}] a_{0j} \} = 0 \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \{ [S_{0ij} + \delta_{Aij} + \delta_{Dij}(D)] a_{0j} \delta A_{Hj}(t) + [j S_{0ij} + \delta_{D'ij}(D)] a_{0j} \delta \theta_{Hj}(t) \\ & + [\Delta S_{ij}(t) \text{の高周波成分}] a_{0j} \} = 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

ここで $\Delta S_{ij}(t)$ は

$$\begin{aligned} \Delta S_{ij}(t) = & \Delta S_{ij}^L(t) - \delta_{ij} \Delta T_j^0(t) + \delta_{ij} [T_{Bj}^0 + T_{Dj}^0(D)] \operatorname{Re} \frac{\Delta a_j(t) e^{-j\omega_0 t}}{a_{0j} e^{j\theta_{Lj}(t)}} \\ & + \delta_{ij} T_{Dj}^{10}(D) \operatorname{Im} \frac{\Delta a_j(t) e^{-j\omega_0 t}}{a_{0j} e^{j\theta_{Lj}(t)}} + \delta_{ij} T_{0j}^0 \frac{\Delta a_j(t) e^{-j\omega_0 t}}{a_{0j} e^{j\theta_{Lj}(t)}} + \delta_{ij} \frac{\Delta b_j(t) e^{-j\omega_0 t}}{a_{0j} e^{j\theta_{Lj}(t)}} \end{aligned} \quad (7.14)$$

である。また高周波成分と言ってもキャリア周波数と比較すると桁はずれに低い成分とする(キャリアのふらつき中よりは大きいという程度)。こうして得られた式(7.12), (7.13)は残念ながら $\Delta S_{ij}(t)$ に $e^{j\theta_{Lj}(t)}$ が入っているため相変らず非線形方程式である。しかし式(7.13)の右辺は極めて線形に近くなり解くことができる。これについて以下に述べる。

式(7.12)は外乱によるキャリアの Locking 現象なども含む非線形方程式であり簡単には解けない。しかし第5章の考察によると $a_{0j}(t)$ はキャリア付近に $\Omega_F (= 2\Omega_c/\pi)$ 程度の鋭いスペクトルを持つこと

が示される(Ω_F, Ω_c の算出は後に示す). $\Delta A_{ij}(t)$ は $\theta_{Lj}(t)$ の変化に対し極めて小さいが $S a_{oj} e^{j\theta_{Lj}(t)}$ のスペクトルはこのスペクトルにほぼ等しく、やはり Ω_F 程度になる. このことを考えて式(7.13)を見てみよう. すると $\Delta S_{ij}(t)$ にはその幾項かに $e^{j\theta_{Lj}(t)}$ の項が入っている. 従って $\Delta a_j(t), \Delta b_j(t)$ のスペクトルは $e^{j\theta_{Lj}(t)}$ の交差果により Ω_F 程度ほけた形で $\Delta S_{ij}(t)$ の中に入っていることになる. Ω_F は一般にかなり小さな値であるから高い成分のAM, PM雑音を算出する際はこのほけは無視できる. また一般に $\Delta S_{ij}^L(t), \Delta T_{ij}^0(t)$ と $\Delta a_j(t), \Delta b_j(t)$ の間には相関がないと仮定する場合が多いので式(7.14)の $e^{j\theta_{Lj}(t)}$ は全く無視してしまってもかまわない.

今後 Ω_F より速い変化だけを扱うとしてHの記号Eはせずと式(7.13)は行列表示して次のように表わされる. なお実部と虚部に分け2個の式にしてある.

$$\left(\{\beta_0\} + \{\beta_A\} + \{\beta_D(D)\} \right) \delta(t) = - \begin{pmatrix} \text{Re}[\Delta S(t)] a_0 \\ \text{Im}[\Delta S(t)] a_0 \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

ここで左辺は式(6.28)を参照された. また右辺の $[\Delta S(t)]$ は $\Delta S_{ij}(t)$ を要素とする $n \times n$ 行列, a_0 は a_{oj} を要素とする n 次元縦ベクトルである.

$\Delta S_{ij}(t)$ は式(7.14)より $e^{j\theta_{Lj}(t)}$ を消して

$$\begin{aligned} \Delta S_{ij}(t) = & \Delta S_{ij}^L(t) - \delta_{ij} \Delta T_{ij}^0(t) + \delta_{ij} [T_{Bj}^0 + T_{Dj}^0(D)] \text{Re} \frac{\Delta a_j(t)}{a_{oj} e^{j\omega_0 t}} \\ & + \delta_{ij} T_{Dj}^0(D) \text{Im} \frac{\Delta a_j(t)}{a_{oj} e^{j\omega_0 t}} + \delta_{ij} T_{oj}^0 \frac{\Delta a_j(t)}{a_{oj} e^{j\omega_0 t}} + \delta_{ij} \frac{\Delta b_j(t)}{a_{oj} e^{j\omega_0 t}} \end{aligned} \quad (7.16)$$

である. $[\Delta S(t)]$ の対角要素以外の項は $\Delta S_{ij}^L(t)$ だけが奇与している.

なお $e^{j\theta_{Lj}(t)}$ のスペクトルは式(5.46)より雑音電力で表わして

$$\frac{\Omega_c / \pi}{(\omega - \omega_0)^2 + (2\Omega_c / \pi)^2} \quad (7.17)$$

で近似できる.

7.2 2発振器の相互同期系の雑音

多発振系の一般解析を示す前に雑音の大体の特性を知るために図7.1に示すように $T_{01}, T_{02} = 0$ で同じ出力を持つ発振器2台の系を

考えてみよう。結合回路は可逆なものに限定せず一般に

$$[S_o^t] = \begin{pmatrix} -S_{12} & S_{12} \\ S_{21} & -S_{21} \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

とする。また結合回路の周波数特性を無視する。上式の対角要素は

$$a_{o1} = a_{o2} (= a_o) \quad (7.19)$$

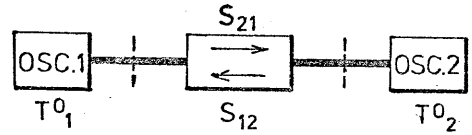


図 7.1. 2 発振器の相互同期系

で定常平衡になるように選ばれている。\$S_{12}=0\$ のときには発振器 1 が自由発振をし発振器 2 が注入同期されることを示し、\$S_{21}=0\$ のときは逆に注入同期されていることを示す。また \$S_{12}=S_{21}\$ は可逆な結合回路、例之は減衰器を通して相互同期していることを示す。発振器の特性はそれぞれ準線形緩変化近似で与えられているとする

$$\left. \begin{aligned} T_{O1}^0 = 0, \quad T_{B1}^0, \quad T_{D1}^0, \quad T_{D1}'^0 = j T_{D1}^0 \\ T_{O2}^0 = 0, \quad T_{B2}^0, \quad T_{D2}^0, \quad T_{D2}'^0 = j T_{D2}^0 \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

とする。また問題を簡単にするために

$$T_{B1}^0 / T_{D1}^0 = T_{B2}^0 / T_{D2}^0 \quad (= T_B^0 / T_D^0) \quad (7.21)$$

とする。雑音行列 \$[\Delta S(t)]\$ は対角要素だけを持つとする。

$$[\Delta S(t)] = \begin{pmatrix} \Delta S_1(t) & 0 \\ 0 & \Delta S_2(t) \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

以上の条件で解くべき方程式 (7.15) は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} -\text{Re } S_{12} - \text{Re } T_{B1}^0 - \text{Re } T_{D1}^0 D & \text{Re } S_{12} & \text{Im } S_{12} + \text{Im } T_{D1}^0 D & -\text{Im } S_{12} \\ \text{Re } S_{21} & -\text{Re } S_{21} - \text{Re } T_{B2}^0 - \text{Re } T_{D2}^0 D & -\text{Im } S_{21} & \text{Im } S_{21} + \text{Im } T_{D2}^0 D \\ -\text{Im } S_{21} - \text{Im } T_{B1}^0 - \text{Im } T_{D1}^0 D & \text{Im } S_{12} & -\text{Re } S_{12} - \text{Re } T_{D2}^0 D & \text{Re } S_{12} \\ \text{Im } S_{21} & -\text{Im } S_{21} - \text{Im } T_{B2}^0 - \text{Im } T_{D2}^0 D & \text{Re } S_{21} & -\text{Re } S_{21} - \text{Re } T_{D2}^0 D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A_1(t) \\ \delta A_2(t) \\ \delta \theta_1(t) \\ \delta \theta_2(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \text{Re } \Delta S_1(t) \\ \text{Re } \Delta S_2(t) \\ \text{Im } \Delta S_1(t) \\ \text{Im } \Delta S_2(t) \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

まず安定性を調べるために固有値を求めてみると、 T_{B1}^0, T_{B2}^0 を小さいものとして次のようになる。

$$D_1 = 0, D_2 = -\operatorname{Re}\left(\frac{T_B^0}{T_D^0}\right), D_3 \cong -\operatorname{Re}\left(\frac{S_{12}}{T_{D1}^0} + \frac{S_{21}}{T_{D2}^0}\right), D_4 \cong D_3^* \quad (7.24)$$

これより相互同期が安定であるためには次の条件が必要である。

$$\operatorname{Re}\left(\frac{T_B^0}{T_D^0}\right) > 0, \quad \operatorname{Re}\left(\frac{S_{12}}{T_{D1}^0} + \frac{S_{21}}{T_{D2}^0}\right) > 0 \quad (7.25)$$

次に AM, PM, AM-PM 複素相関の各種雑音電力を調べてみると付録 D に示すように

$$\Omega_s \cong \left| \frac{S_{12}}{T_{D1}^0} + \frac{S_{21}}{T_{D2}^0} \right| \quad (7.26)$$

で与えられる相互同期中の周波数を境にその特性が大きく異なる。 $\Omega < \Omega_s$ に対しては

$$N_1(\Omega) \cong N_2(\Omega) \cong \frac{|S_{21}/T_{D2}^0|^2 N_{F1}(\Omega) + |S_{12}/T_{D1}^0|^2 N_{F2}(\Omega)}{|(S_{12}/T_{D1}^0) + (S_{21}/T_{D2}^0)|^2} \quad (7.27)$$

となり、 $\Omega > \Omega_s$ に対しては

$$N_1(\Omega) \cong N_{F1}(\Omega), \quad N_2(\Omega) \cong N_{F2}(\Omega) \quad (7.28)$$

となる。ここで $N_1(\Omega)$ は相互同期系の発振器 1 の AM, PM 雑音電力, AM-PM 複素相関雑音電力 $N_{A1}(\Omega), N_{P1}(\Omega), N_{C1}(\Omega)$ をまとめて代表しており、 $N_2(\Omega)$ は同じく発振器 2 の各種雑音電力、 $N_{F1}(\Omega)$ は発振器 1 の自由発振時の雑音電力、 $N_{F2}(\Omega)$ は同じく発振器 2 の各種雑音電力を代表している。

$\Omega < \Omega_s$ では付録でも考察したように発振器 1 と発振器 2 が拮抗しあっているから、つまり

$$\delta A_1(t) = \delta A_2(t), \quad \delta \theta_1(t) = \delta \theta_2(t) \quad (7.29)$$

である。これは前章式 (6.68) と同じである。また $\Omega > \Omega_s$ では発振器 1 と 2 は全く独立にふるまう。これは 2 台の発振器に限らず一般的に予想されることである。

付録 D 式 (D.15) から計算した実周波数 $\omega = \omega_0 \pm \Omega$ での雑音スペクトルの概略を図 7.2 に示す。図から式 (7.27), (7.28) がどうなっているかわかると思う。ただし外乱として白色雑音を仮定して

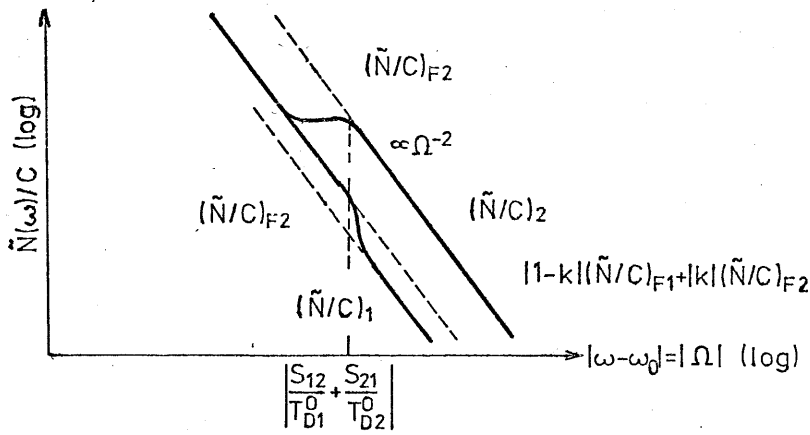


図 7.2. 2発振器の相互同期系の雑音スペクトル

計算を行なった。また複素数は式(7.30)で定義されている。

さて $\Omega < \Omega_s$ に対しては各発振器は勢揃いしてふらつきから共通負荷にも同じふらつきが現われる。この雑音電力、式(7.27)をもう少し細かく考察してみよう。

$$\frac{S_{12}}{T_{D1}} : \frac{S_{21}}{T_{D2}} = k : 1-k \quad (k: \text{実数}, 0 \leq k \leq 1) \quad (7.30)$$

とあって式(7.27)を計算してみると k の値によって $N_1(\Omega) = N_2(\Omega)$ は図7.3のように変化する。図からわかるように雑音電力は適当な k で最小となりその値は $N_{F1}(\Omega), N_{F2}(\Omega)$ のいおれよりも小さい。実周波数の雑音と言うと雑音/出力比(言わゆる \tilde{N}/C 比)が N に対応するから"発振器数を増やすと適当な回路で \tilde{N}/C を減らすことができる"という重要な結論が出てくる。 $k=0$ または 1 の状態は片方の発振器が残りの発振器を Lock しているときに対応するが、そのときの雑音は Lock をかけている方の発振器に支配される。また $S_{12} = S_{21}$ 、つまり結合回路が可逆なときには式(7.27)は次式のようになる。

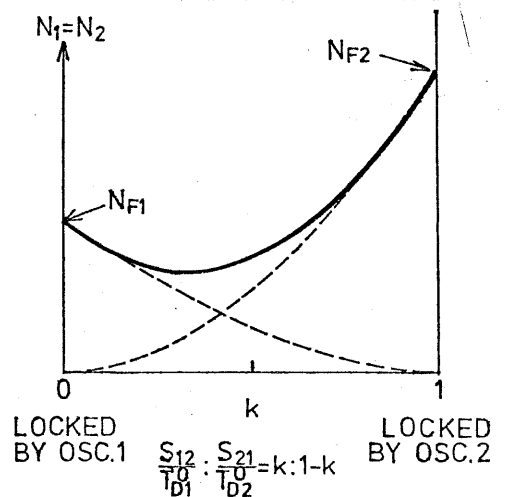


図 7.3. 結合のようすを変化したときの雑音電力の変化

$$N_1(\Omega) = N_2(\Omega) = \frac{|T_{D1}|^2 N_{F1}(\Omega) + |T_{D2}|^2 N_{F2}(\Omega)}{|T_{D1} + T_{D2}|^2} \quad (7.31)$$

従って両発振器が同じ応答特性, 雑音特性を持つときには

$$N_1(\Omega) = N_2(\Omega) = N_{F1,2}(\Omega)/2 \quad (7.32)$$

となる。この値が式(7.27)で得られる最小値である。一般に n 台の発振系では各発振器の自由発振の雑音電力の $1/n$ の雑音電力にまでできることが次節で証明される。

$\Omega > \Omega_c$ では各発振器は独立にふらつくから共通負荷に現われる雑音はこれらのふらつきに発振器と共通負荷の結合定数を掛けて合わせることにより求めることができる。その厳密な値は結合定数が厳密にわかっていないとわからない。しかし N/C 比で言うと一般に各発振器の自由発振の N/C 比より小さくなる。これは出力は位相が合って共通負荷に供給されるのに対し雑音はランダムであり出力の増大ほどには増加しないからである。

7.3. 準線形発振器の相互同期系の雑音

発振器の非線形性が小さくかつ結合回路が可逆な場合、つまり前章第6.3節で述べたような場合には発振器数が多くても雑音を解析することができる。式(7.15)は線形方程式であるから $\Delta S(t)$ の Ω 成分は $\delta(t)$ の Ω 成分にしか影響を与えない。従って解析はまず単一周波数 Ω について行なえばよい。周波数 Ω で変動する $\Delta S(t)$ は一般に次の形で表わすことができる。

$$[\Delta S(t)] = [\Delta S^+] e^{j\Omega t} + [\Delta S^-] e^{-j\Omega t} \quad (7.33)$$

これから式(7.15)の右辺は

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\text{Re}([\Delta S^+] a_0) e^{j\Omega t} + [\Delta S^-] a_0 e^{-j\Omega t} \\ -\text{Im}([\Delta S^+] a_0) e^{j\Omega t} + [\Delta S^-] a_0 e^{-j\Omega t} \end{pmatrix} \\ &= \text{Re} \begin{pmatrix} (-[\Delta S^+] a_0 - [\Delta S^-]^* a_0^*) e^{j\Omega t} \\ (j[\Delta S^+] a_0 - j[\Delta S^-]^* a_0^*) e^{j\Omega t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで $[\delta A(t)]$, $[\delta \theta(t)]$ を $e^{j\Omega t}$ で変る複素ベクトルと

考えなおすと、上式右辺の Re 記号をはずした形で $\delta A(t)$, $\delta \theta(t)$ を計算しあとから Re をとつてもよい(式(5.13)~(5.15)参照)。準線形緩変化近似を用い上の結果を代入すると

$$(\{\beta_0\} + \{\beta_A\} + j\Omega\{\beta_D\})\delta(t) = \begin{pmatrix} -[\Delta S^+]a_0 - [\Delta S^-]^* a_0 \\ j[\Delta S^+]a_0 - j[\Delta S^-]^* a_0 \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \quad (7.34)$$

が得られる。ここで $\delta(t)$ は $e^{j\Omega t}$ で変化するので $D = j\Omega$ とおいた。この式が本節で解くべき基本方程式である。

式(7.34)を解くには $\delta(t)$ を $\{\beta_A\}$ を無視した方程式の固有ベクトル $\delta_0(t)_i$ で展開しその展開係数を求めればよい。

$$\delta(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -j1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ j1 \end{pmatrix} + \sum_{i=2}^n c_{2i-1} \delta_0(t)_{2i-1} + c_{2i} \delta_0(t)_{2i} \quad (7.35)$$

と展開しこれを式(7.34)へ代入したものの左から $\begin{pmatrix} 1 \\ -j1 \end{pmatrix}^T \{a_0\}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ j1 \end{pmatrix}^T \{a_0\}^*$, $\begin{pmatrix} \delta_0(t)_i \\ -j\delta_0(t)_i \end{pmatrix} \{a_0\}$, $\begin{pmatrix} \delta_0(t)_i^* \\ j\delta_0(t)_i^* \end{pmatrix} \{a_0\}^*$ を掛付けると次の $2n$ 個の式:

$$c_1 (2j\Omega a_0)^T [\beta_D] 1 + a_0^T [\beta_A] 1 + c_2 a_0^T [\beta_A] 1 = -2a_0^T [\Delta S^+] a_0 e^{j\Omega t}$$

$$c_1 a_0^{*T} [\beta_A]^* 1 + c_2 (2j\Omega a_0)^{*T} [\beta_D]^* 1 + a_0^{*T} [\beta_A]^* 1 = -2a_0^{*T} [\Delta S^-]^* a_0 e^{j\Omega t}$$

$$c_{2i-1} (j\Omega - D_{0i}) \delta_0(t)_i^T [a_0] [\beta_D] \delta_0(t)_i = -\delta_0(t)_i^T [a_0] [\Delta S^+] a_0 e^{j\Omega t}$$

$$c_{2i} (j\Omega - D_{0i}^*) \delta_0(t)_i^{*T} [a_0]^* [\beta_D]^* \delta_0(t)_i^* = -\delta_0(t)_i^{*T} [a_0]^* [\Delta S^-]^* a_0 e^{j\Omega t}$$

が得られる。ただし $\{\beta_A\}$ は適宜無視した。これらの式から $c_1, c_2, c_{2i-1}, c_{2i}$ を求め式(7.35)へ代入すると雑音が得られる。

$$\begin{pmatrix} \delta A(t) \\ \delta \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta\lambda^+ + \Delta\lambda^*}{j\Omega + \text{Re}\lambda_A} 1 \\ j \frac{\Delta\lambda^+ (j\Omega + \lambda_A^*) - \Delta\lambda^* (j\Omega + \lambda_A)}{j\Omega (j\Omega + \text{Re}\lambda_A)} 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{j\Omega - D_{0i}} \frac{\delta_0(t)_i^T [a_0] [\Delta S^+] a_0}{\delta_0(t)_i^T [a_0] [\beta_D] \delta_0(t)_i} \delta_0(t)_i - \frac{1}{j\Omega - D_{0i}^*} \frac{\delta_0(t)_i^{*T} [a_0]^* [\Delta S^-]^* a_0}{\delta_0(t)_i^{*T} [a_0]^* [\beta_D]^* \delta_0(t)_i^*} \delta_0(t)_i^* \\ j \frac{1}{j\Omega - D_{0i}} \delta_0(t)_i - j \frac{1}{j\Omega - D_{0i}^*} \delta_0(t)_i^* \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

以上の議論で

$$[a_0] = \begin{pmatrix} a_{01} & 0 \\ 0 & a_{02} \\ & & \dots \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

であり λ_A は式(6.64)で定義されている。また

$$\Delta\lambda^\pm = \frac{a_0^T [\Delta S^\pm] a_0}{a_0^T [S_D] a_0} \quad (7.38)$$

である。

式(7.36)で Ω が小さいときには前項が支配的になり Ω の増大とともに後項がきいてくる。後項がきき出すのは Ω が

$$\Omega_s \cong \min_{i \geq 3} |D_{0i}| \quad (7.39)$$

で定義される相互同期中の周波数になり出してからである。我々の興味のあるのは前項であるが、これは式から明らかのように

$$\delta A_1(t) = \dots = \delta A_n(t) (\equiv \delta A(t)), \quad \delta \theta_1(t) = \dots = \delta \theta_n(t) (\equiv \delta \theta(t)) \quad (7.40)$$

となっている。つまり前項は今までたびたび述べた“ゆっくりした変動に対しては相互同期系の全発振器は勢揃いしてふるつく”ことに対応している。 $\Omega \gg \Omega_s$ では式(7.36)からは容易にはわからないが後項がきいてきて各発振器は独立にふるつくようになる。

$\Omega < \Omega_s$ の領域の雑音電力を算出してみる。この領域では式(7.40)が成立するから各雑音電力は $\delta A(t)$, $\delta \theta(t)$ のふるつきについて計算しておけば、その値にすべて等しくなる。 $\delta A(t)$, $\delta \theta(t)$ の各雑音電力は Ω を充分小さいものとして

$$N_A = |\Delta\lambda^+ + \Delta\lambda^*|^2 / [2(\text{Re}\lambda_A)^2]$$

$$N_\theta = |\Delta\lambda^+ \lambda_A^* - \Delta\lambda^* \lambda_A|^2 / [2\Omega^2 (\text{Re}\lambda_A)^2]$$

$$N_c = -(\Delta\lambda^+ + \Delta\lambda^*)^* (\Delta\lambda^+ \lambda_A^* - \Delta\lambda^* \lambda_A) / [2\Omega (\text{Re}\lambda_A)^2]$$

(7.41)

となる。 $[\Delta S(t)]$ が $\Delta b_i(t)$ のようなランダムな外乱で生成されている場合には $\Delta\lambda^+$ と $\Delta\lambda^-$ は相関を持たないからさらに

$$N_A = (\overline{|\Delta\lambda^+|^2} + \overline{|\Delta\lambda^-|^2}) / [2(\operatorname{Re}\lambda_A)^2]$$

$$N_P = (\overline{|\Delta\lambda^+|^2} + \overline{|\Delta\lambda^-|^2}) |\lambda_A|^2 / [2\Omega^2 (\operatorname{Re}\lambda_A)^2]$$

$$N_C = -(\overline{|\Delta\lambda^+|^2} \lambda_A^* - \overline{|\Delta\lambda^-|^2} \lambda_A) / [2\Omega (\operatorname{Re}\lambda_A)^2] \quad (7.42)$$

となる。

実周波数 ω での雑音スペクトル $\tilde{N}(\omega)$ を考えてみよう。すなわち第5章式 (5.46) ~ (5.48) で示したように

$$\tilde{N}(\omega) \cong P_{out} \frac{\Omega_c / \pi}{(\omega - \omega_0)^2 + (2\Omega_c / \pi)^2} \quad (\omega_0 - \Omega_c \leq \omega \leq \omega_0 + \Omega_c)$$

$$\tilde{N}(\omega) \cong P_{out} \left[\frac{1}{2} N_A (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} N_P (\omega - \omega_0) + N_{AF} (\omega - \omega_0) \right] \quad (\omega_0 + \Omega_c < \omega)$$

$$\tilde{N}(\omega) \cong P_{out} \left[\frac{1}{2} N_A (\omega_0 - \omega) + \frac{1}{2} N_P (\omega_0 - \omega) - N_{AF} (\omega_0 - \omega) \right] \quad (\omega < \omega_0 - \Omega_c)$$

と表わされる。ここで Ω_c は式 (5.44) を参考にすると

$$\frac{|\lambda_A|^2 N^+(\Omega_c) - 2\operatorname{Re}[N^+(\Omega_c) \lambda_A^{*2}] + |\lambda_A|^2 N^-(\Omega_c)}{(\operatorname{Re}\lambda_A)^2 \Omega_c} \cong \frac{4}{\pi^2} \quad (7.43)$$

を満足するように選ぶはよい。

7.4 相互同期系の最少雑音

本節では式 (7.42) で表わされる系の雑音を最少にするには、どのように結合回路を選ぶべきかを考える。問題を簡単にするために次の仮定をおく。

1) 負荷の反射係数の変動は考えない。つまり $[\Delta S(t)]$ は対角行列となり、その要素を $\Delta S_i(t)$ とし、さらに $\overline{\Delta S_i(t) \Delta S_j(t)} = 0$ ($i \neq j$)、つまり異なる発振器に加わる外乱には互いに相関がないものとする。

2) 結合回路は同波数特性を持たないものとする。従って $[S_D]$ は対角行列となり、その要素は $-T_{D_i}^0$ とする。

3) 各発振器の $T_{B_i}^0 / T_{D_i}^0$ はすべて互いに等しく T_B^0 / T_D^0 で与えられるものとする。

以上の仮定より

$$\lambda_A = \frac{-T_{B1}^0 a_{o1}^2 - \dots - T_{Bn}^0 a_{on}^2}{-T_{D1}^0 a_{o1}^2 - \dots - T_{Dn}^0 a_{on}^2} = \frac{T_B^0}{T_D^0} \quad (7.44)$$

$$|\Delta\lambda^\pm|^2 = \frac{|\Delta S_1^\pm|^2 |a_{o1}|^4 + \dots + |\Delta S_n^\pm|^2 |a_{on}|^4}{|-T_{D1}^0 a_{o1}^2 - \dots - T_{Dn}^0 a_{on}^2|^2} \quad (7.45)$$

となる。これを式(7.42)へ代入すると N_A, N_P, N_C が得られる。しかしこれを各発振器の自由振時の雑音で表わすときよい形になる。各発振器が独立に自由発振をしているときの1台の系に対する $\lambda_{Ai}, |\Delta\lambda_{\pm i}|^2$ は

$$\lambda_{Ai} = \frac{-T_{Bi}^0 a_{oi}^2}{-T_{Di}^0 a_{oi}^2} = \frac{T_B^0}{T_D^0} \quad (7.46)$$

$$|\Delta\lambda_{\pm i}|^2 = \frac{|\Delta S_i^\pm|^2 |a_{oi}|^4}{|-T_{Di}^0 a_{oi}^2|^2} = \frac{|\Delta S_i^\pm|^2}{|T_{Di}^0|^2} \quad (7.47)$$

となるがこれから定まる1台の系の N_A, N_P, N_C をまとめて N_{Fi} で表わすと式(7.42), (7.44)~(7.47)を用いて

$$N(\Omega) = \frac{|T_{D1}^0 a_{o1}^2|^2 N_{F1}(\Omega) + \dots + |T_{Dn}^0 a_{on}^2|^2 N_{Fn}(\Omega)}{|T_{D1}^0 a_{o1}^2 + \dots + T_{Dn}^0 a_{on}^2|^2} \quad (7.48)$$

となる。ここで N も N_A, N_P, N_C を代表している。つまり相互同期系と各自由発振系の雑音は AM, PM, AM-PM 複素相関雑音のいずれについても同じ変換式(7.48)で結ばれる。この式は丁度2台の相互同期系で述べた式(7.31)を拡張したものになっている。

普通、相互同期系を設計するときには $|T_{Di}^0|, |a_{oi}|$ は与えられている。しかし T_{Di}^0 の位相, a_{oi} の位相は自由に選ぶことができる。前者は発振器の開口に適當 T_f 位相器を挿入することにより変化でき、後者は結合回路を選べば変えられる。このようにとき式(7.48)の分子は一定であるのに対し、分母はいろいろに変えられる。 $N(\Omega)$ を最小にするにはこの分母を最大にするように位相を選べばよい。これは $T_{Di}^0 a_{oi}^2$ がすべて同方向を向くとき実現される。式で表わすと

$$\arg a_{oi} = \theta_0 - \frac{1}{2} \arg T_{Di}^0 \quad (7.49)$$

である。ここで θ_0 は i によらない任意の位相角である。ここで $T_{D_i}^0 a_{oi}^2$ は Reference 面の位置によらない一定量である。従って各ポート上のどこを Reference 面にとってもかまわない。各発振器が高 Q 空洞に入っているときには DSC 面 (離調時短絡面) を Reference 面とすると便利である。このとき $\arg T_{D_i}^0 = 0$ となるから、 a_{oi} の位相は i によらず等しくなければならぬ。従って "各ポートの DSC 面で発振器からくる波が同相で変化するように結合回路を設計すると相互同期系の雑音は最少となる" という重要な結論が得られる。

各発振器の雑音特性、応答特性が互いに等しくかつ上の条件が満足されるときには式(7.48)より

$$N(\Omega) = N_{Fi}(\Omega) / m \quad (7.50)$$

となり "各発振器の自由発振における雑音の $1/m$ が相互同期系により実現できる。" この結論で N は N_A, N_P, N_C の代表であることに留意された。従って実周波数の雑音 $\tilde{N}(\omega)$ で言いかえると式(7.48), (7.50) の $N(\Omega)$ を $\tilde{N}(\omega) / P_{out}$ (つまり \tilde{N}/C 比) でおきかえた式が成立する。"相互同期系全体の \tilde{N}/C は最適な状態で各発振器の自由発振時の \tilde{N}/C の $1/m$ になる。"

式(7.48)を前章第6.4節で述べた "Magic-T による2台の発振器の相互同期系" に応用してみよう。すると2発振器が同じ特性を持つ場合には $T_{D1}^0 = T_{D2}^0$, $a_{o2} = a_{o1} e^{j\theta}$ であるから

$$N(\Omega) = \frac{N_{F1}(\Omega) + N_{F2}(\Omega)}{4 \cos^2 \theta} = \frac{\bar{N}_F(\Omega)}{2 \cos^2 \theta} \quad (7.51)$$

となる。ここで \bar{N}_F は2つの発振器の自由発振時の雑音電力の平均値である。従って $N_{F1} = N_{F2}$ のときは $\bar{N}_F = N_{F1} = N_{F2}$ となる。式(7.51)の結果を結合アームの位相 θ を変えて計算した結果を図6.5に他の特性に合わせて示した。雑音特性は一般に同期領域の中央付近、つまり $\theta = 0, \pi$ でよくなり特に $\Delta\omega = 0$ で式(7.50)で与えられる最少値となる。また同期のはずれがけるときは $N \rightarrow \infty$ となる。

2発振器が逆の特性を持つときには $T_{D1}^0 = -T_{D2}^0$ であるから

$$N(\Omega) = \frac{N_{F1}(\Omega) + N_{F2}(\Omega)}{4 \sin^2 \theta} = \frac{\bar{N}_F(\Omega)}{2 \sin^2 \theta} \quad (7.52)$$

となる。この結果は同じく図6.6に示した。この場合には $\Delta\omega \rightarrow 0$ で $N \rightarrow \infty$ となり不安定になるとわかる。

雑音に関する実験報告は少ないが図6.7, 6.8と同じ文献⁵⁰⁾にある一例を示すと図7.4のようになる。この図は図6.6のb), c)のデータにほぼ対応している。

残念ながら現在までに式(7.50)を証明する実験報告はなされていないがこれは

応答特性も雑音特性も等しい幾台かの発振器が必要であるので容易には得られないと思う。むしろ図7.3のデータの方が得やすいと思われる。なお図7.4で N_p は $(N_{p1} + N_{p2})/2$ を僅かに切っていることに注意された。

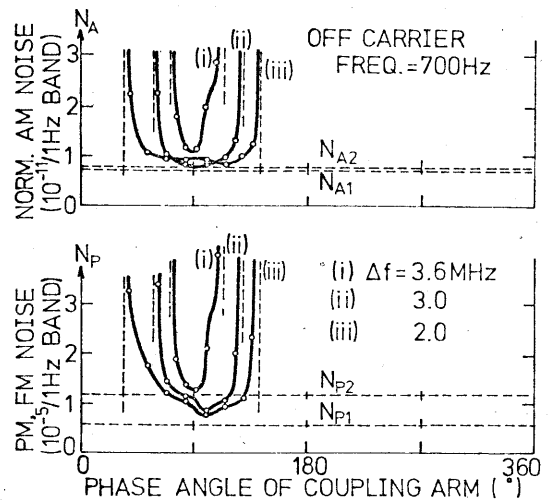


図7.4. カン発振器による相互同期系の雑音⁵⁰⁾(図6.6.b), c)にほぼ対応)

8. 結 語

第2章～第7章の各章で発振器の自由発振，注入同期発振，相互同期発振について詳細な議論を行なったが最後にこれらの各章の結果を簡単にまとめてみる。

第2章では非線形な発振器の特性を定常動作点付近について考えることにより Z_0^0 , Z_I^0 , $Z_D^0(D)$, $Z_D^0(D)$ (D は複素周波数で d/dt に対応する)，の4つのパラメータで完全に記述できることを示した。特に発振器が線形に近く，しかも振幅，周波数のゆくりした変動しか考えないときには Z_0^0 , Z_I^0 , Z_D^0 の3つの複素ベクトルで非線形発振器は完全に記述できる。以上は発振器の特性をインピーダンス表示した場合であるが，これをマッド波帯で便利ないように反射係数表示することも可能である。このときは T_0^0 , T_B^0 , T_D^0 の3つのパラメータで完全に記述できる (T は反射係数の逆数である)。 T_0^0 は発振器の定常動作点での逆反射係数， T_B^0 , T_D^0 は逆反射係数の B , $j\omega$ による依存性を示す (B は発振器から出てくる波の振幅， ω は発振周波数である)。これらの複素ベクトルはいずれも測定可能な量であり Rieke 図から容易に求めることができる。また負荷についても同様 S_0^0 , S_D^0 でその特性を記述できる。

第3章では1台の発振器の自由発振系についてその発振が安定に継続する条件を求めた。その結果は

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-T_0^0}{S_D^0 - T_D^0}\right) > 0 \quad (8.1)$$

のとき安定になる。これは実験によっても確かめられた。

第4章では注入同期されている発振器の安定性について述べた。この章では同期される時，あるいははずれるときの動的な応答をかなり厳密に考慮した。その結果注入される同期信号の周波数が同期される発振器の自由発振周波数とかなりずれているときにヒステリシス現象の存在することも予測することができた。これは実験によりきれいに観測された。また周波数差と同期のかかる注入波振幅の関係が従来の理論結果と異なり非

対称な形になり得ることも理論, 実験の双方から確認された。

第5章では発振器の雑音を振幅変動, 位相変動としてとらえることにより (AM雑音, PM雑音) その発生のメカニズムを議論した。その結果 AM雑音, PM雑音はマイクD波帯の外乱, 発振器のインピーダンス T_0 の低周波の変動により発生する。特に前者に対しては外乱によるキャリアの Locking 現象が生じキャリアが本来の ω_0 のまわりにぶらつくことが示される。また以上の結果を用いて実周波数 ω での雑音スペクトルの算出も行なった。AM雑音は低域で周波数によらないスペクトルを持ち PM雑音はほぼ Ω^{-2} (Ω は振幅, 位相の変動周波数) に比例するスペクトルを持つ。また実周波数の雑音は $(\omega - \omega_0)^{-2}$ に比例するスペクトルを持つことが示された。なおこの章では後に第7章で相互同期系の雑音の解析をする序論的な意味でかなり一般的な解析法を示した。この章ではさらに注入同期されている発振器の雑音についても解析を行なった。その結果 AM雑音は余り変わらないが PM雑音が $\Omega \rightarrow 0$ で Ω^{-2} に比例して増加せず同期中 Ω_L 以内で一定になることが示された。

第6章では相互同期の安定性について検討した。対称な相互同期系ではその安定性は各発振器を独立に自由発振させたときの安定性と, 全発振器が同じに動く仮定したとき (つまり各発振器の振幅, 位相を $\delta A_1(t) = \delta A_2(t) = \dots = \delta A(t)$, $\delta \theta_1(t) = \delta \theta_2(t) = \dots = \delta \theta(t)$ と形式的においたとき) の安定性の双方から判断できる。その結果並列共振回路で安定になる発振器は並列形相互同期回路で安定になり直列共振回路で安定になる発振器は直列形相互同期回路で安定になることが示される。また非対称な相互同期系でも発振器が線形に近いときには解析が可能でありその場合の解析結果を示した。またこれらの理論結果を利用して Magic-Tを用いた2台の発振器の相互同期系の解析を行なった。結合の様子を変えていったときの同期周波数, 出力の変動を算出した結果, 報告されている実験結果と良い一致を見た。

第7章では相互同期系の雑音を第5章の手法を用いて解析した。その結果 AM雑音, PM雑音の相互同期中 Ω_S 内のスペクトルについては全発振器が一斉にぶらつきあたかも1台の発振器のように振舞うことが示された。またその領域の雑音を最少にする

回路条件を求めた結果、結合回路が周波数特性を持たないものとする。

$$T_{D_i} a_{0_i}^2$$

の方向をそろえたときに最小雑音を得られる。ここで T_{D_i} は i 番目の発振器の T_D 、また a_{0_i} は同じく発振器から出てくる波をベクトル表示したものである。この条件が成立しかつ各発振器が同じ雑音特性を持つときには系全体の雑音/出力は各発振器が独立して自由発振しているときの雑音/出力の $1/n$ になることが示された。また相互同期中 Ω_s より離れたスペクトルについては各発振器が独立に雑音を出しているという近似で扱える。

以上簡単に各章の概略を述べた。相互同期系は今後ミリメートル波、遠赤外と周波数の上るにつれ益々必要となる技術と思われる、本論文で示した解析法が充分生かされることを望みながら、本論文を終了する。

謝 辞

本研究に当り、多くの方々のお世話になったので、こゝに感謝の意を表したい。特に東京大学工学部岡村總吾教授に対し厚くお礼を申し上げる。同教授には卒業論文時代より5年半も指導教官として終始御指導を戴いた。また同、大越孝敬助教授には日頃の御討論、あるいは有益な実験データを借して戴き、お世話になった。また同、岡村研究室の田宮寿美子助手、園原章人技官をはじめとする岡村研究室、大越研究室の方々には実験上あるいは私的な面で御援助を賜わった。大越研究室で博士課程終了後現在山梨大学工学部助教授の橋口住久氏には第5章の全般に対し、また同研究室で私と同級の三好旦六氏には注入同期に対し、また同研究室で修士課程終了後三菱電機株式会社勤務されている小谷三千男氏、同じく卒業論文終了後本学大学院におられる三好久雄氏には相互同期系に対し、それぞれ有益な御助言と御示唆を戴いた。

本研究は米国 Bell Telephone 研究所の黒川兼行氏の直接の御示唆がきっかけとなり始まったもので、その後も同氏から色々な面で御援助を戴いた。また日本電信電話公社電気通信研究所ミリ波伝送部宮内一洋氏、深津良治氏、赤池正己氏をはじめ同研究室の方々、東京芝浦電気株式会社沢山美彦氏には本理論の全般にわたり御検討戴いた。東京工業大学工学部古川静二郎教授には第7.2節の研究の御示唆を戴いた。本学工学部柳井久義教授をはじめ同、柳井研究室の方々、日本電気株式会社杉元重時氏より実験上の御援助を賜わった。

本研究は以上の方々をはじめとする多くの方々の御援助により完成したものであり、深く感謝する。

公表文献

今までに本研究に関し公表した論文, 講演発表, およびこれから公表する予定の一覧を示す.

a) 学会雑誌, 年報等

- 1) 岡部, 岡村; "Free-Running, 同期運転, 並列運転における発振器の安定性, 雑音の解析," p. 755 Vol. 52-B, No. 12, 信学論(B) (1969)
- 2) 岡村, 岡部; "Free-Running, 同期運転, 並列運転における発振器の安定性, 雑音の解析," p. 135, Vol. 28, 東大綜試年報 (1969)
- 3) Y. Okabe and S. Okamura; "Stability and Noise of Many Oscillators in Parallel-Running," p. 111, Vol. 29, 東大綜試年報 (1970)
- 4) 岡部, 岡村; "多発振器の並列運転系の安定性および雑音," p. 743, Vol. 53-B, No. 12, 信学論(B) (1970)
- 5) S. Okamura, Y. Okabe, T. Okoshi and T. Miyoshi; "Measurement of Rieke-Diagram with Locking Oscillator," Proc. of 1969 European Microwave Conference, IEE, Sept (1969)
- 6) S. Okamura and Y. Okabe; "Power and Noise of Multiple Microwave-Oscillators," Proc. of 1971 European Microwave Conference, IEE, Sept (1970)
- 7) Y. Okabe and S. Okamura; "Analysis on Mutual Synchronization of Multiple Microwave Oscillators," Trans. of IEEE, MTT (投稿中)

b) 大会講演等

- 8) 岡部, 三好, 岡村, 大越; "ロッキン T を用いたリ- Γ 線図の測定範囲について," 昭44電気連大 No. 1559 (1969)
- 9) S. Okamura, Y. Okabe, T. Okoshi, T. Miyoshi; "3)と同じ," 1969 European Microwave Conference Handbook, p. 48 Sept. (1969)
- 10) 岡部, 岡村; "発振器の並列運転の安定性解析," 昭44信学全大 No. 433 (1970)
- 11) 岡部, 岡村; "多数発振器の相互同期運転系の特性," 昭45信学全大 No. 508 (1970)

- 12) 岡部, 岡村; "発振器の発振周波数変動および発振周波数近傍の雑音," 昭46 信学全大 No.570 (1971)
- 13) S. Okamura and Y. Okabe; "6)と同じ," 1971 European Microwave Conference (1971)
- 14) 岡部, 岡村; "多数発振器の相互同期系の雑音とその低減" PB47 信学全大 (発表予定) (1972)

c) 電子通信学会研究会

- 15) 岡村, 岡部; "発振器の安定性および雑音の解析—free-running, 同期運転, 並列運転の場合," 信学70波研資 MW69-12 (1969)
- 16) 岡部, 岡村; "多数発振器の並列運転系の安定性および雑音," 信学70波研資 MW70-23 (1970)

参考文献

公表文献欄に示したものは除く。

第2章に関するもの

- 17) K. Kurokawa; "Some basic characteristics of broadband negative resistance oscillator circuits", Bell Syst. tech. J., 48, 6, p. 1937 (July - Aug. 1969)
- 18) C. Hayashi; "Nonlinear oscillations in physical systems", McGraw-Hill (1964)
- 19) J.C. Slater; "Microwave electronics", D. Van Nostrand (1950)

第3章に関するもの

- 20) 長野; "反射形空洞による固体発振器の安定化," 信学研資 MW 69-61 Dec. (1969)
- 21) 白幡; "BRF装荷による負性抵抗発振器の安定化," p. 485 Vol. 52-B, 信学論(B), No. 8 (1969)

第4章に関するもの

- 22) R. Adler; "A study of locking phenomena in oscillators," p. 351, Proc. IRE, June (1946)
- 23) R. C. Shaw and H. L. Stover; "Phase-locked avalanche diode oscillators," p. 710, Vol. 34, No. 4, Proc. IEEE, April (1966)

第5章に関するもの

- 24) K. Kurokawa; "Noise in synchronized oscillators," p. 234, Vol. MTT-16, No. 4, IEEE Trans. MTT, April (1968)
- 25) E. F. Scherer; "Investigations of the noise spectra of avalanche oscillators," p. 781, Vol. MTT-16, No. 9, IEEE Trans. MTT, Sept. (1968)
- 26) 橋口, 大越; "カミ発振器雑音源定数の決定," p. 459, Vol. 53-B, No. 8, 信学論(B), Aug. (1970)

- 27) 斎藤, 高木, 真野; "ランダム雑音に対する同期引込発振器の応答," p. 16, Vol. 51-A, No. 1, 信学論(A) Jan (1968)
- 28) 磯部, 時田; "同期引込みによる発振器雑音の改善", p. 2093, Vol. 50, No. 11, 信学誌 Nov. (1967)
- 29) 杉浦; "同期引込みによる発振器雑音に関する一考察," p. 409 Vol. 51-B, No. 8, 信学論(B) Aug (1968)
- 30) M. E. Hines, J-C. R. Collinet and J. G. Ondria; "FM noise suppression of an injection phase-locked oscillator," IEEE Trans., MTT-16, 9, p. 738, Sept. (1968)
- 31) 斎藤, 高木, 真野; "同期引込みによる発振器の安定化に関する基礎考察," p. 212, Vol. 52-B, 4, 信学論(B), April (1969)
- 32) 同上; "同期引込みによる発振器の周波数安定化における白色および $1/f$ 性雑音の影響," p. 784, Vol. 52-B, No. 12, 信学論(B) (1969)
- 33) 大越, 三好, 竹野; "ガン発振器の遷倍同期," 信学会研究 MW 68-3, April (1968)
- 34) 太田, 村上; "自己注入による負性抵抗発振器の雑音軽減," p. 516, Vol. 51-B, No. 10, 信学論(B), Oct (1968)
- 35) J. R. Ashley and F. M. Palka; "Measured FM noise reduction by injection locking," p. 155, Vol. 58, No. 1, Proc. IEEE Jan (1970)
- 36) J. R. Ashley and C. B. Searles, "Microwave oscillator noise reduction by a transmission stabilizing cavity," IEEE Trans., MTT-16, Vol. 9, p. 743, Sept. (1968)
- 37) 深津; "PM波注入同期増幅器の位相動特性の解析," No. 418, AB 44 信学全大 (1970)
- 38) S. Hashiguchi and T. Okoshi; "Determination of Equivalent Circuit Parameters Describing Noise from a Gunn Oscillator," p. 686, Vol. MTT-19, 8, IEEE Trans. Aug. (1971)
- 39) H. J. Thaler, G. Ulrich and G. Weidman; "Noise in IMPATT diode amplifiers and oscillators," p. 692, Vol. MTT-19, No. 8, IEEE Trans. MTT Aug (1971)

第6章 に関するもの

- 40) C. B. Swan; "Improved performance of silicon avalanche oscillators mounted on diamond heat sinks," p. 1619, Vol. 55., No. 9 Proc. IEEE, Sept. (1967)
- 41) Swan, Misawa and Marinaccio; "Composite avalanche diode

- structures for increased power capability," p.584, Vol. ED-14, No.9
IEEE Trans. ED, Sept. (1967)
- 42) S. Mitsui; "CW Gunn diodes in composite structure," IEEE Trans.
MTT-17, No.12, p.1158, Dec. (1969)
- 43) W.O. Schlosser and A.L. Stillwell; "Travelling-wave approach to the
high power solid state oscillator," p.1588, Vol.56, No.9, Proc. IEEE, Sept.(1968)
- 44) 金子, 本村; "並列運転ガン管発振器の回路特性," 信学会研資
MW 69-59, Dec. (1969)
- 45) 池上, 福井; "Magic T結合並列7ライストロン," p.2439, Vol.49,
No.12, 信学誌 Dec. (1966)
- 46) H. Fukui; "Frequency locking and modulation of microwave
silicon avalanche diode oscillators," p.1475, Vol.54, No.10, Proc. IEEE (1966)
- 47) S. Mizushima; "2ⁿ Oscillators combined with 3-dB directional coupl-
ers for output power summing," p.2166, Vol.55, Proc. IEEE, Dec. (1967)
- 48) J. R. Nevarez and G. J. Herskowitz; "Output power and loss analysis
of 2ⁿ injection locked oscillators combined through an ideal and
symmetric hybrid combiner," p.2, Vol. MTT-17, No.1, IEEE Trans. Jan. (1969)
- 49) K. Kurokawa; "The single-cavity multiple-device oscillator,"
p.793, Vol. MTT-19, No.10, Trans. IEEE MTT, Oct. (1971)
- 50) 三好; "ガン管発振器の相互同期", 東京大学工学部電子工学科卒業論文
No.331 (1970)

第7章に関するもの

- 51) W. O. Schlosser; "Noise in mutually synchronized oscillators,"
IEEE Trans. MTT-16, No.9, p.732, Sept. (1968)
- 52) 池上, 中島; "マ170波固体素子の電力合成と雑音遷減," p.939,
Vol. 24, No.12, テレビ誌, Dec. (1970)
- 53) 大越, 小谷; "ガン管発振器の並列同期運転とその雑音特性,"
信学会研資 MW-69-70 Feb. (1970)

付録 A. 共役, 実部, 虚部 オペレータ

オペレータを含む式の共役, 実部, 虚部, 絶対値をとる操作を形式的に行うと思われ誤ちをおかすことがある。このようなオペレータを含む複素演算では共役オペレータ, 実部オペレータ, 虚部オペレータ等を定義しておくと思ちもおきにくく便利である。

例えば $x(t)$ にかかる $F(D)$ なるオペレータを考える。 $F(D)$ を巾級数に展開したものを次のように表わしておく。

$$F(D) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} F^{(i)} D^i \quad (\text{A.1})$$

さて $F(D)x(t)$ に共役な量を考えてみよう。

$$\begin{aligned} [F(D)x(t)]^* &= \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} F^{(i)} D^i x(t) \right]^* = \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} F^{(i)} \frac{d^i}{dt^i} x(t) \right]^* \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} F^{(i)*} \frac{d^i}{dt^i} x(t)^* = \sum_{i=-\infty}^{\infty} F^{(i)*} D^i x(t)^* = \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} F^{(i)*} D^{*i} \right]^* x(t)^* \\ &= [F(D^*)]^* x(t)^* \end{aligned}$$

従って形式的に共役オペレータを次のように定義するとオペレータ通常の $x(t)$ などと同じような変数として取扱うことができる。

$$[F(D)]^c = [F(D^*)]^* \quad (\text{A.2})$$

つまり

$$[F(D)x(t)]^* = [F(D)]^c x(t)^* \quad (\text{A.3})$$

となる。 D は d/dt なるオペレータで実数とか虚数とかいう概念はないはずであるが F を D の関数として考えるときは形式上 D を複素変数のように扱う方が誤りが少ない。特に固有値問題を考える時には D は複素周波数として扱われるので、オペレータの場合にも式(A.2)のように扱うのがよい。

共役オペレータが定義されるとそれを用いて実部オペレータと虚部オペレータをそれぞれ次のように定義できる。

$$[F(D)]^R = \frac{1}{2} \{ F(D) + [F(D)]^c \} \quad (A.4)$$

$$[F(D)]^I = \frac{1}{2j} \{ F(D) - [F(D)]^c \} \quad (A.5)$$

従って

$$F(D) = [F(D)]^R + j [F(D)]^I \quad (A.6)$$

$$[F(D)]^c = [F(D)]^R - j [F(D)]^I \quad (A.7)$$

いま $x(t)$ が実変数とすると

$$\operatorname{Re}[F(D)x(t)] = [F(D)]^R x(t) \quad (A.8)$$

$$\operatorname{Im}[F(D)x(t)] = [F(D)]^I x(t) \quad (A.9)$$

が得られる。

次に固有値問題などで表われるいくつかの重要な公式を導いてみる。変数 $x(t)$ が定複素数 x_0 、定複素周波数 D_0 を用いて

$$x(t) = x_0 e^{D_0 t} \quad (A.10)$$

で与えられる時

$$D x(t) = \frac{d}{dt} x_0 e^{D_0 t} = D_0 x(t) \quad (A.11)$$

となる。つまり D の固有値は D_0 となる。同様にして

$$D[x(t)]^* = \frac{d}{dt} x_0^* e^{D_0^* t} = D_0^* [x(t)]^* \quad (A.12)$$

となり $[x(t)]^*$ に対しては D の固有値は D_0^* となる。このことから一般に $F(D)$ なる任意のオペレータに対し、式 (A.10) の $x(t)$ を用いて

$$F(D)x(t) = F(D_0)x(t) \quad (A.13)$$

$$F(D)[x(t)]^* = F(D_0^*)[x(t)]^* \quad (A.14)$$

が成り立つ。ここで $F(D)$ は共役、実部、虚部オペレータであってもよい。

式 (A.13) と式 (A.14) を加えて z で割ると次の重要な公式が得られる。

$$\begin{aligned} F(D) \operatorname{Re}[x(t)] &= \frac{1}{2} F(D_0) x(t) + \frac{1}{2} F(D_0^*) [x(t)]^* \\ &= \frac{1}{2} [F(D_0) + F(D_0^*)] \operatorname{Re}[x(t)] + \frac{j}{2} [F(D_0) - F(D_0^*)] \operatorname{Im}[x(t)] \end{aligned}$$

また式 (A.6), (A.7) を用いて (A.15)

$$\begin{aligned} F(D) \operatorname{Re}[x(t)] &= \frac{1}{2} F(D_0) x(t) + \frac{1}{2} \{ [F(D_0)]^c x(t) \}^* \\ &= \operatorname{Re} \{ [F(D_0)]^R x(t) \} + j \operatorname{Re} \{ [F(D_0)]^I x(t) \} \end{aligned} \quad (A.16)$$

とも表わすことができる。式 (A.16) を実部と虚部にわけると

$$[F(D)]^R \operatorname{Re}[x(t)] = \operatorname{Re} \{ [F(D_0)]^R x(t) \} \quad (A.17)$$

$$[F(D)]^I \operatorname{Re}[x(t)] = \operatorname{Re} \{ [F(D_0)]^I x(t) \} \quad (A.18)$$

の二式が得られる。また式 (A.17), (A.18) の $x(t)$ を $-jx(t)$ とすると

$$[F(D)]^R \operatorname{Im}[x(t)] = \operatorname{Im} \{ [F(D_0)]^R x(t) \} \quad (A.19)$$

$$[F(D)]^I \operatorname{Im}[x(t)] = \operatorname{Im} \{ [F(D_0)]^I x(t) \} \quad (A.20)$$

が得られる。

付録B. 応答特性の表現Z, Y, S, T間の変換

素子の応答特性を表わすのに $Z(I(t), \theta_i(t))$, $Y(V(t), \theta_v(t))$, $S(A(t), \theta_A(t))$, $T(B(t), \theta_B(t))$ の4つの表現形式のあることを2.4節で示したが、ここではそのどれか1つの表現から他の3つの表現を求める方法について述べる。発振素子の理論解析から得られる応答特性はY表現で与えられることが多く、またマイクロ波での測定で得られる応答特性はS表現で与えられる(2.6節)。しかし2.4節で議論したようにマイクロ波発振器系の解析では発振器特性はT表現で表わされている方が便利である。このような場合にはどうしても各表現間の相互変換が必要となる。

例えばY表現が与えられているときに、それからT表現の形を求める場合を考える。式(2.12), (2.14)を用いると

$$\begin{aligned} b(t) &= \frac{v(t)}{\sqrt{R_0}} - \sqrt{R_0} i(t) \\ &= -\sqrt{R_0} \left[Y_0 - \frac{1}{R_0} + Y_v \delta V(t) + Y_D(D) \delta V(t) + Y_D'(D) \theta_v(t) \right] v(t) \end{aligned} \quad (B.1)$$

が得られる。この式に

$$b(t) = e^{B_0 + \delta B(t) + j\omega_0 t + j\theta_B(t)} \quad v(t) = e^{V_0 + \delta V(t) + j\omega_0 t + j\theta_v(t)} \quad (B.2)$$

の関係を代入すると $\delta B(t)$, $\theta_B(t)$, $\delta V(t)$, $\theta_v(t)$ の関係式が得られる。これらの変数が実変数であることと利用しさらに $Y_v \delta V(t) + Y_D(D) \delta V(t) + Y_D'(D) \theta_v(t)$ が微小量であることを用いると、この関係式から $\delta V(t)$ と $\theta_v(t)$ を $\delta B(t)$, $\theta_B(t)$ の簡単な関数として求めることができる。一対微小偏移近似を用いると

$$\begin{aligned} \frac{a(t)}{b(t)} &= \frac{v(t) + R_0 i(t)}{v(t) - R_0 i(t)} \\ &= \frac{1/R_0 + [Y_0 + Y_v \delta V(t) + Y_D(D) \delta V(t) + Y_D'(D) \theta_v(t)]}{1/R_0 - [Y_0 + Y_v \delta V(t) + Y_D(D) \delta V(t) + Y_D'(D) \theta_v(t)]} \\ &= \frac{1/R_0 + Y_0}{1/R_0 - Y_0} + \frac{2/R_0}{(1/R_0 - Y_0)^2} [Y_v \delta V(t) + Y_D(D) \delta V(t) + Y_D'(D) \theta_v(t)] \end{aligned} \quad (B.3)$$

となるから、この式に $\delta B(t)$, $\theta_B(t)$ で表わされた $\delta V(t)$ と $\theta_V(t)$ を代入すれば

$$\frac{a(t)}{b(t)} = T(B(t), \theta_B(t)) \quad (B.4)$$

なる T 表現が Y 表現の定数, オペレータのみを用いて得られる。以上 Y 表現から T 表現を得る際の手続について概略を述べた。

詳細な手続は、次に示すようにもっと一般的にある任意の表現から別の表現を得る場合について示す。一般に次の変換を考慮してみる。

$$\begin{array}{ccc} \text{変数 } x(t) \text{ の表現 } F & \Rightarrow & \text{変数 } y(t) \text{ の表現 } G \\ F(x(t), \theta_x(t)) & & G(y(t), \theta_y(t)) \end{array}$$

上述の例の場合 $x(t)$, F が $v(t)$, Y に対応し $y(t)$, G が $b(t)$, T に対応している。一般に $y(t)$, $x(t)$ がどんな 2 つの変数でもその間に式 (B.1) のような関係式を得ることが出来る。

$$y(t) = k [F_c + F_x \delta x(t) + F_D(D) \delta x(t) + F_D'(D) \theta_x(t)] x(t) \quad (B.5)$$

また表現 G に対して式 (B.3) のような形を微小偏移近似を用いて導くことができる。

$$G : J(F_0) + J'(F_0) [F_x \delta x(t) + F_D(D) \delta x(t) + F_D'(D) \theta_x(t)] \quad (B.6)$$

$Y \rightarrow T$ では式 (B.5) の $k = -\sqrt{R_0}$, $F_c = Y_0 - 1/R_0$, 式 (B.6) の

$$J(F_0) = \frac{1/R_0 + Y_0}{1/R_0 - Y_0}, \quad J'(F_0) = \frac{2/R_0}{(1/R_0 - Y_0)^2} \quad \text{とおけばよい。また式 (B.5) に}$$

$$y(t) = e^{y_0 + \delta y(t) + j\omega_0 t + j\theta_y(t)}, \quad x(t) = e^{x_0 + \delta x(t) + j\omega_0 t + j\theta_x(t)}$$

を代入し両辺の対数をとると

$$y_0 + \delta y(t) + j\theta_y(t) = x_0 + \delta x(t) + j\theta_x(t)$$

$$+ \log \{ k [F_c + F_x \delta x(t) + F_D(D) \delta x(t) + F_D'(D) \theta_x(t)] \}$$

ここで $\log \{ \dots \}$ の項に微小偏移近似を用い、さらに定常状態での条件から得られる

$$y_0 = x_0 + \log |k F_c| \quad (B.7)$$

の関係を用いて整理した後その実部と虚部をとると

$$\delta y(t) = \delta x(t) + \left(\frac{F_x + F_D(D)}{F_c}\right)^R \delta x(t) + \left(\frac{F_D'(D)}{F_c}\right)^R \theta_x(t)$$

$$\theta_y(t) = \theta_x(t) + \arg(kF_c) + \left(\frac{F_x + F_D(D)}{F_c}\right)^I \delta x(t) + \left(\frac{F_D'(D)}{F_c}\right)^I \theta_x(t)$$

が得られる。その際 $\delta y(t), \theta_y(t), \delta x(t), \theta_x(t)$ が実変数であることと利用する。式中の実部オペレータ $()^R$, 虚部オペレータ $()^I$ については付録Aを参照されたい。これら2式より $\delta x(t), \theta_x(t)$ を $\delta y(t), \theta_y(t)$ の一次結合として求め、これを式(B.6)へ代入すると次式が得られる。

$$G: G(y(t), \theta_y(t)) = J(F_0) + J'(F_0) F_c \frac{\{\alpha(D) + [\gamma(D)]^I\} \delta y(t) + \{\beta(D) + [\delta(D)]^I\} \theta_y(t)}{|F_c|^2 + [\alpha(D)]^R + [\beta(D)]^I + [\gamma(D)]^I} \quad (B.8)$$

ただし

$$\begin{aligned} \alpha(D) &= F_c^* [F_x + F_D(D)], & \beta(D) &= F_c^* F_D'(D) \\ \gamma(D) &= [F_x + F_D(D)]^c F_D'(D) \end{aligned} \quad (B.9)$$

である。共役オペレータ $()^c$ についてはやはり付録Aを参照されたい。

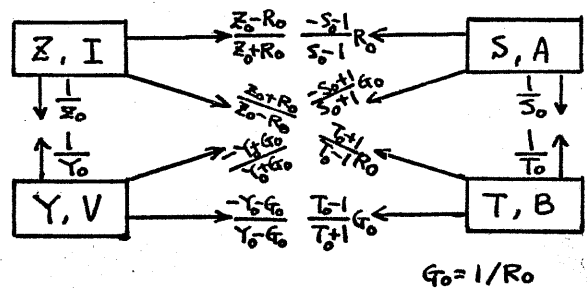
ここで得られた式(B.8), (B.9) は任意の表現から別の任意の表現への言わば万能変換公式である。これを利用するには次のようにする。

i) 図B.1でどの表現からどの表現への変換を必要とするかを決める。その矢印の始点に書かれた記号をF, Xとし終点に書かれた記号をG, Yとして式(B.8), (B.9)を書きなおす。

ii) $J(F_0), J'(F_0), F_c$ 以外はi)の操作ですべて式(2.13)~(2.16)に現われた記号におき替るはずである。次に矢印に沿って $J(F_0)$ の形が図B.1に示してあるから、これを読みとる。 $J(F_0)$ が定まると $J'(F_0), F_c$ は次式で定めることができ。

$$J'(F_0) = \frac{\partial J(F_0)}{\partial F_0} \quad (B.10)$$

$$F_c = J(F_0) \text{ の分母} \quad (B.11)$$



なお図からわかるように $J(F_0)$ 図B.1. 各表現の間の変換関数 $J(F_0)$

は普通の Z_0, Y_0, S_0, T_0 相互と変換と全く同じに行っている。

以上で Z, Y, S, T のどの表現が与えられても他の表現が計算できることを示した。次に特に線形素子の場合、式(18.8)がどうなるかを考えてみる。まず線形素子の場合、のちに示すように式(2.10)と同様な性質を持っている。

$$F_0 = F(j\omega_0), F_\infty = 0, F_D(D) = -jF_D'(D) = F(D+j\omega_0) - F(j\omega_0) \quad (18.12)$$

これを利用して式(18.9), (18.8)を計算すると変換公式として次式が求まる。

$$G(\varphi_y(t), \theta_y(t)) = J(F_0) + J'(F_0) \frac{F_c F_D(D)}{F_c + F_D(D)} (\delta\varphi_y(t) + j\theta_y(t)) \quad (18.13)$$

(線形素子の場合)

この式から変換を受けた後の G 表示でも式(18.12)のような関係式が成り立つことが証明できる。次の関係

$$G_0 = J(F_0) = J(F(j\omega_0)) = G(j\omega_0), \quad (18.14)$$

$$G_\infty = 0, \quad G_D(D) = -jG_D'(D)$$

は視察により $t = t_0$ ちにわかるが

$$G_D(D) = G(D+j\omega_0) - G(j\omega_0) \quad (18.15)$$

の証明はやや技巧を必要とする。それには変換 $J(F)$ を

$$J(F) = \frac{\mu F + \nu}{F + \lambda} \quad (18.16)$$

の形で与えておく。すると

$$\begin{aligned} G(D+j\omega_0) - G(j\omega_0) &= J(F(D+j\omega_0)) - J(F(j\omega_0)) = J(F_0 + F_D(D)) - J(F_0) \\ &= \frac{\mu F_0 + \mu F_D(D) + \nu}{F_0 + F_D(D) + \lambda} - \frac{\mu F_0 + \nu}{F_0 + \lambda} = \frac{\mu\lambda - \nu}{(F_0 + \lambda)^2} \frac{(F_0 + \lambda) F_D(D)}{F_0 + \lambda + F_D(D)} \\ &= J'(F_0) \frac{F_c F_D(D)}{F_c + F_D(D)} \end{aligned}$$

この最後の式は $G_D(D)$ の定義であるから式(18.15)が証明されたわけである。

Z 表現では線形素子は(18.12)で表わされることはわかっているから、以上のことよりどの表現でも(18.12)の性質のあることがわかる。

変換の一例として 2.3 節の最後で述べた容量 C の応答特性を別の方法で求めてみる。 C と L は双対であるから C を Y 表現すると

$$Y_0 = j\omega_0 C, \quad Y_D(D) = -jY_D'(D) = CD, \quad Y_V = 0$$

と簡単に表わされる。 これを式 (B.13) を用いて $Y \rightarrow Z$ 変換をすると

$$Z(Y_0) = \frac{1}{Y_0}, \quad Z'(Y_0) = -\frac{1}{Y_0^2}, \quad F_c = Y_0, \quad F_D(D) = CD$$

より

$$Z_0 = Z(Y_0) = \frac{1}{j\omega_0 C}, \quad Z_I = 0,$$

$$Z_D(D) = -\frac{1}{(j\omega_0 C)^2} \frac{j\omega_0 C CD}{j\omega_0 C + CD} = \frac{1}{(D + j\omega_0)C} - \frac{1}{j\omega_0 C}$$

となり 2.3 節最後の結果と一致する答が得られる。

付録 C. 固有解 $D_0, \delta_0(t)$ の性質

式 (6.54) で示した固有値問題

$$([\beta_0] + [\beta_D] D_0) \delta_0(t) = 0 \quad (C.1)$$

の解 $D_{0i}, \delta_0(t)_i$ ($i=1, 2, \dots, 2n$) の持ついくつかの性質とその証明を示す。

1) $D_{0i}, \delta_0(t)_i$ はもっと簡単な n 次の固有値問題

$$([\beta_0] + [\beta_D] D_0) \delta_0(t) = 0 \quad (C.2)$$

の n 個の解 $D_{0i}, \delta_0(t)_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) を用いて

$$\begin{cases} D_{0(2i-1)} = D_{0i} \\ \delta_0(t)_{2i-1} = \begin{pmatrix} \delta_0(t)_i \\ -j \delta_0(t)_i \end{pmatrix} \end{cases}, \quad \begin{cases} D_{0,2i} = D_{0i}^* \\ \delta_0(t)_{2i} = \begin{pmatrix} \delta_0(t)_i^* \\ j \delta_0(t)_i^* \end{pmatrix} \end{cases} \quad (C.3)$$

と表わされる。

[証明] 式 (C.3) の前半の解に対しては

$$\begin{aligned} ([\beta_0] + [\beta_D] D_{0i}) \begin{pmatrix} \delta_0(t)_i \\ -j \delta_0(t)_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}([\beta_0] + [\beta_D] D_{0i}) & -\operatorname{Im}([\beta_0] + [\beta_D] D_{0i}) \\ \operatorname{Im}([\beta_0] + [\beta_D] D_{0i}) & \operatorname{Re}([\beta_0] + [\beta_D] D_{0i}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_0(t)_i \\ -j \delta_0(t)_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ([\beta_0] + [\beta_D] D_{0i}) \delta_0(t)_i \\ -j ([\beta_0] + [\beta_D] D_{0i}) \delta_0(t)_i \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

同様にして後半の解に対しては

$$([\beta_0] + [\beta_D] D_{0i}^*) \begin{pmatrix} \delta_0(t)_i^* \\ j \delta_0(t)_i^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ([\beta_0] + [\beta_D] D_{0i}) \delta_0(t)_i \\ -j ([\beta_0] + [\beta_D] D_{0i}) \delta_0(t)_i \end{pmatrix}^* = 0$$

であるから確かにこれらは式 (C.1) の解になっている。特に $D_0 = 0$ に対しては

$$[\beta_0] \begin{pmatrix} 1 \\ -j1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\beta_0] 1 \\ -j[\beta_0] 1 \end{pmatrix} = 0, \quad [\beta_0] \begin{pmatrix} 1 \\ j1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\beta_0] 1 \\ -j[\beta_0] 1 \end{pmatrix}^* = 0$$

であるから $D_0=0$ は 2重に縮退 ($\lambda=0$ は固有値であり固有ベクトルは

$$\delta_0(t)]_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}, \quad \delta_0(t)]_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$$

のように選ぶことができる。なお固有値 D_{0i} のみを求めるには式 (C.2) より

$$1[\beta_0] + [\beta_D] D_0 = 0$$

または α_0 をくり出して

$$1[\delta_0] + [\delta_D] D_0 = 0$$

を解けばよい。

2) 異なる固有値 D_{0i}, D_{0j} ($i \neq j$) にそれぞれ対応する固有ベクトル $\delta_0(t)]_i, \delta_0(t)]_j$ は互いに独立である。従って任意の式 (C.1) の解ベクトルは $2n$ 個の固有ベクトル $\delta_0(t)]_i$ ($i=1, 2, \dots, 2n$) の一次結合で表わすことができる。

[証明] 数学的帰納法と背理法を用いる。まず p を $2 \sim 2n$ のある整数としてすでに $p-1$ 個の互いに独立な固有ベクトルが得られていると仮定する。 p 番目の固有ベクトル $\delta_0(t)]_p$ の独立性を証明するには、これをすでに得られている $p-1$ 個の固有ベクトルの一次結合で表わされるとして矛盾することを示せばよい。まず

$$\delta_0(t)]_p = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \delta_0(t)]_i$$

とする。ここで $D_{0p} \neq D_{0i}$ ($i=1, 2, \dots, p-1$) としておく。左から $\{\beta_0\}$ を式 (C.4) に掛けると

$$\{\beta_0\} \delta_0(t)]_p = \sum_i \alpha_i \{\beta_0\} \delta_0(t)]_i = -\sum_i \alpha_i D_{0i} \{\beta_D\} \delta_0(t)]_i$$

一方この左辺は

$$\{\beta_0\} \delta_0(t)]_p = -D_{0p} \{\beta_D\} \delta_0(t)]_p = -\sum_i \alpha_i D_{0p} \{\beta_D\} \delta_0(t)]_i$$

となるから

$$\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i (D_{0i} - D_{0p}) \{\beta_D\} \delta_0(t)]_i = 0$$

となる。一般に $|\{\beta_D\}| \neq 0$ としてよいからこの式は $p-1$ 個の固有ベクトル

$\delta_0(t)\}_i$ ($i=1, 2, \dots, p-1$) が一次従属であることを示し初めの仮定(独立性)と矛盾する。従って p 番目の固有ベクトル $\delta_0(t)\}_p$ は $p-1$ 個の固有ベクトル $\delta_0(t)\}_i$ ($i=1, 2, \dots, p-1$) に対し独立でなければならぬ。こうして p 個の独立な固有ベクトルの組が求まる。以下帰納的に p を増やしていけば $2n$ 個の固有ベクトルの独立性が言える。

D_{op} が m 重に縮退しているときには m 個の互いに独立な固有ベクトルを新たに選ぶことが出来るから上の議論はそのまま成立す。

3) 直交関係

$$\delta_0(t)\}_j^T \{a_0\} \{ \beta_D \} \delta_0(t)\}_i = 0, \quad \delta_0(t)\}_j^T \{a_0\}^* \{ \beta_D \} \delta_0(t)\}_i = 0 \quad (i \neq j) \quad (C.4)$$

が $\delta_0(t)\}_i$ ($i=1, 2, \dots, 2n$) に成立する。

[証明] $\delta_0(t)\}_i$ が $\begin{pmatrix} \delta_0(t)\}_i \\ -j\delta_0(t)\}_i \end{pmatrix}$ の形するとき後半の直交条件は

$$\{a_0\}^* \{ \beta_D \} \delta_0(t)\}_i = \begin{pmatrix} [a_0]^* & -j[a_0]^* \\ -j[a_0]^* & -[a_0]^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\beta_D] \delta_0(t)\}_i \\ -j[\beta_D] \delta_0(t)\}_i \end{pmatrix} = 0$$

より容易に証明される。式(C.4)の前半の直交関係は次の2つの関係より証明される。

$$(\{ \beta_0 \} + \{ \beta_D \} D_{oi}) \delta_0(t)\}_i = 0, \quad (\{ \beta_0 \} + \{ \beta_D \} D_{oj}) \delta_0(t)\}_j = 0$$

前式に左から $\delta_0(t)\}_j^T \{a_0\}$ を掛けると後式を転置して右から $\{a_0\} \delta_0(t)\}_i$ を掛けたものの差をとると

$$(D_{oi} - D_{oj}) \delta_0(t)\}_j^T \{a_0\} \{ \beta_0 \} \delta_0(t)\}_i = 0$$

となる。 $t = T^{-1}t$ 次の可逆条件を用いている。

$$\{a_0\} \{ \beta_0 \} = \{ \beta_0 \}^T \{a_0\}, \quad \{a_0\} \{ \beta_D \} = \{ \beta_D \}^T \{a_0\}$$

従って $D_{oi} \neq D_{oj}$ の条件で直交関係が証明された。

$\delta_0(t)\}_i = \begin{pmatrix} \delta_0(t)\}_i^* \\ j\delta_0(t)\}_i^* \end{pmatrix}$ の場合も同様にして直交性が証明される。

なお、可逆条件は S 行列の可逆性より容易に証明される。

$$[a_0] [\beta_*] = [a_0] [S_*] [a_0] = [a_0] [S_*]^T [a_0] = [\beta_*]^T [a_0].$$

付録 D. 2発振器の相互同期系の雑音

図 7.11 に示した 2 発振器の相互同期系の雑音を解析するには式 (7.23) を解けばよい。まず式 (7.23) の 1 行, 3 行 および 2 行, 4 行間で適当に和や差をとると

$$\begin{pmatrix} -S_{12} - T_{B1}^0 - T_{D1}^0 D & S_{12} & -jS_{12} - jT_{D1}^0 D & jS_{12} \\ S_{21} & -S_{21} - T_{B2}^0 - T_{D2}^0 D & jS_{21} & -jS_{21} - jT_{D2}^0 D \\ -S_{12}^* - T_{B1}^{0*} - T_{D1}^{0*} D & S_{12}^* & jS_{12}^* + jT_{D1}^{0*} D & -jS_{12}^* \\ S_{21}^* & -S_{21}^* - T_{B2}^{0*} - T_{D2}^{0*} D & -jS_{21}^* & jS_{21}^* + T_{D2}^{0*} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A_1(t) \\ \delta A_2(t) \\ \delta \theta_1(t) \\ \delta \theta_2(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Delta S_1(t) \\ \Delta S_2(t) \\ \Delta S_1(t)^* \\ \Delta S_2(t)^* \end{pmatrix} \quad (D.1)$$

さらに

$$T_{B1}^0 / T_{D1}^0 = T_{B2}^0 / T_{D2}^0 = \beta, \quad S_{12} / T_{D1}^0 = \alpha_1, \quad S_{21} / T_{D2}^0 = \alpha_2 \quad (D.2)$$

として式 (D.1) を書き直すと

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1 - \beta - D & \alpha_1 & -j\alpha_1 - jD & j\alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_2 - \beta - D & j\alpha_2 & -j\alpha_2 - jD \\ -\alpha_1^* - \beta^* - D & \alpha_1^* & j\alpha_1^* + jD & -j\alpha_1^* \\ \alpha_2^* & -\alpha_2^* - \beta^* - D & -j\alpha_2^* & j\alpha_2^* + jD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A_1(t) \\ \delta A_2(t) \\ \delta \theta_1(t) \\ \delta \theta_2(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Delta S_1(t) / T_{D1} \\ \Delta S_2(t) / T_{D2} \\ \Delta S_1(t)^* / T_{D1}^* \\ \Delta S_2(t)^* / T_{D2}^* \end{pmatrix} \quad (D.3)$$

が得られる。これを β か α_1, α_2 に対して充分小さいという近似で解くと

$$\begin{pmatrix} \delta A_1(t) \\ \delta A_2(t) \\ \delta \theta_1(t) \\ \delta \theta_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} D(D+\alpha_1^*)(D+\alpha_2) & D(D+\alpha_1^*)\alpha_1 \\ D(D+\alpha_1^*)\alpha_2 & D(D+\alpha_1^*)(D+\alpha_1) \\ -j(D+\beta^*)(D+\alpha_1^*)(D+\alpha_2) & -j(D+\beta^*)(D+\alpha_1^*)\alpha_1 \\ -j(D+\beta^*)(D+\alpha_1^*)\alpha_2 & -j(D+\beta^*)(D+\alpha_1^*)(D+\alpha_1) \\ D(D+\alpha_1)(D+\alpha_2^*) & D(D+\alpha_1)\alpha_1^* \\ D(D+\alpha_1)\alpha_2^* & D(D+\alpha_1)(D+\alpha_1^*) \\ j(D+\beta)(D+\alpha_1)(D+\alpha_2^*) & j(D+\beta)(D+\alpha_1)\alpha_1^* \\ j(D+\beta)(D+\alpha_1)\alpha_2^* & j(D+\beta)(D+\alpha_1)(D+\alpha_1^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta S_1(t) / T_{D1} \\ \Delta S_2(t) / T_{D2} \\ \Delta S_1(t)^* / T_{D1}^* \\ \Delta S_2(t)^* / T_{D2}^* \end{pmatrix} \quad (D.4)$$

となる。ここで

$$\Delta = D(D + \text{Re } \beta)(D + \alpha_1)(D + \alpha_1^*) \quad (D.5)$$

であり

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = S_{12}/T_{D1}^0 + S_{21}/T_{D2}^0 \quad (D.6)$$

である。

式(D.4)から雑音電力が計算できるわけであるが、その特性は極めて複雑になる。そこでこれをそれぞれの発振器の自由発振時の雑音特性で表わしてみると幸いに簡単な形になる。まず式(D.1)と同様、各発振器の雑音特性は次の式から計算できる。 $i=1$ or 2 とし

$$\begin{pmatrix} -T_{D1}^0 - T_{D1}^0 D & -jT_{D1}^0 D \\ -T_{D2}^{*0} - T_{D2}^{*0} D & jT_{D2}^{*0} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A_i(t) \\ \delta \theta_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta S_i(t) \\ \delta S_i^*(t) \end{pmatrix} \begin{matrix} e^{j\omega t} \\ e^{-j\omega t} \end{matrix} \quad (D.7)$$

この結果は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta A_i(t) \\ \delta \theta_i(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2D(D+\text{Re}\beta)} \begin{pmatrix} D & D \\ -j(D+\beta^*) & j(D+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta S_i(t)/T_{D1}^0 e^{j\omega t} \\ \delta S_i(t)^*/T_{D1}^{*0} e^{-j\omega t} \end{pmatrix} \\ &= \text{Re} \left(\begin{matrix} \frac{\delta S_i(t)/T_{D1}^0}{2(D+\text{Re}\beta)} e^{j\omega t} \\ \frac{-j(D+\beta^*) \delta S_i(t)/T_{D1}^0}{2D(D+\text{Re}\beta)} e^{j\omega t} \end{matrix} \right) \equiv \text{Re} \begin{pmatrix} \delta A_{Fi}(t) \\ \delta \theta_{Fi}(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (D.8)$$

となる。これを上式最後の等式に示すように複素ベクトル $\delta A_{Fi}(t)$, $\delta \theta_{Fi}(t)$ の実部という形で表わす。Fは free-running の意味である。

この $\delta A_{F1}(t)$, $\delta A_{F2}(t)$, $\delta \theta_{F1}(t)$, $\delta \theta_{F2}(t)$ を用いると式(D.4)は簡単に

$$\begin{pmatrix} \delta A_1(t) \\ \delta \theta_1(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[\frac{D+\alpha_2}{D+\alpha} \begin{pmatrix} \delta A_{F1}(t) \\ \delta \theta_{F1}(t) \end{pmatrix} \right] + \text{Re} \left[\frac{\alpha_1}{D+\alpha} \begin{pmatrix} \delta A_{F2}(t) \\ \delta \theta_{F2}(t) \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} \delta A_2(t) \\ \delta \theta_2(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[\frac{\alpha_2}{D+\alpha} \begin{pmatrix} \delta A_{F1}(t) \\ \delta \theta_{F1}(t) \end{pmatrix} \right] + \text{Re} \left[\frac{D+\alpha_1}{D+\alpha} \begin{pmatrix} \delta A_{F2}(t) \\ \delta \theta_{F2}(t) \end{pmatrix} \right] \quad (D.9)$$

これから ゆっくりした変動の成分に対しては $D \rightarrow 0$ とし

$$N_1 \cong \left| \frac{\alpha_2}{\alpha} \right|^2 N_{F1} + \left| \frac{\alpha_1}{\alpha} \right|^2 N_{F2}, \quad N_2 \cong \left| \frac{\alpha_2}{\alpha} \right|^2 N_{F1} + \left| \frac{\alpha_1}{\alpha} \right|^2 N_{F2} = N_1 \quad (D.10)$$

となる。ここで N は N_A, N_P, N_c を代表し F は自由発振における雑音電力を表わす。つまり発振器から供給される AM, PM, AM-PM, AM-FM 雑音電力は 2 台に対し同じ大きさになる。そのみならず式(D.10)からわかるようにゆっくりした変動に対しては

$$\delta A_1(t) = \delta A_2(t), \quad \delta \theta_1(t) = \delta \theta_2(t) \quad (D.11)$$

となり変動そのものが一致する。

早い変動に対しては $D \rightarrow \infty$ として

$$\begin{pmatrix} \delta A_1(t) \\ \delta \theta_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta A_{F1}(t) \\ \delta \theta_{F1}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta A_2(t) \\ \delta \theta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta A_{F2}(t) \\ \delta \theta_{F2}(t) \end{pmatrix} \quad (D.12)$$

が成り立つ。つまり各発振器は独立に電力を保持している雑音を出す。従って

$$N_1 \cong N_{F1}, \quad N_2 \cong N_{F2} \quad (D.13)$$

となる。

早い変動と遅い変動を分ける周波数は式(9)からほぼ

$$\Omega_s \cong |\alpha| = \left| \frac{\delta_{12}}{T_{D1}} + \frac{\delta_{21}}{T_{D2}} \right| \quad (D.14)$$

で与えられるが、この Ω_s を相互同期中と呼ぶ。

なお発振器1と2の雑音に相関がないものとするとき式(D.9)より各ポートの雑音電力は

$$N_1(\Omega) = \frac{(\Omega^2 + 2 \operatorname{Im} \alpha_2 \Omega + |\alpha_2|^2) N_{F1}(\Omega) + |\alpha_1|^2 N_{F2}(\Omega)}{\Omega^2 + 2 \operatorname{Im} \alpha \Omega + |\alpha|^2}$$

$$N_2(\Omega) = \frac{|\alpha_2|^2 N_{F1}(\Omega) + (\Omega^2 + 2 \operatorname{Im} \alpha_1 \Omega + |\alpha_1|^2) N_{F2}(\Omega)}{\Omega^2 + 2 \operatorname{Im} \alpha \Omega + |\alpha|^2}$$

(D.15)

で与えられる。