

高速多重極境界要素法による
大規模音場予測に関する研究

Study on Large-Scale Sound Field Analysis
using Fast Multipole Boundary Element Method

安田 洋介

平成 15 年 12 月 19 日

目次

目次	iii
記号表	ix
図目次	xiii
表目次	xxix
第 1 章 序	1
1.1 研究の背景	1
1.2 既往関連研究	3
1.3 研究の目的	5
1.4 論文の構成	5
1.5 使用計算機・プログラミング・反復解法について	8
第 2 章 解析アルゴリズムの構築	11
2.1 はじめに	11
2.2 音場の基礎方程式	11
2.3 境界要素法による音場の定式化	12
2.3.1 音場の境界条件	12
2.3.2 Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式の導出	13
2.3.3 Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式に基づくマトリクス方程式の導出	14
局所座標への変換	16
2.3.4 法線方向微分型積分方程式に基づくマトリクス方程式の導出	17
薄板の解析手法	18
2.3.5 Burton-Miller 法に基づくマトリクス方程式の導出	19
2.4 多重極展開の基礎理論	20
2.4.1 音場の多重極展開表現	20

2.4.2	多重極展開係数の変換	21
2.4.3	変換行列の対角化	22
2.5	高速多重極境界要素法による音場の定式化	23
2.5.1	高速多重極アルゴリズムの導入	23
	階層セル構造	24
	影響評価の方法	25
2.5.2	影響関数の定式化	27
	BF における定式化	27
	NDF における定式化	29
	Burton-Miller 法における定式化	30
	数値評価方法	30
2.5.3	数値計算過程	31
	BF における計算過程	31
	NDF における計算過程	34
	Burton-Miller 法における計算過程	35
2.6	計算効率の理論的概算	36
2.6.1	概算方法	36
2.6.2	計算量の評価	37
2.6.3	必要記憶容量の評価	40
2.7	まとめ	41
第 3 章	解析アルゴリズムの有効性の検証	43
3.1	はじめに	43
3.2	音響管解析による精度・効率の評価	43
3.2.1	解析方法	43
3.2.2	結果と考察	45
	計算精度	45
	計算量	45
	必要記憶容量	53
3.3	まとめ	55
第 4 章	多重極展開の設定条件に関する検討	57
4.1	はじめに	57
4.2	1 段階多重極展開における検討	59
4.2.1	解析方法	59

4.2.2	結果と考察	60
	単位球面積分点数	60
	無限級数和打ち切り次数	60
4.3	多段階多重極展開における検討	68
4.3.1	解析方法	68
	多重極展開表現による精度評価	68
	音響管解析による精度評価	68
4.3.2	結果と考察 –2 段階多重極展開 (補間 1 段) の場合–	70
	多重極展開表現による精度評価	70
	音響管解析による精度評価	72
4.3.3	結果と考察 –多段階多重極展開 (補間多段) の場合–	72
	打ち切り次数 N_c の設定	73
	多重極展開表現による精度評価	74
	音響管解析による精度評価	76
4.4	設定条件の妥当性の検証	76
4.4.1	直方体解析による BF の検証	77
	解析方法	77
	結果と考察	77
4.4.2	外部問題の解析による NDF・Burton-Miller 法の検証	82
	解析方法	83
	結果と考察	85
4.5	まとめ	86
第 5 章	階層セル構造に関する検討	91
5.1	はじめに	91
5.2	境界形状を考慮した階層セル構造の設定に関する検討	93
5.2.1	計算効率への影響要因	93
	階層セル構造の配置	93
	相互作用セル群からの寄与変換係数	94
5.2.2	境界形状が計算効率に与える影響	95
	解析方法	95
	結果と考察	96
5.2.3	計算効率の理論的概算	105
	階層セル構造の設定に関して	106
	計算量の評価	106

	必要記憶容量の評価	109
5.2.4	数値解析による検討	110
	解析方法	110
	結果と考察	111
5.2.5	階層セル構造の配置方針	119
5.2.6	実問題の解析による有効性の検証	120
	解析方法	120
	結果と考察	121
5.3	セル階層化レベルの設定に関する検討	122
5.3.1	計算効率の理論的概算による考察	124
	計算量	125
	必要記憶容量	126
5.3.2	数値解析による考察	127
	計算量	127
	必要記憶容量	129
5.4	対称形音場の解析における効率化手法	130
5.4.1	解析アルゴリズムの構築	130
	影響評価の方法	130
	数値計算過程	132
5.4.2	計算低減効果の理論的概算	134
	計算量	134
	必要記憶容量	134
5.4.3	有効性の検証	134
	立方体解析	134
	遮音壁解析	137
5.5	まとめ	139
第 6 章	反復解法の収束性に関する検討	141
6.1	はじめに	141
6.2	反復解法に関して	141
6.2.1	Krylov 部分空間反復解法	142
6.2.2	反復解法の種類	143
	CGS	143
	BiCGStab	143
	BiCGStab2	144

	GPBiCG	144
6.2.3	収束改善について	144
	前処理	144
	初期シャドウ残差の扱い	145
	周波数応答関数上の隣接解	145
6.3	収束判定に関する検討	145
6.3.1	収束判定基準の選定	146
6.3.2	収束判定値の設定に関する検討	147
	解析手法	147
	結果と考察	148
6.4	内部問題における検討	150
6.4.1	立方体解析	151
	解析手法	151
	結果と考察	152
6.4.2	小ホール解析	165
	解析手法	165
	結果と考察	166
6.5	外部問題における検討	171
6.5.1	立方体解析	172
	解析手法	172
	結果と考察	173
6.5.2	音響拡散体解析	182
	解析手法	182
	結果と考察	184
6.6	まとめ	189
第7章	総括	193
7.1	研究の成果	193
7.2	今後の展望・課題	196
7.2.1	他手法との比較による将来展望	196
7.2.2	応用可能性と今後の課題	197
付録 A	3次元音場基本解の多重極展開表現の導出	201
付録 B	随伴補間による内向係数の計算	203

付録 C	数値解析結果（小ホール）	205
付録 D	数値解析結果（音響拡散体）	231
	関連する発表論文一覧	245
	参考文献	249
	謝辞	257

記号表

a	吸音率
C	反復演算部の全計算量
C_n, C_n^l	ステップ n に関わる (レベル l における) 反復演算部の計算量
C_{tn}	n 次元的境界形状 (節点分布) の場合の全計算量
\overline{C}	セットアップ部の全計算量
$\overline{C}_n, \overline{C}_n^l$	ステップ n に関わる (レベル l における) セットアップ部の計算量
C_{m_l}	セル m_l が束ねるレベル $l+1$ のセル群
c	空気中の音速
D, D_l	(レベル l の) セルを包含可能な球の直径
d	要素サイズ, セル 1 辺の長さ, 立方体 1 辺の長さ
E	全必要記憶容量
E_n, E_n^l	ステップ n に関わる (レベル l における) 必要記憶容量
E_{tn}	n 次元的境界形状 (節点分布) の場合の全必要記憶容量
f	周波数
G	3 次元音場基本解
G_{m_l}	セル m_l 内の要素群
$h_n^{(1)}$	第 1 種球 Hankel 関数
I	相互作用セル群の平均セル数
I', I'_l	(レベル l において) 予め $T_{\lambda_{m_l}, \lambda_{m'_l}}$ を計算するためのセル間の位置関係の組み合わせ数, 即ち (レベル l における) 共有相互作用セル群のセル数
J	1 セルが内包する, 1 段下位レベルでの平均セル数
$ \mathbf{J} $	ヤコビアン
j	虚数単位
j_n	球 Bessel 関数
K, K_l	(レベル l における) 単位球面積分点数
K_n	Krylov 部分空間

k	波数
\mathbf{k}	波数ベクトル
$\hat{\mathbf{k}}_n, \hat{\mathbf{k}}_n^l$	(レベル l における) 単位球面積分点の位置ベクトル
L	階層セル構造の最下位レベル
L_{Mopt}	必要記憶容量を最小化する最下位レベル
L_r	解析対象の代表長さ
L_{Topt}	計算時間を最小化する最下位レベル
$L_{T_p\text{opt}}, L_{T_i\text{opt}}$	(セットアップ部, 反復演算部の) 計算時間を最小化する最下位レベル
l	階層セル構造のレベル
M	最下位レベルセル内平均節点数
M_{Mopt}	必要記憶容量を最小化する最下位レベルセル内平均節点数
M_{Topt}	計算時間を最小化する最下位レベルセル内平均節点数
M_j	メッシュポイント j の形状関数
M_l	レベル l におけるセル数
$\mathbf{M}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$	前処理行列
N, N_b, N_f	(BEM, FEM の) 自由度または節点数
N_c, N_c^l	(レベル l における) 無限級数和打ち切り次数
N_j	節点 j の内挿関数
N_k, N_k^l	(レベル l における) θ 方向の単位球面積分点数
N_{m_l}	セル m_l の近傍セル群
\mathbf{n}, \mathbf{n}_q	(点 q における) 境界面の単位法線ベクトル
$\partial/\partial n, \partial/\partial n_q$	(点 q における) 境界面の内向き法線方向微分
$O(\cdot)$	オーダー
P, p	音圧, $P = p \exp(-j\omega t)$
P	境界要素内の数値積分に必要な積分点数
P_l	Legendre 多項式
P_n^m	Legendre 陪関数
p_D	音源からの寄与
\mathbf{p}	音圧 p のベクトル
$\tilde{p}, \tilde{\mathbf{p}}$	板両面音圧差, 板両面音圧差ベクトル
Q	点音源の体積速度, 単位球面積分点の補間・随伴補間点数
R	最下位レベルにおける近傍セル群の平均セル数
\mathbf{r}_i	節点 i の位置ベクトル, 反復解法における反復 i 回目の残差ベクトル
\mathbf{r}_i^*	反復解法における反復 i 回目のシャドウ残差ベクトル

$T_{\lambda_{m_l} \lambda_{m'_l}}$	セル m_l の相互作用セル群に含まれるセル m'_l からの寄与変換係数
T_{m_l}	セル m_l の相互作用セル群
T'_l	レベル l での共有相互作用セル群
U	ポテンシャル
\mathbf{V}, \mathbf{v}	粒子速度ベクトル, $\mathbf{V} = \mathbf{v} \exp(-j\omega t)$
v	境界面の法線方向振動速度 (内向きを正)
\mathbf{v}	振動速度 v のベクトル
$W_{n'n}$	単位球面積分点の補間係数
w_i^g, w_j^c	積分点 θ, φ の重み係数
w_n, w_n^l	積分点 $\hat{\mathbf{k}}_n, \hat{\mathbf{k}}_n^l$ の重み係数
\mathbf{x}_i	反復解法における反復 i 回目の反復解
$Y_{n,m}, \mathbf{Y}$	球面調和関数, 球面調和関数ベクトル
z	比音響インピーダンス
α	Burton-Miller 法における方程式の線形結合係数, 無限級数和打ち切り次数内のパラメータ
$\Gamma, \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$	境界, 剛境界, 振動境界, 吸音境界
δ	Dirac のデルタ関数
δ_{ij}	Kronecker のデルタ
ε	反復解法における収束判定値
$\varepsilon_{ad}, \varepsilon_{ite}, \varepsilon_m,$	
$\varepsilon_{sym}, \varepsilon_{\varepsilon m}$	音圧分布差の評価量
ζ_{m_l}	セル m_l の上位レベルセルによる内向係数成分
Λ	展開係数の変換行列
λ	波長
λ_{m_l}	セル m_l の中心点
Ξ	展開係数の変換行列
ξ_{m_l}	セル m_l の外向係数
ρ	空気密度
τ_{m_l}	セル m_l の相互作用セル群による内向係数成分
$\Phi_{n,m}, \Phi^t$	球面波動関数, 球面波動関数ベクトル
ϕ_i	境界全面から各節点 i への寄与成分
$\phi_{F,i}$	最下位レベルセルの内向係数からセル内節点 i への寄与成分
$\phi_{N,i}$	最下位レベルの近傍セル群内の要素群による節点 i への寄与成分
Ψ, ψ	速度ポテンシャル, $\Psi = \psi \exp(-j\omega t)$

$\Psi_{n,m}, \Psi^t$	球面波動関数，球面波動関数ベクトル
ψ_D	ソース点からの寄与
Ω	領域
ω	角周波数
$\hat{\cdot}$	単位ベクトル
$\ \cdot\ $	ノルム
$\ \cdot\ _2$	2 ノルム (Euclid ノルム)
$\oint d\hat{\mathbf{k}}$	単位球面上の積分
*	複素共役
H	転置共役
$[\cdot]$	整数部
$\langle \cdot \rangle$	対称面に対する鏡像
∇	ハミルトニアン
∇^2	ラプラシアン

目次

1.1	Flow chart of this thesis (1).	6
1.2	Flow chart of this thesis (2).	7
2.1	Illustration of a sound field with three kinds of boundary.	13
2.2	Illustration of an interpolation function.	15
2.3	Illustration of a plate.	18
2.4	Illustration of two types of sound fields: Field 1 (outer field) and Field 2 (inner field).	20
2.5	Geometry of four points (points p, q, M, and L).	22
2.6	Hierarchical cell structure for a two-dimensional problem.	24
2.7	Hierarchical cell structure for a three-dimensional problem.	25
2.8	Relationship between cells at level l for two-dimensional problem.	26
2.9	Schematic diagram of MLFMA.	26
2.10	(a) 4-point interpolation and (b) its adjoint interpolation between level $l + 1$ and l . Thick lines denote meshes for quadrature points at level $l + 1$, and dot lines denote those at level l . The number of quadrature points K_l is larger than K_{l+1} .	32
2.11	Illustration of three types of problems.	36
3.1	Geometry of an acoustic tube and hierarchical cells in cases 1 and 2.	44
3.2	Distribution of complex sound pressure in the tube at 128.9 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	46
3.3	Distribution of complex sound pressure in the tube at 171.9 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	46

3.4	Distribution of complex sound pressure in the tube at 257.8 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	47
3.5	Distribution of complex sound pressure in the tube at 343.7 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	47
3.6	Distribution of complex sound pressure in the tube at 515.6 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	48
3.7	Distribution of complex sound pressure in the tube at 687.4 Hz, obtained with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure. . . .	48
3.8	Distribution of complex sound pressure in the tube at 1031.1 Hz, obtained with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	49
3.9	Relative errors in magnitude and errors in phase of the radiation impedance ratio on the piston, obtained with the BEM and with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	49
3.10	Computational time for the pre-process of the BEM and of the FMBEM in case 1. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	50
3.11	Computational time for the pre-process of the BEM and of the FMBEM in case 2. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	50
3.12	Computational time per iteration for the BEM and for the FMBEM in case 1. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	51
3.13	Computational time per iteration for the BEM and for the FMBEM in case 2. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	51
3.14	Computational time for the process of iteration of the BEM and of the FMBEM in case 1. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	52
3.15	Computational time for the process of iteration of the BEM and of the FMBEM in case 2. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	52
3.16	The number of iteration of the BEM and of the FMBEM in case 1. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	53
3.17	The number of iteration of the BEM and of the FMBEM in case 2. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	53

3.18	Computational time for the total process of the BEM and of the FMBEM in case 1. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	54
3.19	Computational time for the total process of the BEM and of the FMBEM in case 2. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	54
3.20	Memory requirements for the BEM and for the FMBEM in case 1. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	55
3.21	Memory requirements for the BEM and for the FMBEM in case 2. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	55
4.1	Geometry of cells (S, N, and F) and points (p, q, L, and M) in cases 1, 2, and 3.	60
4.2	Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA, under two conditions for kD and N_c	61
4.3	Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA, under two conditions for kD . $N_k = N_c$	62
4.4	Two formulae for N_c , overlaid on contour maps of relative errors in magnitude and of errors in phase obtained with the FMA.	63
4.5	Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA, under two conditions for N_c	64
4.6	Three formulae for N_c , overlaid on contour maps of relative errors in magnitude and of errors in phase obtained with the FMA.	66
4.7	Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA, under three conditions for N_c	67
4.8	Geometry of cells and points in cases 1 and 2.	69
4.9	Geometry of an acoustic tube and hierarchical cells.	69
4.10	Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA. N_c is given by Eq.(4.5). I-AI denotes interpolation and adjoint interpolation. . . .	70
4.11	Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA. N_c is given by Eq.(4.6). I-AI denotes interpolation and adjoint interpolation. . . .	71
4.12	Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA. N_c is given by Eq.(4.7). I-AI denotes interpolation and adjoint interpolation. . . .	71
4.13	Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA. N_c is given by Eq.(4.9). I-AI denotes interpolation and adjoint interpolation. . . .	72
4.14	Distribution of complex sound pressure in the tube at 200 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 2688$	73

4.15	Two formulae for N_c , overlaid on contour maps of relative errors in magnitude and of errors in phase obtained with the MLFMA.	74
4.16	Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the MLFMA. N_c is given by Eq.(4.7). I-AI denotes interpolation and adjoint interpolation.	75
4.17	Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the MLFMA. N_c is given by Eq.(4.13). I-AI denotes interpolation and adjoint interpolation.	75
4.18	Distribution of complex sound pressure in the tube at 200 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 2688$	76
4.19	Geometry of a rectangular room, a point source and hierarchical cells.	77
4.20	Distribution of sound pressure level on the floor at 61.4 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 408$	78
4.21	Distribution of sound pressure level on the floor at 122.8 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 1632$	78
4.22	Distribution of sound pressure level on the floor at 184.1 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 3672$	79
4.23	Distribution of sound pressure level on the floor at 244.5 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 6528$	80
4.24	Distribution of sound pressure level on the floor at 368.3 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 14688$	81
4.25	Distribution of sound pressure level on the floor at 491.0 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 26112$	81
4.26	Computational time for the pre-process of the BEM and of the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	83
4.27	Computational time per iteration for the BEM and for the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	83
4.28	Computational time for the process of iteration of the BEM and of the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	84
4.29	The number of iteration of the BEM and of the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	84
4.30	Computational time for the total process of the BEM and of the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	85
4.31	Memory requirements for the BEM and for the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	85
4.32	Geometry of an analysis model. Velocity distribution on the surface of the cube approximates that produced by a point source at the center.	86

4.33	Errors in amplitude and in phase of sound pressure at $(d/2, d/2, 0)$, using the BEM and the FMBEM in BF.	87
4.34	Errors in amplitude and in phase of sound pressure at $(d/2, d/2, 0)$, using the BEM and the FMBEM in NDF.	87
4.35	Errors in amplitude and in phase of sound pressure at $(d/2, d/2, 0)$, using the BEM and the FMBEM in Burton-Miller formulation.	88
4.36	The number of iteration of the BEM and the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM).	88
4.37	The computational times of the BEM and the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM).	89
5.1	(a) T_{m_l} : interaction cell set of cell m_l at level l , and (b) T'_l : common interaction cell set for pre-calculation of translation coefficients T_{LM} at level l (in 2-D). I_{m_l} and I'_l are the numbers of cells of T_{m_l} and T'_l , respectively.	94
5.2	Geometry of three cases of problems. All cases have uniform rigid surfaces. A point source is located at the center in cases 1 and 2.	95
5.3	Relationship between level l and the number of cells at level l , M_l	96
5.4	Computational time for the pre-process of the FMBEM with the optimum cell level number $L_{T_p \text{opt}}$	97
5.5	Computational time per iteration for the FMBEM with the optimum cell level number $L_{T_i \text{opt}}$	97
5.6	Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM for analyzing three cases of problems at 125 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	98
5.7	Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM for analyzing three cases of problems at 250 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	99
5.8	Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM for analyzing three cases of problems at 500 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	100

5.9	Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM for analyzing three cases of problems at 1000 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	101
5.10	Memory requirements for the FMBEM with the optimum cell level number L_{Mopt}	102
5.11	Details of memory requirements for the FMBEM for three cases of problems at 125 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	103
5.12	Details of memory requirements for the FMBEM for three cases of problems at 250 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	103
5.13	Details of memory requirements for the FMBEM for three cases of problems at 500 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	104
5.14	Details of memory requirements for the FMBEM for three cases of problems at 1000 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	104
5.15	Three arrangements of hierarchical cell structure used in three setting, Conv, M-size, and M-num: (a) conventional arrangement (for Conv), (b) arrangement minimizing the size of the root cell (for M-size), and (c) arrangement minimizing the number of cells M_l (for M-num). Description of point sources and the size of root cells and objects are for numerical study.	107
5.16	(a) An example of 1D-shaped object and hierarchical cell structure which minimizes the size of cells D_l , and (b) common interaction cell sets T'_l for pre-calculation of T_{LM} at levels (in 2-D).	108
5.17	(a) An example of 1D-shaped objects and hierarchical cell structure which minimizes the number of cells M_l , and (b) common interaction cell sets T'_l for pre-calculation of T_{LM} at levels (in 2-D).	109
5.18	Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 125 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	112

5.19	Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 250 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	113
5.20	Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 500 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	114
5.21	Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 1000 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	115
5.22	Computational time for pre-process of the FMBEM with the optimum cell level number $L_{T_p \text{opt}}$	116
5.23	Computational time per iteration for the FMBEM with the optimum cell level number $L_{T_i \text{opt}}$	116
5.24	Details of memory requirements for the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 125 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	117
5.25	Details of memory requirements for the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 250 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	117
5.26	Details of memory requirements for the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 500 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	118
5.27	Details of memory requirements for the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 1000 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L	118
5.28	Memory requirements for the FMBEM with the optimum cell level number $L_{M \text{opt}}$	119
5.29	Diagram of procedures (i) to (iv) to determine an appropriate position of hierarchical cell structure.	120
5.30	Geometry of a rigid staight barrier, a point source, a receiving area, and an infinite rigid ground: (a) site cross-section, and (b) site plan.	121
5.31	replacement of an infinite rigid ground and a barrier with a semi-infinite barrier.	122

5.32	Distribution of insertion loss in the receiving area at 500 Hz, using the FMBEM with conventional setting and with M-num setting, and using Macdonald approximation.	123
5.33	Distribution of insertion loss in the receiving area at 1000 Hz, using the FMBEM with M-num setting, and using Macdonald approximation.	124
5.34	Relation between computational time for the FMBEM and the average number M of nodes in a cell at the lowest level. N is degree of freedom (DOF). Gray areas roughly indicate the ranges of M for optimizing computational time (M_{Topt}).	128
5.35	Relation between memory requirements for the FMBEM and the average number M of nodes in a cell at the lowest level. N is degree of freedom (DOF). Gray areas roughly indicate the ranges of M for optimizing memory requirements (M_{Mopt}).	128
5.36	Diagram of steps 3 and 6 of the FMBEM for a plane-symmetric sound field.	131
5.37	Relationship among a cell m_l , m_{l+1} , a quadrature point $\hat{\mathbf{k}}_n^l$, those mirror images $\langle m_l \rangle$, $\langle m_{l+1} \rangle$ and $\langle \hat{\mathbf{k}}_n^l \rangle$ in a plane-symmetric sound field.	131
5.38	Geometry of an analysis model. A point source is located at the center of a cube. All boundaries are rigid.	135
5.39	Distribution of sound pressure level on the floor, obtained with conventional and symmetrical FMBEM, at $kd = 9.14$	136
5.40	Distribution of sound pressure level on the floor, obtained with conventional and symmetrical FMBEM, at $kd = 73.12$	136
5.41	Distribution of insertion loss in the receiving area at 500 Hz, using conventional and symmetrical FMBEM.	138
6.1	Geometry of an analysis model. A point source is located at the center of a cube.	148
6.2	(a) Distribution of sound pressure level on the floor at 1000 Hz, using the FMBEM with unpreconditioned BiCGStab, and (b) absolute SPL difference due to the difference of ε . DOF is 6144.	149
6.3	(a) Distribution of sound pressure level on the floor at 4000 Hz, using the FMBEM with unpreconditioned BiCGStab, and (b) absolute SPL difference due to the difference of ε . DOF is 98304.	149

6.4	Eigenfrequencies of a cube with 1 m width: (a) for inner Dirichlet problems, (b) for inner Neumann problems, (c) for normal modes of even numbers, and (d) for normal modes of odd numbers.	151
6.5	Difference between results with the mode summation and those with the FMBEM in BF and NDF using unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$. The receiver point is P1 (1.0, 1.0, 0).	153
6.6	Difference between results with the mode summation and those with the FMBEM in BF and NDF using unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$. The receiver point is P2 (0.5, 0.5, 1).	153
6.7	Difference between results with the mode summation and those with the FMBEM in BF and NDF using unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$. The receiver point is P3 (0.9, 0.8, 0.7).	154
6.8	The number of iteration for analyzing sound fields in a cube under three boundary conditions, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$	155
6.9	Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 500Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 1536.	156
6.10	Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 1000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 6144.	156
6.11	Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 2000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576.	157
6.12	Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 4000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 98304.	157
6.13	The effects of DOF and analysis frequencies on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned BiCGStab.	158

6.14	The effect of boundary conditions on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube at 2000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576.	160
6.15	The effect of diagonal preconditioning on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary, using the FMBEM in BF and NDF with BiCGStab.	161
6.16	The effect of diagonal preconditioning on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with boundary of random complex impedance at 2000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576.	161
6.17	The effect of \mathbf{r}_0^* on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 500Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 1536.	162
6.18	The effect of \mathbf{r}_0^* on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 1000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 6144.	162
6.19	The effect of \mathbf{r}_0^* on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 2000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576.	163
6.20	The effect of \mathbf{r}_0^* on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 4000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 98304.	163
6.21	The effect of \mathbf{x}_0 on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 2000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576. \mathbf{x}_{ap} is an iterative solution at 1999Hz.	164
6.22	Geometry of a hall, a point source S, and receiving points M1 and M2.	166
6.23	Analysis models for a hall: (a) actual walls and diffusers, (b) boundaries for analyses, and (c) an example of meshing with 24514 quadrilateral elements.	167
6.24	Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields in a hall at 63Hz, using the FMBEM in BF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 6110.	168
6.25	Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields in a hall at 125Hz, using the FMBEM in BF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24514.	168

6.26	The effect of diagonal preconditioning on the residual of iteration for analyzing sound fields in a hall with rigid boundary and actual boundary at 125Hz, using the FMBEM in BF with CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24514.	170
6.27	The effect of r_0^* on the residual of iteration for analyzing sound fields in a hall with rigid boundary and actual boundary at 125Hz, using the FMBEM in BF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24514.	171
6.28	The effect of x_0 on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 125Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24514. x_{ap} is an iterative solution at 124Hz.	172
6.29	Geometry of an analysis model. Velocity distribution on the surface of the cube approximates that produced by a point source at the center.	173
6.30	Errors for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$. The receiver point is P1 (0.5, 0.5, 1).	174
6.31	Errors for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$. The receiver point is P2 (0.5, 0.5, 1.5).	174
6.32	Errors for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$. The receiver point is P3 (0.5, 0.5, 10.5).	175
6.33	The number of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$	176
6.34	Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary at 500Hz, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 1536.	178

6.35	Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary at 1000Hz, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 6144.	178
6.36	Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary at 2000Hz, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576.	179
6.37	Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary at 4000Hz, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 98304.	179
6.38	The effect of diagonal preconditioning on the residual of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary at 2000Hz, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with BiCGStab. DOF is 24576.	180
6.39	The effect of \mathbf{r}_0^* on the residual of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary at 2000Hz, using the FMBEM in BF, NDF and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576.	181
6.40	The effect of \mathbf{x}_0 on the residual of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary at 2000Hz, using the FMBEM in Burton-Miller formulation with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576. \mathbf{x}_{ap} is an iterative solution at 1999Hz.	182
6.41	Geometry of a panel of sound diffusers and a point source.	183
6.42	Analysis models for a panel of sound diffusers: (a) boundaries for analyses, and (b) an example of meshing with 5672 quadrilateral elements.	183
6.43	Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields around diffusers at 125Hz, using the FMBEM in BF and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 5672.	185
6.44	Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields around diffusers at 250Hz, using the FMBEM in BF and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24616.	185

6.45	The effect of diagonal preconditioning on the residual of iteration for analyzing sound fields around diffusers at 125Hz, using the FMBEM in BF and Burton-Miller formulation with CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 5672.	186
6.46	The effect of diagonal preconditioning on the residual of iteration for analyzing sound fields around diffusers at 250Hz, using the FMBEM in BF and Burton-Miller formulation with CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24616.	186
6.47	The effect of diagonal preconditioning on the residual of iteration for analyzing sound fields around diffusers at 125Hz, using the FMBEM in NDF with CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 5672.	187
6.48	The effect of \mathbf{r}_0^* on the residual of iteration for analyzing sound fields around diffusers at 250Hz, using the FMBEM in BF and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24616.	188
6.49	The effect of \mathbf{x}_0 on the residual of iteration for analyzing sound fields around diffusers at 250Hz, using the FMBEM in BF and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24616. \mathbf{x}_{ap} is an iterative solution at 249Hz.	189
7.1	Annual change of performance of CPU in a desktop PC and computational time for the FEM, for the BEM and for the FMBEM, estimated on the basis of Moore's Law. k is the wave number, and L_r is a length of an analyzed object.	198
7.2	Annual change of memory in a desktop PC and memory requirements for the FEM, for the BEM and for the FMBEM, on the assumption that memory in a desktop PC is about 1 GB, and that the memory will double in 2 years. k is the wave number, and L_r is a length of an analyzed object.	199
C.1	Geometry of a hall and a point source S.	205
C.2	63Hz, actual, CGS (without preconditioning)	206
C.3	63Hz, actual, BiCGStab (without preconditioning)	206
C.4	63Hz, actual, BiCGStab2 (without preconditioning)	207
C.5	63Hz, actual, GPBiCG (without preconditioning)	207
C.6	63Hz, $a = 0$, CGS (without preconditioning)	208
C.7	63Hz, $a = 0$, BiCGStab (without preconditioning)	208

C.8	63Hz, $a = 0$, BiCGStab2 (without preconditioning)	209
C.9	63Hz, $a = 0$, GPBiCG (without preconditioning)	209
C.10	63Hz, $a = 1$, CGS (without preconditioning)	210
C.11	63Hz, $a = 1$, BiCGStab (without preconditioning)	210
C.12	63Hz, $a = 1$, BiCGStab2 (without preconditioning)	211
C.13	63Hz, $a = 1$, GPBiCG (without preconditioning)	211
C.14	125Hz, actual, CGS (without preconditioning)	212
C.15	125Hz, actual, CGS (diagonal preconditioning)	212
C.16	125Hz, actual, CGS (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)	213
C.17	125Hz, actual, CGS ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)	213
C.18	125Hz, actual, BiCGStab (without preconditioning)	214
C.19	125Hz, actual, BiCGStab (diagonal preconditioning)	214
C.20	125Hz, actual, BiCGStab (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)	215
C.21	125Hz, actual, BiCGStab ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)	215
C.22	125Hz, actual, BiCGStab2 (without preconditioning)	216
C.23	125Hz, actual, BiCGStab2 (diagonal preconditioning)	216
C.24	125Hz, actual, BiCGStab2 (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)	217
C.25	125Hz, actual, BiCGStab ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)	217
C.26	125Hz, actual, GPBiCG (without preconditioning)	218
C.27	125Hz, actual, GPBiCG (diagonal preconditioning)	218
C.28	125Hz, actual, GPBiCG (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)	219
C.29	125Hz, actual, GPBiCG ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)	219
C.30	125Hz, $a = 0$, CGS (without preconditioning)	220
C.31	125Hz, $a = 0$, CGS (diagonal preconditioning)	220
C.32	125Hz, $a = 0$, CGS (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)	221
C.33	125Hz, $a = 0$, CGS ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)	221
C.34	125Hz, $a = 0$, BiCGStab (without preconditioning)	222
C.35	125Hz, $a = 0$, BiCGStab (diagonal preconditioning)	222
C.36	125Hz, $a = 0$, BiCGStab (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)	223
C.37	125Hz, $a = 0$, BiCGStab ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)	223
C.38	125Hz, $a = 0$, BiCGStab2 (without preconditioning)	224
C.39	125Hz, $a = 0$, BiCGStab2 (diagonal preconditioning)	224
C.40	125Hz, $a = 0$, BiCGStab2 (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)	225
C.41	125Hz, $a = 0$, BiCGStab2 ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)	225
C.42	125Hz, $a = 0$, GPBiCG (without preconditioning)	226

C.43	125Hz, $a = 0$, GPBiCG (diagonal preconditioning)	226
C.44	125Hz, $a = 0$, GPBiCG (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)	227
C.45	125Hz, $a = 0$, GPBiCG ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)	227
C.46	125Hz, $a = 1$, CGS (without preconditioning)	228
C.47	125Hz, $a = 1$, BiCGStab (without preconditioning)	228
C.48	125Hz, $a = 1$, BiCGStab2 (without preconditioning)	229
C.49	125Hz, $a = 1$, GPBiCG (without preconditioning)	229
D.1	Geometry of a panel of sound diffusers and a point source.	231
D.2	125Hz, BF, CGS (without preconditioning)	232
D.3	125Hz, BF, CGS (diagonal preconditioning)	232
D.4	125Hz, BF, BiCGStab (without preconditioning)	232
D.5	125Hz, BF, BiCGStab (diagonal preconditioning)	232
D.6	125Hz, BF, BiCGStab2 (without preconditioning)	233
D.7	125Hz, BF, BiCGStab2 (diagonal preconditioning)	233
D.8	125Hz, BF, GPBiCG (without preconditioning)	233
D.9	125Hz, BF, GPBiCG (diagonal preconditioning)	233
D.10	125Hz, NDF, CGS (without preconditioning)	234
D.11	125Hz, NDF, CGS (diagonal preconditioning)	234
D.12	125Hz, NDF, BiCGStab (without preconditioning)	234
D.13	125Hz, NDF, BiCGStab (diagonal preconditioning)	234
D.14	125Hz, NDF, BiCGStab2 (without preconditioning)	235
D.15	125Hz, NDF, BiCGStab2 (diagonal preconditioning)	235
D.16	125Hz, NDF, GPBiCG (without preconditioning)	235
D.17	125Hz, NDF, GPBiCG (diagonal preconditioning)	235
D.18	125Hz, Burton-Miller formulation (BM), CGS (without preconditioning)	236
D.19	125Hz, Burton-Miller formulation (BM), CGS (diagonal preconditioning)	236
D.20	125Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab (without preconditioning)	236
D.21	125Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab (diagonal preconditioning)	236
D.22	125Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab2 (without preconditioning)	237
D.23	125Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab2 (diagonal preconditioning)	237
D.24	125Hz, Burton-Miller formulation (BM), GPBiCG (without preconditioning)	237
D.25	125Hz, Burton-Miller formulation (BM), GPBiCG (diagonal preconditioning)	237
D.26	250Hz, BF, CGS (without preconditioning)	238

D.27 250Hz, BF, CGS (diagonal preconditioning)	238
D.28 250Hz, BF, CGS (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)	238
D.29 250Hz, BF, CGS ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)	238
D.30 250Hz, BF, BiCGStab (without preconditioning)	239
D.31 250Hz, BF, BiCGStab (diagonal preconditioning)	239
D.32 250Hz, BF, BiCGStab (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)	239
D.33 250Hz, BF, BiCGStab ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)	239
D.34 250Hz, BF, BiCGStab2 (without preconditioning)	240
D.35 250Hz, BF, BiCGStab2 (diagonal preconditioning)	240
D.36 250Hz, BF, BiCGStab2 (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)	240
D.37 250Hz, BF, BiCGStab2 ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)	240
D.38 250Hz, BF, GPBiCG (without preconditioning)	241
D.39 250Hz, BF, GPBiCG (diagonal preconditioning)	241
D.40 250Hz, BF, GPBiCG (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)	241
D.41 250Hz, BF, GPBiCG ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)	241
D.42 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), CGS (without preconditioning) . .	242
D.43 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), CGS (diagonal preconditioning) . .	242
D.44 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), CGS (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)	242
D.45 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), CGS ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)	242
D.46 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab2 (without preconditioning)	243
D.47 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab2 (diagonal preconditioning)	243
D.48 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab2 (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)	243
D.49 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab2 ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)	243
D.50 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), GPBiCG (without preconditioning)	244
D.51 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), GPBiCG (diagonal preconditioning)	244
D.52 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), GPBiCG (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)	244
D.53 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), GPBiCG ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)	244

表目次

1.1	Comparison of the computational complexities and memory requirements for the FEM and for the BEM. k is the wave number, and L_r is a length of an analyzed object.	2
3.1	Degree of freedom (DOF) N , the width of boundary elements and the analysis frequency for the acoustic tube analysis.	44
4.1	Differences between results with the FMBEM and those with the BEM with the same iterative solver, averaged over all nodes on the floor. ε_m is defined as Eq. (4.15). N is degree of freedom (DOF), and L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	82
5.1	Computational efficiency for analyzing sound fields with a rigid barrier and a point source on an infinite rigid ground, using the FMBEM with conventional setting and with M-num setting.	121
5.2	Differences between results using the FMBEM with conventional setting and with M-num setting, averaged over all points on the receiving area. ε_{ad} is defined as Eq. (5.20).	122
5.3	Computational efficiency for analyzing sound fields in a rigid cube d m wide, with a point source at the center, using conventional and symmetrical FMBEM. N is degree of freedom (DOF), and L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	135
5.4	Differences between results with conventional and symmetrical FMBEM, averaged over all nodes on boundaries of the cube. ε_{sym} is defined as Eq. (5.45). N is degree of freedom (DOF), and L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	137

5.5	Computational efficiency for analyzing sound fields with a rigid barrier and a point source on an rigid ground, using conventional and symmetrical FMBEM. N is degree of freedom (DOF), and L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	137
5.6	Differences between results with conventional and symmetrical FMBEM, averaged over all points on the receiving area. ε_{sym} is defined as Eq. (5.45). N is degree of freedom (DOF), and L is the lowest level number of hierarchical cell structure.	138
6.1	Conditions for analyses of sound fields in a cube. N is degree of freedom, L is the lowest level number of hierarchical cell structure, and M is the average number of nodes in a cell at the lowest level.	148
6.2	Effect of ε on differences from results of the FMBEM with $\varepsilon = 10^{-12}$. Unpreconditioned BiCGStab is used for the FMBEM in BF. N is degree of freedom, and ε_{em} is defined as Eq.(6.24).	150
6.3	Differences between results using the mode summation and those using the FMBEM with unpreconditioned iterative solvers. ε_{ite} is defined as Eq.(6.25).	152
6.4	Conditions for analyses of sound fields in a hall. N is degree of freedom, L is the lowest level number of hierarchical cell structure, and M is the average number of nodes in a cell at the lowest level.	166
6.5	Differences between theoretical results and those using the FMBEM with unpreconditioned iterative solvers. N is degree of freedom, and ε_{ite} is defined as Eq.(6.25).	176
6.6	Conditions for analyses of sound fields around diffusers. N is degree of freedom, L is the lowest level number of hierarchical cell structure, and M is the average number of nodes in a cell at the lowest level.	184
7.1	Comparison of the computational complexities for the FEM, for the BEM, and for the FMBEM. k is the wave number, and L_r is a length of an analyzed object.	197
7.2	Comparison of the memory requirements for the FEM, for the BEM, and for the FMBEM. k is the wave number, and L_r is a length of an analyzed object.	197

第 1 章

序

1.1 研究の背景

今日，騒音防止計画，室内音響計画といった音環境計画において，その物理的基礎となる音場の予測は重要な役割を担っている．例えば，航空機・道路・鉄道騒音，工場騒音といった各種騒音の防止計画においては，騒音源対策（騒音源の抽出・定量），伝搬系の対策（伝搬経路の判定，建築・室・部材等の配置計画，遮音・吸音計画），受信系の対策（受信点での評価）といった各段階で必要であり，また学校教室，体育館，劇場，コンサートホール，多目的ホールといった室内の音響計画においては，室形状の検討，各部材の特性・形状・配置計画等に大いに有用である．一方，電気音響による制御理論との結び付きにより，音場予測は望まれる音環境を実現するための積極的な制御手法としても活用されている．

音場予測手法は実験的手法と数値解析手法とに大別されるが，数値解析手法のメリットとしては，1) 大掛かりな実験設備が不要，2) 任意形状，任意条件が扱える，3) 設計変更への対応が容易，といったことが挙げられる．設計及び研究上の簡便さからも汎用的な数値解析手法の開発が望まれている．

数値解析手法は幾何音響的手法と波動音響的手法に大別される．幾何音響的手法は虚像法，音線法に代表される．これは音の波動性を考慮しないため厳密性に欠ける反面，多くの計算機能力を必要とせず，現在でも大規模な空間を扱う際の現実的な手法として用いられている．一方，波動音響的手法は有限差分法（finite difference method: FDM），有限要素法（finite element method: FEM），境界要素法（boundary element method: BEM）に代表される．いずれも基本的に微分方程式あるいはそれと等価な積分方程式の近似解法であり，理論的に音の波動性を考慮したものであるため，空間領域，周波数領域共に高精度な予測が可能である．近年の計算機能力の向上に伴い，今日では室内音場解析 [1, 2, 3, 4]，

Table 1.1: Comparison of the computational complexities and memory requirements for the FEM and for the BEM. k is the wave number, and L_r is a length of an analyzed object.

Method	Degree of freedom	Complexity	Memory
FEM	$N_f \propto (kL_r)^3$	$O(N_f^2) \sim O((kL_r)^6)$	$O(N_f) \sim O((kL_r)^3)$
	(iterative)	$O(N_f) \sim O((kL_r)^3)$	
BEM	$N_b \propto (kL_r)^2$	$O(N_b^3) \sim O((kL_r)^6)$	$O(N_b^2) \sim O((kL_r)^4)$
	(iterative)	$O(N_b^2) \sim O((kL_r)^4)$	

騒音伝搬解析 [5, 6, 7], 振動場との連成まで考慮した建築部材による散乱・反射音場の解析 [8, 9, 10], アクティブ音場制御への適用 [11, 12, 13] 等, 様々な形で波動音響的手法の応用が試みられている. その反面, 実空間への幅広い適用という点では未だ問題を抱えている.

波動音響的手法の最大の問題点は, 大規模問題において計算量・必要記憶容量が必然的に膨大となることであり, 計算機能力の制約から, 周波数領域, 空間領域共に解析範囲を限定されるか, あるいは2次元解析に止まらざるを得ないのが現状である. 将来, 波動音響的手法による広範な音響設計支援を実現するためには, 空間領域及び周波数領域の両者において汎用性の高い波動音響シミュレーション手法の開発が必須であると言える.

近年, コンピューターの進歩に伴い, 音響分野においても波動音響的手法による大規模解析に向けた試行的研究が行われつつある. 坂本ら [3] は FDM を用いて $6,000\text{m}^3$ 規模の小ホールについて時間応答解析によりインパルス応答 (1kHz 程度まで) を算出している. また, 大鶴ら [14] は FEM で得られる連立方程式に反復解法を適用し, $11,500\text{m}^3$ 規模の中規模ホールについて周波数応答解析により 500Hz 程度まで解析している. 同様に, BEM に関しても大規模化を視野に入れた手法の開発が望まれる.

BEM は境界のみを離散化すればよいから, 空間を離散化する FDM, FEM と比べて節点数が大幅に少ないことから, より効率的な手法であると考えられる向きがあるが, 必ずしもそうとはいえない. 3次元問題における FEM と BEM の計算量及び必要記憶容量を解析波数 k と解析対象の代表長さ L_r との関係で概算すると Table 1.1 のようになる. BEM では FEM に比べ明らかに問題の自由度 N が小さくなるが, FEM が帯行列からなる連立方程式を解くのに対し, BEM では密行列からなる連立方程式を解く必要があり, 両手法の優位性は一概には言えないことがわかる. 計算量については, 直接解法の場合両手法で同程度のオーダーとなること, より効率的な反復解法の場合, FEM の方が低オーダーとなっている. 必要記憶容量についても FEM の方が低オーダーとなっている.

連立方程式を反復解法で解く場合, 最も比重の大きい演算は行列ベクトル積の計算とな

る．特に BEM のような密行列の連立方程式を解く場合， $O(N_b^2)$ の計算量になる．一方，必要記憶容量についても行列保持についてのものが大半となり，密行列の場合 $O(N_b^2)$ となる．従って，行列ベクトル積の演算部を改善しない限り BEM で大規模問題を扱う際の計算効率の向上は図れない．

ところで，1983 年に Rokhlin によって大自由度のポテンシャル問題のための高速多重極アルゴリズム (fast multipole algorithm: FMA) が提案されている [15]．(FMA は fast multipole method: FMM と呼ばれるが，本論文では一貫して FMA と呼ぶものとする．) これは Greengard ら [16] によって N 体問題に応用され，同分野の高速解法として発展してきたが [17, 18, 19]，近年天体物理学 [20, 21]，分子動力学 [22]，流体力学 [23] 等の分野においても大規模問題解析への活用が進められている．FMA はポテンシャルの多重極化及びグループ化に基づいて計算効率を高める手法であり，その拡張として段階的な多重極化に基づく手法 (multilevel FMA: MLFMA) も考案されている [24, 25]．

FMA の基本的概念は，場をポテンシャルの重ね合わせとして構成する場合に，遠方からの寄与については個別に算定せず，多重極展開としてまとめて評価するというものである．BEM は場をポテンシャルの重ね合わせで表現する解法であるため，多重極展開による表現が可能である．また，反復解法を用いる際の行列ベクトル積の演算は，離散化により近似されたポテンシャルの和をとることと同じあり，前述の N 体問題や粒子シミュレーションの場合と同様の扱いとなることから，FMA による計算が可能であるといえる．BEM への FMA の導入により，反復解法を用いる際の行列ベクトル積の演算オーダー低下が望めるのみならず，行列保持の必要がないため必要記憶容量の大幅な節約が期待できる．その一方，多重極展開の数値的取り扱いや，ソース点，観測点のグループ化の方法，さらに反復解法に付随する収束の問題など，従来の BEM と比較して検討すべき項目が多く，適切な設定なしでは得られた結果の計算精度の信頼性が得られないばかりか，計算効率の向上も十分なものとできない可能性がある．

1.2 既往関連研究

ここでは FMA に関する既往研究及びその様々な分野における応用研究について概観した上で，FMA の BEM への適用研究及び音響分野における関連研究について整理する．

FMA は，Rokhlin により Laplace 方程式のための高速解法として提案された [15]．これは Greengard *et al.* によりクーロン力や重力の影響を扱う N 体問題に応用されたが [19]，そこでは粒子をグループ化するための空間領域の階層分割手法が示され (本論文ではこれを階層セル構造と呼ぶこととする)，これにより FMA の多段階化をシステムティックかつ効率的に行うことを可能とした．その後，前述のとおり主として天体物理学 [20, 21]，分子動力学 [22]，流体力学 [23] 等の分野において粒子シミュレーションの解析への活用

が進められた．一方で以下に示すように，各種の支配方程式に基づく境界積分方程式の高速解法としての応用が数多く行われ，現在では大規模解析のための解法として広く認知されつつある．

FMA の境界積分方程式への適用に関する研究を概観すると，Laplace 方程式に基づくものに関しては速水ら [26]，西村ら [27, 28, 29]，Buchau *et al.* [30, 31]，Maxwell 方程式に関しては Dembart *et al.* [32]，静弾性問題に関しては速水ら [33, 34, 35, 36]，福井ら [37]，Fu *et al.* [38]，吉田ら [39, 29]，Stokes 流に関しては高橋ら [40]，動弾性問題に関しては吉田ら [41] などが挙げられる．Helmholtz 方程式に関しても，前述の Rokhlin *et al.* [42, 43, 44] をはじめ，福井ら [45, 46]，Chew *et al.* [47]，Gyure *et al.* [48]，Epton *et al.* [49] の研究があり，有効性が示されている．

定常音場の支配方程式である Helmholtz 方程式に関して詳述すると，まず Rokhlin *et al.* により 2 次元 [42] 及び 3 次元 [43, 44] の FMA に関する定式化が行われ，散乱問題，特に電磁場におけるそれへの直接的な適用が進められた [50, 25, 47]．Rokhlin [42]，Engheta *et al.* [50] は 2 次元電磁場の散乱問題へ FMA を適用し， N を節点数として計算量が $O(N^{\frac{4}{3}})$ になることを示している．また，Rokhlin *et al.* [44, 43] は 3 次元 Helmholtz 方程式において 1 段階の FMA を適用し，計算量が $O(N^{\frac{3}{2}})$ になることを示している．一方 FMA の多段階化による効率化に関する研究については，2 段階，3 段階の FMA の適用といった段階的な効率化を経て，多段階 FMA(MLFMA) による更なる効率化へと発展した [49, 25, 47, 48]．これにより，計算量が $O(N \log N)$ [25]， $O(N)$ [47]， $O(N \log^2 N)$ [48] にまで，必要記憶容量が $O(N \log N)$ [25, 48] にまで低減されることが報告されている．

音響分野における BEM への適用に関しては，2 次元 Helmholtz 方程式への適用手法が報告されているものの [46, 51]，3 次元においては，2 次元の場合と同様の多重極展開係数の取り扱いが極めて複雑かつ非効率なものとなるため，手法の直接的な拡張は困難であった．この問題に対して，Rokhlin は係数の変換行列の対角化形式を提案しており [44]，これを用いることで 3 次元 BEM への拡張が簡便となることを示している．近年奥村らは，3 次元 Helmholtz 方程式の BEM に対して FMA を 1 段階 [52] および 2 段階 [53] で適用し，その計算量及び必要記憶容量がそれぞれ $O(N_b^{\frac{3}{2}})$ 及び $O(N_b^{\frac{4}{3}})$ となることを報告した．しかしながら，BEM において多重極化のための境界要素のグループ化の方法が明示されておらず，また 1 段階，2 段階の FMA に限定された検討となっている．また，計算効率に関しては一般に境界要素節点（あるいは粒子）の空間分布により影響を受けることが知られているが [54]，これが考慮されていないため計算効率の概算が一般性に欠ける側面がある．

1.3 研究の目的

以上のような背景から、音場解析における高速多重極アルゴリズムを導入した BEM の開発は、大規模波動音場解析、ひいては各種の音響設計を行う上で大いに有用と考えられるが、既往研究において有用な知見が多く得られているにもかかわらず、特に手法の汎用性という点から未だ研究段階にあるといえる。このような状況を踏まえ、本研究では目的を以下のように設定する。

- 境界要素法による 3 次元での大規模音場予測を目指し、計算効率の大幅な低減のための高速多重極アルゴリズムを多段階に適用した境界要素法、即ち高速多重極境界要素法 (fast multipole boundary element method: FMBEM) を構築すること。
- 数値解析や理論的考察による検討を通して手法の汎用性及び音響問題における適用性向上のための様々な知見を取得すること。

なお、本論文における「大規模音場」とは、解析対象の空間的規模が大きいだけでなく、解析領域（境界）の離散化のための要素サイズをおよそ決定する解析周波数が高いことを指す。従って、大規模空間の解析であっても解析周波数が著しく低いもの、逆に高周波数域での解析であっても空間的に著しく小規模となるものは、大規模音場解析と呼ばない。規模の大小を論じる量としては、同一の解析手法を前提とした場合、解析問題の自由度を用いることができる。一方、異なる解析手法間での「規模」の大小を論じる上では、自由度同士の比較には意味がないことから、解析音場固有の「規模」を表す量が必要となる。このような量としては、Table 1.1 で使用したように、解析対象の代表長さに解析波数を乗じたものが考えられる。

1.4 論文の構成

本論文の構成を Fig.1.1, 1.2 に示す。

第 1 章では、研究の背景及び既往関連研究の概観を行った上で、本研究の目的について述べる。また、本論文の構成について示す。

第 2 章では、本研究の基礎となる 3 次元音場のための FMBEM の解析アルゴリズムを具体的に構築する。はじめに音場の基礎方程式について述べ、BEM による音場の定式化を行う。次に多重極展開の基礎理論について概説した後、BEM に高速多重極アルゴリズムを多段階に適用するための階層セル構造について述べ、これに基づく要素間の影響評価構造について述べる。これらを踏まえ、BEM の各影響関数を FMBEM により再定式化し、FMBEM の具体的な数値計算アルゴリズムを提示する。定式化は基本型 (basic form:

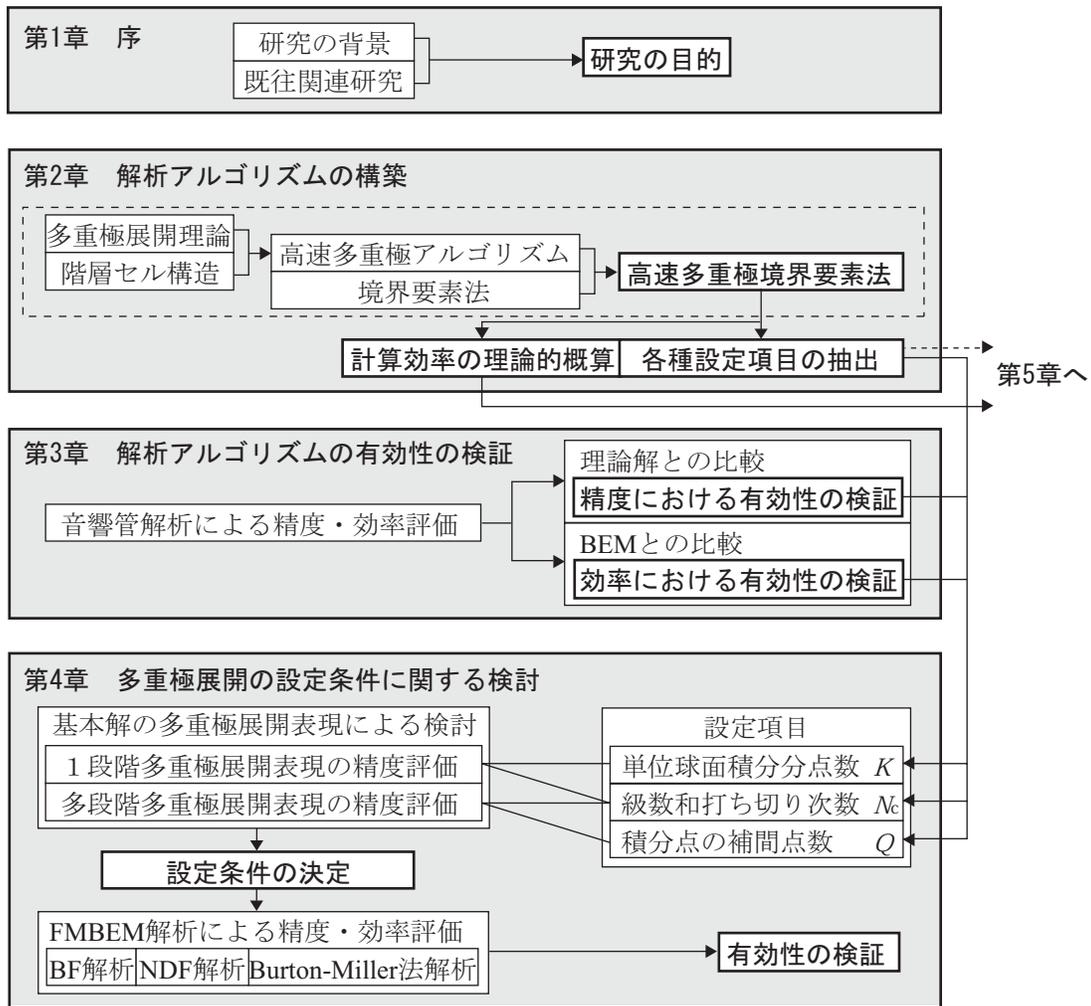


Fig. 1.1: Flow chart of this thesis (1).

BF) の他，薄板解析に有用である法線方向微分型 (normal derivative form: NDF)，外部問題の解の一意性を保証する Burton and Miller による方法のそれぞれについて行う。また，実際に数値解析を行う上での各種の設定項目について述べる。最後に，FMBEM の効果を見積もるため，問題の自由度のオーダーで評価した計算効率の理論的概算を行う。

第 3 章では，前章で構築した解析アルゴリズムをコンピューターに実装し，理論解と比較可能な音響管解析に適用することで，アルゴリズムの有効性を計算精度及び計算効率の両観点から検証する。

第 4 章では，任意問題に FMBEM を適用するにあたって必須となる，多重極展開における数値計算上の近似的取り扱いのための各種計算パラメータについて，精度及び効率の両観点からの検討により具体的な設定条件を提案する。本パラメータの適切な設定なしには FMBEM の精度は保証されない。まず，本手法の基礎となる 3 次元音場基本解の多重極展開について，厳密解との比較による精度の検討を通して，解析周波数及び本手法で想

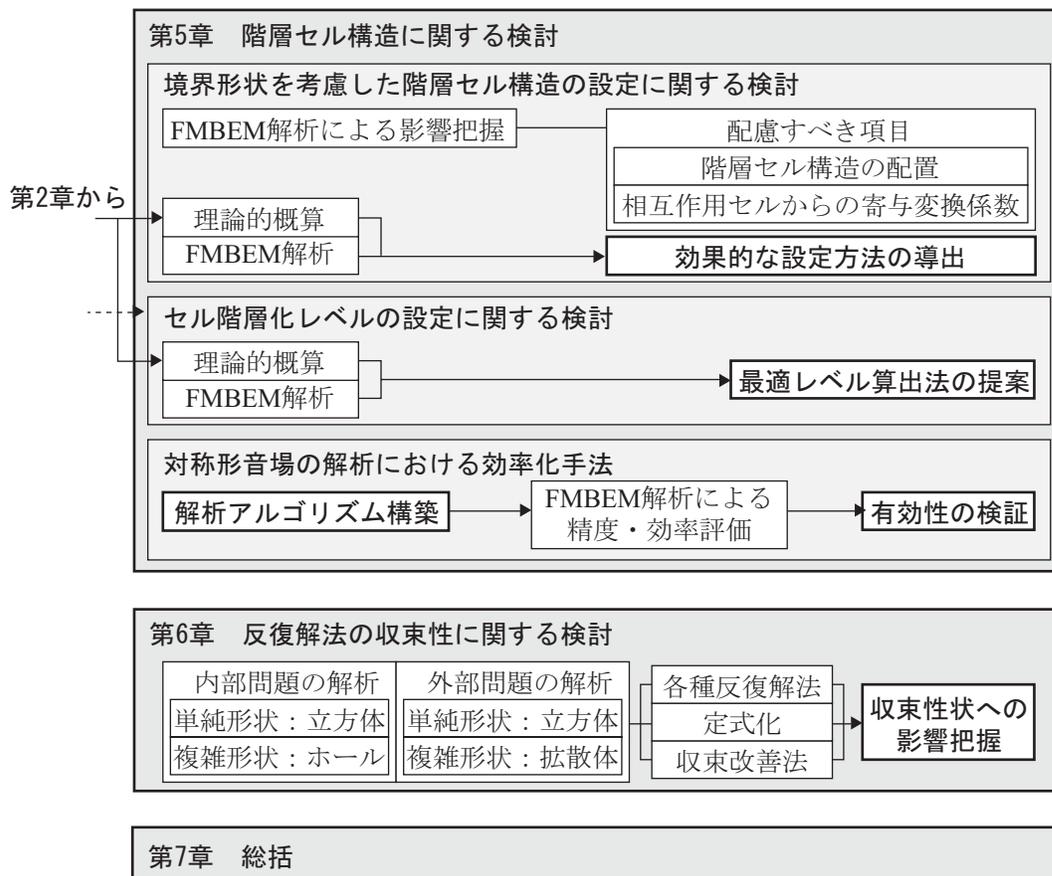


Fig. 1.2: Flow chart of this thesis (2).

定され得る多重極展開点の位置関係によらず高精度となる各種設定条件を具体的に決定する．多重極展開は1段階の場合と多段階の場合を設定し，関連する計算パラメータについて検討を行う．これを踏まえ，FMBEMを適用した数値解析を行い，計算効率の観点から設定条件の妥当性を検証する．検証はBFの他，NDF，Burton-Miller法についても行う．

第5章では，FMBEMの持つ性能を最大限引き出す上で重要となる階層セル構造の適切な設定に関して検討する．FMBEMはBEMと異なり，節点数のみならず多重極展開並びに階層セル構造の設定により計算効率に変化する手法である．階層セル構造に関しては，解析対象との位置関係やセルの階層化レベルに関して，解析対象の形状との関係で検討を行い，効率的な設定法を確立する必要がある．本章では，はじめに境界形状を考慮した階層セル構造の効果的な配置，及びそれに関連する設定に関して検討する．解析対象の境界形状がFMBEMの計算効率に及ぼす影響を数値解析により調べた後，FMBEMの計算効率が大幅に低下する可能性のある1次元的な境界形状の問題に関して，理論的概算及び数値解析によるケーススタディを通して，境界形状に依存せずに効率化するための階層セル構造の設定方法について検討する．次に，FMBEMの計算効率を最適化するセル階層化レ

ベルの設定法について，理論的考察及び数値解析を通して検討し，設定方法を具体的に提案する．最後に，階層セル構造の応用的な利用法として，対称形となる音場の解析における効率化手法を提案する．アルゴリズムの構築を行った後，計算精度，計算効率の観点から数値解析による手法の妥当性の検証を行う．

第 6 章では，FMBEM で前提となる反復解法の収束性に関する検討を行う．反復解法の収束は FMBEM の全計算時間に直接的に影響するため，実用的な観点からこれをある程度予測できることが望ましい．しかしながら，一般に BEM で得られるような非エルミート行列に対しては，反復解法の収束性は与えられた問題の性質に大きく依存すると言われている．ここでは反復解法の収束性に関して，FMBEM による音響問題の解析に限定した上で，反復解法の種類，定式化，解析対象の形状及び境界条件，問題の自由度の影響について検討し，具体的な知見を得る．また，反復解法の収束改善のための様々な方法についてその効果を検討する．最終的に，個々の音響問題の解析に適した反復解法の選定と，収束改善のための適切な設定を行うための知見を得ることを目的とする．

第 7 章は総括であり，本論文の成果と共に今後の展望及び課題について述べる．

1.5 使用計算機・プログラミング・反復解法について

計算機については以下のものを使用している．いずれも使用プロセッサは 1 つとし，逐次処理のみを扱っている．

- Dell Precision Workstation 610
CPU: 550 MHz Pentium III Xeon 512 K Dual
16.8 FLOPS / processor (SPECfp95)
RAM: 2 GB
(第 3 章，第 4 章)
- 超並列型スーパーコンピュータ HITACHI SR8000/MPP
144 nodes, 1152 processors
14.4 GFLOPS / node, 1.8 GFLOPS / processor (theoretical)
RAM / node : 16 GB
(第 5 章，第 6 章)

プログラムは以下のプログラミング言語で書かれている．

- C 言語
(第 3 章，第 4 章)
- Fortran 90
(第 5 章，第 6 章)

反復解法の各種設定については、特に断らない場合はよく用いられる初期設定として音圧ベクトルの初期近似解を零ベクトル、初期シャドウ残差を初期残差と等しく与えている。また、収束判定基準として

$$\|\mathbf{r}_i\| \leq \varepsilon \cdot \|\mathbf{b}\| \quad (1.1)$$

を用い、その収束判定値として $\varepsilon = 10^{-3}$ を用いている。但し、 \mathbf{r}_i は反復 i 回目の残差ベクトル、 \mathbf{b} は BEM, FMBEM から最終的に得られる連立方程式の右辺ベクトルである。ここでのノルム $\|\cdot\|$ には 2 ノルム (Euclid ノルム) を採用している。詳しくは第 6 章を参照のこと。

第 2 章

解析アルゴリズムの構築

2.1 はじめに

本章では、本研究の基礎となる 3 次元音場のための高速多重極境界要素法 (FMBEM) の解析アルゴリズムを具体的に構築する。はじめに音場の基礎方程式について述べ、境界要素法 (BEM) による音場の定式化を行う。次に多重極展開の基礎理論について概説した後、BEM に高速多重極アルゴリズムを多段階に適用するための階層セル構造について述べ、これに基づく要素間の影響評価構造について述べる。これらを踏まえ、BEM の各影響関数を FMBEM により再定式化し、FMBEM の具体的な数値計算アルゴリズムを提示する。最後に、FMBEM の効果を見積もるため、問題の自由度のオーダーで評価した計算効率の理論的概算を行う。

なお、本論文では一貫して時間因子として $\exp(-j\omega t)$ を用いている。

2.2 音場の基礎方程式

空気が均質かつ粘性がないものと仮定した場合、空気中を伝搬する音波に関する波動方程式が以下のように成り立つ。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Psi \quad (2.1)$$

但し、 Ψ : 速度ポテンシャル、 c : 空気中の音速。

音圧 P 及び粒子速度ベクトル \mathbf{V} は速度ポテンシャルにより以下のように表される。

$$P = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{V} = -\nabla \Psi \quad (2.3)$$

但し, ρ : 空気密度 .

波動方程式の線形性より, P 及び \mathbf{V} は共に Eq.(2.1) を満たす .

ここで時間因子を $\exp(-j\omega t)$ とした調和振動を仮定すると, $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-j\omega t)$ とおいて, 次の Helmholtz 方程式が得られる .

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (2.4)$$

但し, $k = \omega/c = 2\pi f/c = 2\pi/\lambda$: 波数, ω : 角周波数, f : 周波数, λ : 波長 .

同様に $P(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r})e^{-j\omega t}$, $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r})e^{-j\omega t}$ とおくと, p , \mathbf{v} は共に Eq.(2.4) を満たし, Eqs.(2.2, 2.3) から以下の式が得られる .

$$p = -j\omega\rho\psi \quad (2.5)$$

$$\mathbf{v} = -\nabla\psi \quad (2.6)$$

Eqs.(2.5, 2.6) から, p と \mathbf{v} の関係は次式で表される .

$$\nabla p = j\omega\rho\mathbf{v} \quad (2.7)$$

無限空間中の点 \mathbf{r}_q に置かれた強さ -1 の点音源が点 \mathbf{r}_p に生ずるポテンシャルを基本解と呼び, 次式の解である .

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = -\delta(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q) \quad (2.8)$$

3次元音場における基本解は次式で表される .

$$G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) = \frac{\exp(jkr_{pq})}{4\pi r_{pq}} \quad (2.9)$$

2.3 境界要素法による音場の定式化

2.3.1 音場の境界条件

解析対象とする3次元音場を Fig.2.1 に模式的に示す . 境界全面 Γ は滑らかであり, 剛壁境界 Γ_0 , 振動境界 Γ_1 , 吸音境界 Γ_2 の3種類からなるものとする . 吸音境界では局所作用を仮定する . Eq.(2.7) より, 各種境界では次の境界条件式が成り立つものとする .

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial n_q} = \begin{cases} 0 & q \in \Gamma_0 \\ j\omega\rho v(\mathbf{r}_q) & q \in \Gamma_1 \\ -jkp(\mathbf{r}_q)/z(\mathbf{r}_q) & q \in \Gamma_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

但し, $\partial/\partial n_q$: 点 q における境界面の内向き法線方向微分, v : 法線方向振動速度 (内向きを正), z : 比音響インピーダンス .

上式において, 剛壁境界及び振動境界は音圧傾度 (粒子速度) を規定することに相当する第2種境界条件 (Neumann 問題), 吸音境界は音圧と音圧傾度 (粒子速度) の線形和を規定することに相当する第3種境界条件 (Robin 問題) である .

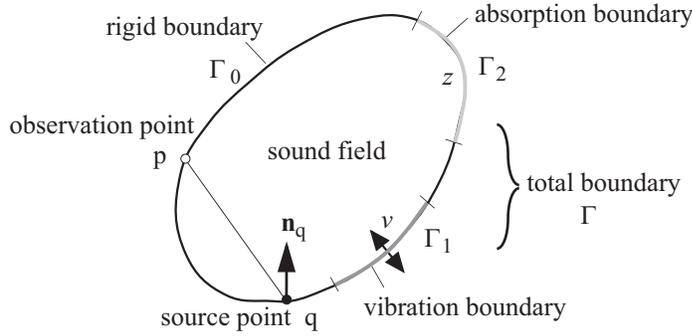


Fig. 2.1: Illustration of a sound field with three kinds of boundary.

2.3.2 Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式の導出

ベクトル場 \mathbf{u} における境界 Γ で囲まれた領域 Ω に関して、次式のような Gauss の発散定理が得られる。

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} dV \quad (2.11)$$

但し、 \mathbf{n} : 境界面の単位法線ベクトル。

ここでスカラー関数 f, g を用いて $\mathbf{u} = -f\nabla g$ とおき、以下の関係式

$$\nabla \cdot (f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g \quad (2.12)$$

を用いると次の2式のような Green の定理が得られる。

$$-\int_{\Omega} (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \int_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial n} dS \quad (2.13)$$

$$\int_{\Omega} (g\nabla^2 f - f\nabla^2 g) dV = \int_{\Gamma} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS \quad (2.14)$$

Eq.(2.14) は、Eq.(2.13) とその f と g を取り替えた式との差をとることにより得られる。

一方、Helmholtz 方程式 Eq.(2.4) を満たす音場領域 Ω において、任意の関数 w について以下の式が成り立つ。

$$\int_{\Omega} w (\nabla^2 \psi + k^2 \psi) dV = 0 \quad (2.15)$$

ここで Eq.(2.14) において $f = \psi, g = w$ とし、Eq.(2.15) を代入することで次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left(\psi \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS &= \int_{\Omega} w (\nabla^2 \psi + k^2 \psi) dV - \int_{\Omega} \psi (\nabla^2 w + k^2 w) dV \\ &= - \int_{\Omega} \psi (\nabla^2 w + k^2 w) dV \end{aligned} \quad (2.16)$$

さらに, $w = G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)$ とし, Eq.(2.8) を代入することで最終的に次式のような Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式が得られる.

$$C(\mathbf{r}_p)\psi(\mathbf{r}_p) = \int_{\Gamma} \left(\psi(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n} - \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_q)}{\partial n} G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) \right) dS \quad (2.17)$$

但し, $C(\mathbf{r}_p)$: 点 p が領域 Ω を見込む立体角の 4π に対する割合.

領域内の点 s にソース点がある場合, 上式は以下ようになる.

$$C(\mathbf{r}_p)\psi(\mathbf{r}_p) = \psi_D(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_s) + \int_{\Gamma} \left(\psi(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n} - \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_q)}{\partial n} G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) \right) dS \quad (2.18)$$

但し, ψ_D : ソース点からの寄与.

境界 Γ の外部の無限領域を音場領域 Ω とする場合, 上式右辺において無限遠方の閉境界上での積分項が現れるが, 以下に示す Sommerfeld の放射条件を仮定することでこの項は 0 となり, 積分における境界を Γ のみとすることができる.

$$\lim_{r_q \rightarrow \infty} r_q \left(\frac{\partial \psi}{\partial r_q} - jk\psi \right) = 0 \quad (2.19)$$

但し, $r_q = |\mathbf{r}_q|$.

2.3.3 Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式に基づくマトリクス方程式の導出

解析対象とする 3 次元音場 Fig.2.1 が 3 次元 Helmholtz 方程式を満たす場合, 音圧に関する Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式が境界上の点 p について以下のように成り立つ [55].

$$\frac{1}{2}p(\mathbf{r}_p) = p_D(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_s) + \int_{\Gamma} \left(p(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_q} - \frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial n_q} G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) \right) dS \quad (2.20)$$

但し, p_D : 音源からの寄与.

ここで 3 次元音場基本解は Eq.(2.9) で表され, その法線方向微分は以下の式で表される.

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_q} = \frac{(-1 + jkr_{pq})\exp(jkr_{pq})}{4\pi r_{pq}^2} \cos(\mathbf{n}_q, \mathbf{r}_{pq}) \quad (2.21)$$

また, p_D が点音源の場合, 次式で表される.

$$p_D(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_s) = -j\omega\rho QG(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_s) \quad (2.22)$$

但し, Q : 点音源の体積速度.

Eq.(2.20) を数値的に解くために, 境界を有限個の境界要素に離散化する. 境界要素内には, 境界の形状を記述するためのメッシュポイントと要素内での関数値を記述するため

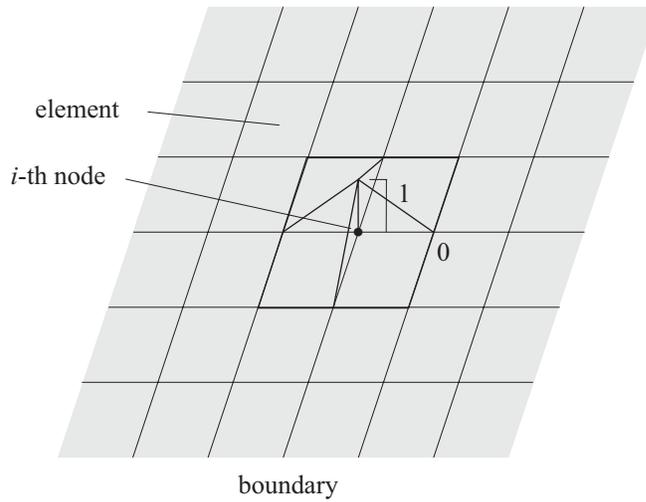


Fig. 2.2: Illustration of an interpolation function.

の節点を設定する．各節点には対応する内挿関数 N を設ける．内挿関数は節点の関数値（既知）により要素内の任意の点における関数値を近似するために用いられる．対応する節点においては値 1 をとり，その他の節点においては値 0 をとる性質を持つ．Fig.2.2 は 4 角形 1 次要素の場合の内挿関数を模式的に示したものである．要素内の任意の点における関数値 u は，節点の関数値 u_j と内挿関数 N_j の線形結合により以下のように近似される．

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{r})u_j \quad (2.23)$$

但し， n ：要素内の総節点数．

Eq.(2.20) に Eq.(2.10) を代入して離散化すると，最終的に以下のマトリクス方程式が得られる．

$$(\mathbf{E} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{p} = j\omega\rho(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + Q\mathbf{d}) \quad (2.24)$$

但し， \mathbf{p} ：音圧ベクトル（未知量）， \mathbf{v} ：振動速度ベクトル（既知量）， \mathbf{d} ：直接音ベクトル（既知量）．

各行列の成分（以下，影響関数と呼ぶ）及び直接音ベクトルの成分は次式により表される．

$$E_{ij} = -\frac{1}{2}\delta_{ij} \quad (2.25)$$

$$A_{ij} = A(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \int_{\Gamma_1} N_j(\mathbf{r}_q)G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_q)dS_q \quad (2.26)$$

$$B_{ij} = B(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \int_{\Gamma} N_j(\mathbf{r}_q)\frac{\partial G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_q)}{\partial n_q}dS_q \quad (2.27)$$

$$C_{ij} = C(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = jk \int_{\Gamma_2} N_j(\mathbf{r}_q)\frac{G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_q)}{z(\mathbf{r}_q)}dS_q \quad (2.28)$$

$$d_i = d(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_s) = G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_s) \quad (2.29)$$

但し, δ : Kronecker のデルタ, \mathbf{r}_i : 節点 i の位置ベクトル, N_j : 節点 j の内挿関数.
境界上の音圧は Eq.(2.24) を解くことにより算出され, その際に反復解法を用いる場合,
 \mathbf{p} に初期値を与えて左辺の行列ベクトル積を繰り返し計算することになる.

領域内の音圧については, 領域内の点 \mathbf{r} に関する以下の積分方程式に基づいて求められる.

$$p(\mathbf{r}_r) = p_D(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_s) + \int_{\Gamma} \left(p(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_q)}{\partial n_q} - \frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial n_q} G(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_q) \right) dS \quad (2.30)$$

即ち, Eq.(2.24) により算出された境界上の音圧ベクトル \mathbf{p} を用い, 次式により点 \mathbf{r} の音圧を算出する.

$$p(\mathbf{r}_r) = (\mathbf{b}^t(\mathbf{r}_r) + \mathbf{c}^t(\mathbf{r}_r)) \cdot \mathbf{p} - j\omega\rho (\mathbf{a}^t(\mathbf{r}_r) \cdot \mathbf{v} + QG(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_s)) \quad (2.31)$$

ここで, ベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} の各成分である影響関数は

$$a_j(\mathbf{r}_r) = A(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_j) \quad (2.32)$$

$$b_j(\mathbf{r}_r) = B(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_j) \quad (2.33)$$

$$c_j(\mathbf{r}_r) = C(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_j) \quad (2.34)$$

として求められる.

局所座標への変換

3次元境界における面要素の場合, Eqs.(2.26, 2.27, 2.28) の積分は次式のような局所座標系 ξ, ζ への変換により計算される.

$$\int_{\Gamma} f(\mathbf{r}) dS_q = \int_{\xi} \int_{\zeta} f(\xi, \zeta) |\mathbf{J}(\xi, \zeta)| d\xi d\zeta \quad (2.35)$$

但し, $\mathbf{J}(\xi, \zeta)$ は次式で表される.

$$\mathbf{J}(\xi, \zeta) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \quad (2.36)$$

ここで, 要素内の任意の点における座標を近似するために各メッシュポイントに対応する形状関数 M を設ける. 形状関数は対応するメッシュポイントにおいては値 1 をとり, その他のメッシュポイントにおいては値 0 をとる性質を持つ. 要素内の任意の点における座標 \mathbf{r} は, メッシュポイントの座標 \mathbf{r}_j と形状関数 M_j の線形結合により以下のように近似される.

$$\mathbf{r}(\xi, \zeta) = \sum_{j=1}^m M_j(\xi, \zeta) \mathbf{r}_j \quad (2.37)$$

但し, m : 要素内の総メッシュポイント数.

内挿関数と形状関数が一致するものをアイソパラメトリック要素と呼び, 境界要素法ではしばしば用いられる. 一方, 要素上で関数値を一定とする一定要素 (0 次要素) もしばしば用いられ, この場合形状関数と内挿関数は異なる.

2.3.4 法線方向微分型積分方程式に基づくマトリクス方程式の導出

前節では Eq.(2.20) の積分方程式に基づくマトリクス方程式を導出したが, ここでは Eq.(2.20) を点 p における法線方向に微分した法線方向微分型積分方程式 (normal derivative form: NDF) を導出し, これに基づくマトリクス方程式を得る. Terai [56] は NDF に対して Eq.(2.20) を BF (basic form) と呼んでおり, 以下はこれに従って表記するものとする. NDF は特に薄い物体の音響散乱問題において大きな利点となることが知られている.

Eq.(2.20) を点 p における法線方向に微分することで以下の法線方向微分型積分方程式が得られる. 但し, 点 p は滑らかな境界上にあるものとする.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial p(\mathbf{r}_p)}{\partial n_p} = \frac{\partial p_D(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_s)}{\partial n_p} + \int_{\Gamma} \left(p(\mathbf{r}_q) \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_p \partial n_q} - \frac{\partial p(\mathbf{r}_q)}{\partial n_q} \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_p} \right) dS \quad (2.38)$$

ここで 3 次元音場基本解の法線方向 2 階微分は次式で表される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_p \partial n_q} &= -\frac{\exp(jkr_{pq})}{4\pi r_{pq}^3} \\ &\cdot [(3(1 - jkr_{pq}) - k^2 r_{pq}^2) \cos(\mathbf{r}_{pq}, \mathbf{n}_p) \cos(\mathbf{r}_{pq}, \mathbf{n}_q) - (1 - jkr_{pq}) \cos(\mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q)] \end{aligned} \quad (2.39)$$

上式に境界条件として Eq.(2.10) を代入して離散化すると, 最終的に以下のマトリクス方程式が得られる.

$$(\mathbf{E}_N + \mathbf{B}_N + \mathbf{C}_N) \cdot \mathbf{p} = j\omega\rho ((\mathbf{F}_N + \mathbf{A}_N) \cdot \mathbf{v} + Q\mathbf{d}_N) \quad (2.40)$$

但し, 各行列及び直接音ベクトルの成分は次式により表される.

$$E_{Nij} = E_N(\mathbf{r}_i) = \frac{jk}{2z(\mathbf{r}_i)} \delta_{ij} \Big|_{\Gamma_2} \quad (2.41)$$

$$F_{Nij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \Big|_{\Gamma_1} \quad (2.42)$$

$$A_{Nij} = A_N(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \int_{\Gamma_1} N_j(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_q)}{\partial n_i} dS_q \quad (2.43)$$

$$B_{Nij} = B_N(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \int_{\Gamma} N_j(\mathbf{r}_q) \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_q)}{\partial n_i \partial n_q} dS_q \quad (2.44)$$

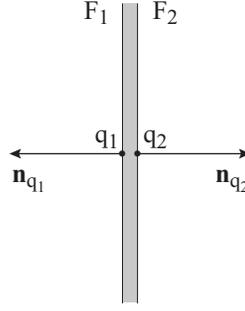


Fig. 2.3: Illustration of a plate.

$$C_{Nij} = C_N(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = jk \int_{\Gamma_2} N_j(\mathbf{r}_q) \frac{1}{z(\mathbf{r}_q)} \frac{\partial G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_q)}{\partial n_i} dS_q \quad (2.45)$$

$$d_{Ni} = d_N(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_s) = \frac{\partial G(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i)}{\partial n_i} \quad (2.46)$$

境界上の音圧は Eq.(2.40) を解くことにより算出され，その際に反復解法を用いる場合， \mathbf{p} に初期値を与えて左辺の行列ベクトル積を繰り返し計算することになる．

領域内の音圧については，BF と同様，領域内の点 \mathbf{r} に関する積分方程式 Eq.(2.30) に基づいて求められる．即ち，Eq.(2.40) により算出された境界上の音圧ベクトル \mathbf{p} を用い，Eq.(2.31) により点 \mathbf{r} の音圧を算出する．

薄板の解析手法

薄板のような解析対象の厚みが限りなく 0 に近い物体の解析については，NDF の適用により物体の両面音圧差を未知数として解析することが可能となる [56] ．

Fig.2.3 に示すような板を考える．板の両面を F_1, F_2 とする．板が吸音境界を持たない場合，板の両面に相対する 2 点 q_1, q_2 について，振動速度が等しいこと，法線方向が逆向きであることから次式が成り立つ．

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_{q_1})}{\partial n_{q_1}} = -\frac{\partial p(\mathbf{r}_{q_2})}{\partial n_{q_2}} \quad (2.47)$$

従って， $q = q_1$ とし， Γ を板両面 F_1, F_2 が表裏一体となった面とすると，Eq.(2.38) は次式で表される．

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p(\mathbf{r}_{p_1})}{\partial n_p} + \frac{\partial p(\mathbf{r}_{p_2})}{\partial n_p} \right) &= \frac{\partial p_D(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_s)}{\partial n_p} \\ + \int_{\Gamma} \left((p(\mathbf{r}_{q_1}) - p(\mathbf{r}_{q_2})) \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_p \partial n_q} - \left(\frac{\partial p(\mathbf{r}_{q_1})}{\partial n_q} - \frac{\partial p(\mathbf{r}_{q_2})}{\partial n_q} \right) \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_p} \right) dS \end{aligned} \quad (2.48)$$

上式に Eq.(2.47) を適用し，板両面音圧差 $p(\mathbf{r}_{q_1}) - p(\mathbf{r}_{q_2}) = \tilde{p}(\mathbf{r}_q)$ とおくと以下の式が得られる．

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_p)}{\partial n_p} = \frac{\partial p_D(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_s)}{\partial n_p} + \int_{\Gamma} \left(\tilde{p}(\mathbf{r}_q) \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_p \partial n_q} \right) dS \quad (2.49)$$

上式に境界条件として Eq.(2.10) を代入して離散化すると，最終的に以下のマトリクス方程式が得られる．

$$\mathbf{B}_N \cdot \tilde{\mathbf{p}} = j\omega\rho(\mathbf{v} + Q\mathbf{d}_N) \quad (2.50)$$

但し， $\tilde{\mathbf{p}}$: 音圧差ベクトル (未知量) ．

境界上の板両面音圧差は Eq.(2.50) を解くことにより算出され，その際に反復解法を用いる場合， $\tilde{\mathbf{p}}$ に初期値を与えて左辺の行列ベクトル積を繰り返し計算することになる．

領域内の音圧については，領域内の点 \mathbf{r} に関する以下の積分方程式に基づいて求められる．

$$p(\mathbf{r}_r) = p_D(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_s) + \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_q)}{\partial n_q} dS \quad (2.51)$$

即ち，Eq.(2.50) により算出された境界上の両面音圧差ベクトル $\tilde{\mathbf{p}}$ を用い，次式により点 \mathbf{r} の音圧を算出する．

$$p(\mathbf{r}_r) = \mathbf{b}^t(\mathbf{r}_r) \cdot \tilde{\mathbf{p}} - j\omega\rho Q G(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_s) \quad (2.52)$$

2.3.5 Burton-Miller 法に基づくマトリクス方程式の導出

前節までで導出した基本型 (BF) や法線方向微分型 (NDF) の各方程式を用いて外部問題を解く場合，BF においては内部 Dirichlet 問題の固有周波数で，NDF においては内部 Neumann 問題の固有周波数で解が一意に定まらないことが知られている．これは外部問題における解の一意性の問題，または見かけの固有値の問題などと呼ばれている．この問題に対処するための手法はいくつか提案されているが [57, 58]，ここでは Burton and Miller による方法に基づいた定式化を行う [58]．これは BF と NDF の各方程式の線形結合に基づくものであり，以下 Burton-Miller 法と表記するものとする．本手法は通常定式化においては BF と NDF の両者のマトリクス要素の積分核を算出する必要があるため，BF，NDF を単独で用いる場合に比べて行列生成における計算量が増加する欠点を持つが，係数行列を直接算出しない FMBEM での定式化においては計算量の増加が少なく，適合性が高い手法と言える．

BF と NDF に基づく積分方程式 Eqs.(2.20, 2.38) を結合係数を α として線形結合し，境界条件 Eq.(2.10) を代入して離散化すると最終的に以下のマトリクス方程式が得られる．

$$(\mathbf{L} + \mathbf{M} + \mathbf{N}) \cdot \mathbf{p} = j\omega\rho((\mathbf{K} + \alpha\mathbf{F}_N) \cdot \mathbf{v} + Q\mathbf{q}) \quad (2.53)$$

但し，

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} + \alpha\mathbf{A}_N, \quad (2.54)$$

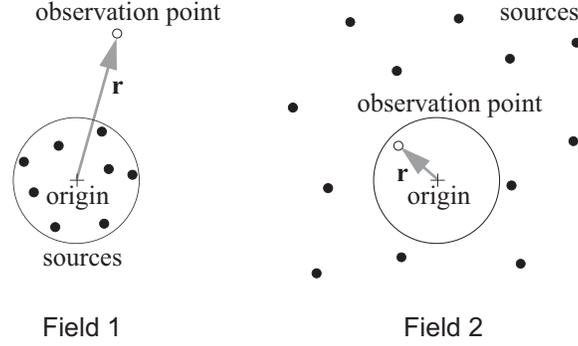


Fig. 2.4: Illustration of two types of sound fields: Field 1 (outer field) and Field 2 (inner field).

$$\mathbf{L} = \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B}_N, \quad (2.55)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{C} + \alpha \mathbf{C}_N, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} + \alpha \mathbf{E}_N, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{d} + \alpha \mathbf{d}_N. \quad (2.58)$$

文献 [59] を参考に，本論文では α として $1/jk$ を用いることとする．境界上の音圧は Eq.(2.53) を解くことにより算出され，その際に反復解法を用いる場合， \mathbf{p} に初期値を与えて左辺の行列ベクトル積を繰り返し計算することになる．

領域内の音圧については，BF，NDF と同様，領域内の点 \mathbf{r} に関する積分方程式 Eq.(2.30) に基づいて求められる．即ち，Eq.(2.53) により算出された境界上の音圧ベクトル \mathbf{p} を用い，Eq.(2.31) により点 \mathbf{r} の音圧を算出する．

2.4 多重極展開の基礎理論

2.4.1 音場の多重極展開表現

一般に，ある領域に含まれるソース点や双極子の集合に対し，その領域から離れた点におけるポテンシャルの値を多重極展開という形で表現することが可能である．

Fig.2.4 に 2 種類の音場を図式的に示す．フィールド 1 の音場は全ソース点が観測点より原点に近く，また Sommerfeld の放射条件を満たす場合である．観測点でのポテンシャルは，多重極展開により次式で表すことができる．

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{n,m} h_n^{(1)}(kr) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.59)$$

但し， \mathbf{r} ：観測点の位置ベクトル， $r = |\mathbf{r}|$ ， $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ ， $h_n^{(1)}$ ：第 1 種球 Hankel 関数， $c_{n,m}$ ：多重極展開係数．

ここで，球面調和関数 $Y_{n,m}$ は次式で定義される．

$$Y_{n,m}(\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^m \sqrt{\frac{(n-m)! 2n+1}{(n+m)! 4\pi}} P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi} \quad (2.60)$$

但し， P_n^m : Legendre 陪関数， (r, θ, φ) : \mathbf{r} の極座標表現．

一方，フィールド 2 の音場はソース点より観測点が原点に近い場合であり，観測点でのポテンシャルは，局所展開により次式で表すことができる．

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n e_{n,m} j_n(kr) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.61)$$

但し， \mathbf{r} : 観測点の位置ベクトル， j_n : 球 Bessel 関数， $e_{n,m}$: 局所展開係数．

ここで，記述の簡便のため Eqs.(2.59, 2.61) にベクトル表現を用いると，タイプ 1 及び 2 の音場は各々以下のように表される．

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{n,m} \Psi_{n,m}(k, \mathbf{r}) = \Psi^t(k, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{c} \quad (2.62)$$

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n e_{n,m} \Phi_{n,m}(k, \mathbf{r}) = \Phi^t(k, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e} \quad (2.63)$$

但し， $\Psi_{n,m}(k, \mathbf{r}) = h_n^{(1)}(kr) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{r}})$ ， $\Phi_{n,m}(k, \mathbf{r}) = j_n(kr) Y_{n,m}(\hat{\mathbf{r}})$: 球面波動関数，

$\Psi^t(k, \mathbf{r}) = [\Psi_{0,0}(k, \mathbf{r}) \quad \Psi_{1,-1}(k, \mathbf{r}) \quad \Psi_{1,0}(k, \mathbf{r}) \quad \Psi_{1,1}(k, \mathbf{r}) \quad \dots]$ ，

$\Phi^t(k, \mathbf{r}) = [\Phi_{0,0}(k, \mathbf{r}) \quad \Phi_{1,-1}(k, \mathbf{r}) \quad \Phi_{1,0}(k, \mathbf{r}) \quad \Phi_{1,1}(k, \mathbf{r}) \quad \dots]$: 球面波動関数ベクトル，

$\mathbf{c} = [c_{0,0} \quad c_{1,-1} \quad c_{1,0} \quad c_{1,1} \quad \dots]^t$ ， $\mathbf{e} = [e_{0,0} \quad e_{1,-1} \quad e_{1,0} \quad e_{1,1} \quad \dots]^t$: 展開係数ベクトル．

2.4.2 多重極展開係数の変換

Fig.2.5 に示すようなソース点 q ，多重極展開点 M ，局所展開点 L ，観測点 p の位置関係を想定する．ソース点 q があるときの観測点 p でのポテンシャルは Eq.(2.62) より次式で表される．

$$U(\mathbf{r}_{pq}) = \Psi^t(k, \mathbf{r}_{pq}) \cdot \mathbf{a}_q \quad (2.64)$$

但し， \mathbf{a}_q : ソース点 q での展開係数ベクトル．

上式による音場の展開表現は，Fig.2.5 の各点において，球面波動関数の加法定理 [60] に基づく以下の 3 段階の展開表現が可能であり，これにより展開係数ベクトルの変換が行われる．

1) 多重極展開点 M に関する展開表現 (フィールド 1 → フィールド 1 の変換)

$$U(\mathbf{r}_{pq}) = \Psi^t(k, \mathbf{r}_{pM}) \cdot \Lambda(k, \mathbf{r}_{Mq}) \cdot \mathbf{a}_q = \Psi^t(k, \mathbf{r}_{pM}) \cdot \mathbf{a}_M \quad (2.65)$$

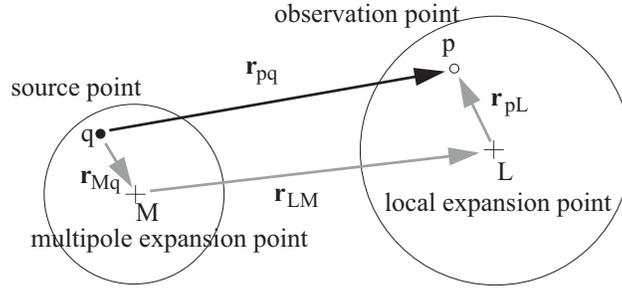


Fig. 2.5: Geometry of four points (points p, q, M, and L).

但し, $r_{Mq} < r_{pM}$ を条件とする.

2) 局所展開点 L に関する展開表現 (フィールド 1 → フィールド 2 の変換)

$$U(\mathbf{r}_{pq}) = \Phi^t(k, \mathbf{r}_{pL}) \cdot \Xi(k, \mathbf{r}_{LM}) \cdot \mathbf{a}_M = \Phi^t(k, \mathbf{r}_{pL}) \cdot \mathbf{a}_L \quad (2.66)$$

但し, $r_{pL} < r_{LM}$ を条件とする.

3) 観測点 p に関する展開表現 (フィールド 2 → フィールド 2 の変換)

$$U(\mathbf{r}_{pq}) = \Phi^t(k, \mathbf{0}) \cdot \Lambda(k, \mathbf{r}_{pL}) \cdot \mathbf{a}_L = \Phi^t(k, \mathbf{0}) \cdot \mathbf{a}_p \quad (2.67)$$

なお, $Y_{0,0}(\hat{\mathbf{r}}) = 1/\sqrt{4\pi}$, $j_n(0)$ は $j_0(0) = 1$ を除き 0 であることから, $\Phi^t(k, \mathbf{0}) = [1/\sqrt{4\pi} \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots]$ となる.

変換行列 Λ , Ξ の各成分は次式により表される [61].

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Lambda_{\nu\mu, nm}(k, \mathbf{r}) \\ \Xi_{\nu\mu, nm}(k, \mathbf{r}) \end{bmatrix} &= \sum_{n'=|n-\nu|}^{n+\nu} j^{(\nu+n'-n)} (-1)^\mu \sqrt{\frac{4\pi(2n+1)(2\nu+1)}{2n'+1}} \\ &\times (n\nu 00 | n\nu n' 0) (n\nu - m\mu | n\nu n' - m + \mu) \begin{bmatrix} j_{n'}(kr) \\ h_{n'}^{(1)}(kr) \end{bmatrix} Y_{n', m-\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (2.68)$$

但し, $(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j_3 m_3)$: Clebsh-Gordan 係数 [62].

それぞれの変換は条件を満たす任意の点において多段階に適用可能である.

展開表現に関する上記 3 段階の変換式 Eqs.(2.65, 2.66, 2.67) をまとめると次式が得られる.

$$U(\mathbf{r}_{pq}) = \Phi^t(k, \mathbf{0}) \cdot \Lambda(k, \mathbf{r}_{pL}) \cdot \Xi(k, \mathbf{r}_{LM}) \cdot \Lambda(k, \mathbf{r}_{Mq}) \cdot \mathbf{a}_q \quad (2.69)$$

2.4.3 変換行列の対角化

観測点 p を局所展開点と見なすと, Eq.(2.64) は次式による展開表現 (フィールド 1 → フィールド 2 の変換) が可能である.

$$U(\mathbf{r}_{pq}) = \Phi^t(k, \mathbf{0}) \cdot \Xi(k, \mathbf{r}_{pq}) \cdot \mathbf{a}_q \quad (2.70)$$

Eq.(2.69) と Eq.(2.70) の対応から，変換行列に関する以下の関係式が成り立つ．

$$\Xi(k, \mathbf{r}_{pq}) = \Lambda(k, \mathbf{r}_{pL}) \cdot \Xi(k, \mathbf{r}_{LM}) \cdot \Lambda(k, \mathbf{r}_{Mq}) \quad (2.71)$$

上式の変換行列はいずれも密行列であり，これを直接用いると係数変換に伴う計算量が膨大化してしまうことは明らかである．そこで変換行列を対角化することにより計算量の低減を図る．

上式の各成分に対して平面波展開 [49] を適用することにより次式が得られる．

$$\Xi_{\nu\mu, nm}(k, \mathbf{r}_{pq}) = \oint j^\nu Y_{\nu, \mu}^*(\hat{\mathbf{k}}) E_{pL}(\mathbf{k}) T_{LM}(\hat{\mathbf{k}}) j^{-n} Y_{n, m}(\hat{\mathbf{k}}) E_{Mq}(\mathbf{k}) d\hat{\mathbf{k}} \quad (2.72)$$

ここで，

$$E_{Mq}(\mathbf{k}) = \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{Mq}) \quad (2.73)$$

$$T_{LM}(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{l=0}^{\infty} j^l (2l+1) h_l^{(1)}(kr_{LM}) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{LM}) \quad (2.74)$$

但し， \mathbf{k} : 波数ベクトル， $k = |\mathbf{k}|$ ， $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ ， P_l : Legendre 多項式， $*$: 複素共役， $\oint d\hat{\mathbf{k}}$: 単位球面上の積分．

Eq.(2.72) について行列表現を用いると，Eq.(2.71) における変換行列が対角化され，次式が得られる．

$$\Xi(k, \mathbf{r}_{pq}) = \oint E_{pL}(\mathbf{k}) \mathbf{Y}^*(\hat{\mathbf{k}}) \cdot T_{LM}(\hat{\mathbf{k}}) E_{Mq}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Y}^t(\hat{\mathbf{k}}) d\hat{\mathbf{k}} \quad (2.75)$$

但し， $\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{k}}) = [Y_{0,0}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (-j)Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{k}}) \quad \dots \quad (-j)^n Y_{n,m}(\hat{\mathbf{k}}) \quad \dots]^t$ ．

2.5 高速多重極境界要素法による音場の定式化

2.5.1 高速多重極アルゴリズムの導入

Eq.(2.20) から，領域内の音場は 1 重層ポテンシャル $\int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n_q} G dS$ 及び 2 重層ポテンシャル $\int_{\Gamma} p \frac{\partial G}{\partial n_q} dS$ からの寄与により生成されると解釈できる．従って，BEM で最終的に得られるマトリクス方程式 Eq.(2.24) では，離散化した全要素間でポテンシャルの寄与を評価していることとなる．これを解く際の計算量は，直接解法を用いた場合 $O(N^3)$ ，適切な反復解法を用いた場合でも行列ベクトル積程度の $O(N^2)$ となり，必要記憶容量に関しても，行列を保持する必要から $O(N^2)$ となる．一方 FMBEM では，マトリクス方程式 Eq.(2.24) に反復解法を用いる場合に，前述の多重極展開を用いたアルゴリズムの適用により，行列を生成することなく行列ベクトル積の演算を行う．具体的には，セルによる要素のグループ化を通して要素群からのポテンシャルの寄与をセル代表点の多重極展開として集積し，

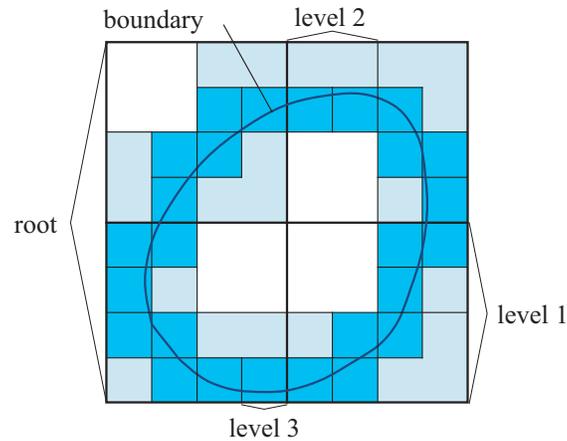


Fig. 2.6: Hierarchical cell structure for a two-dimensional problem.

セル間で影響を評価することとなる．このような手法により行列ベクトル積の演算部を効率化し，計算量及び必要記憶容量を大幅に低減することが可能となる．この手法を高速多重極アルゴリズム（fast multipole algorithm: FMA）と呼ぶ．さらに，セルの階層構造を導入し，多重極展開を多段階に使用することで一層の効率化が図られる [24, 25]．このように多段階化した場合を多段階高速多重極アルゴリズム（multilevel FMA: MLFMA）と呼ぶ．（多段階化されたものを指して FMA あるいは fast multipole method (FMM) と呼ぶことも多い．）MLFMA は， N 体問題においては計算量を $O(N)$ にまで低減するとされている [16]．Helmholtz 方程式に対する FMA においては，1 段階の FMA 適用により計算量は $O(N^{\frac{3}{2}})$ にまで [43]，MLFMA により $O(N \log N)$ にまで [25] 低減可能とされている．必要記憶容量に関しても $O(N \log N)$ [25, 48] とされており，計算量と同様の低減が見込まれる．

階層セル構造

要素のグループ化の方法には様々なものが考えられるが，ここでは木表現に基づく階層セル構造を用いる．Fig.2.6 に 2 次元問題における階層セル構造（4 分木構造）を示す．まず領域全体を内包する正方形のルートセルを想定する．次にこれを 4 等分したもののうち，要素を内包するものをレベル 1 のセル群とする．（要素を内包しない正方形は考慮しない．即ちセルと呼ばない．）以下同様に，レベル 2, レベル 3 と階層化が可能である．3 次元問題では Fig.2.7 に示すような立方体に基づく 8 分木構造が汎用的なものとして採用できる．階層化の方法については，ルートセル内の部分空間内で階層化レベルが異なる設定と，ルートセル内の全ての空間内で同一とする設定が考えられる．前者を用いた MLFMA は Adaptive Algorithm [16] あるいは Adaptive FMA (AFMA) [63] と呼ばれる

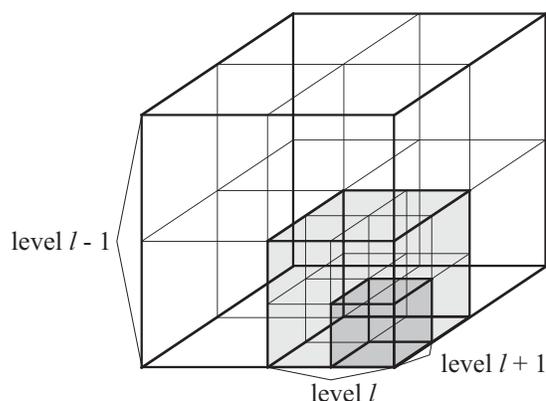


Fig. 2.7: Hierarchical cell structure for a three-dimensional problem.

ことがあり，N 体問題等に見られるように粒子分布の密度が空間内で不均一になりやすい問題に対して有効である一方，後者に比べて考慮すべきセル同士の位置関係がより多様となり，アルゴリズムが複雑になる欠点がある．一方後者については，境界要素法のように小空間内で見たときの要素の密度がほぼ均一の問題に対しては十分有効であると考えられる．従って，本論文では一貫して後者の階層化方法を採用することとする．また，以下ではレベル及びセルに関して，レベル数がより大きい，即ち各セルサイズがより小さい方を下位，レベル数がより小さい，即ち各セルサイズがより大きい方を上位と呼ぶこととする．

このような階層構造，またはツリー構造は Appel [17] により提案され，Barnes *et al.* により上記のような 4 分木，8 分木階層構造に改良された．後者は Barnes-Hut 法 [18] と呼ばれ，N 体問題でしばしば用いられるが，MLFMA の場合と異なり局所展開を含まない手法であることから，その計算量は $O(N \log N)$ となる．

影響評価の方法

同レベルにおけるセル間関係として，Fig.2.8 (2 次元問題の例) に示すように近傍セル群と相互作用セル群を定義する．レベル l のセル m_l にとって，近傍セル群 N_{m_l} とは隣接するセルに自身のセルを含めたものとし，相互作用セル群 T_{m_l} とはセル m_l を束ねる上位セル m_{l-1} の近傍セル群 $N_{m_{l-1}}$ に含まれ，かつセル m_l の近傍セル群 N_{m_l} に属さないものとする．セル及び要素の包含関係としては，セル m_l が束ねるレベル $l+1$ のセル群を C_{m_l} とし，セル m_l 内の要素群を G_{m_l} として表す．

高速多重極アルゴリズムの多段階化は Fig.2.9 に示すように 6 つのステップから構成される．ステップ 2, 4 はレベル 1 及び最下位レベルを除く各レベルにおいて，ステップ 3 はレベル 1 を除く各レベルにおいて実行される．以下に各ステップの具体的内容を列挙する．

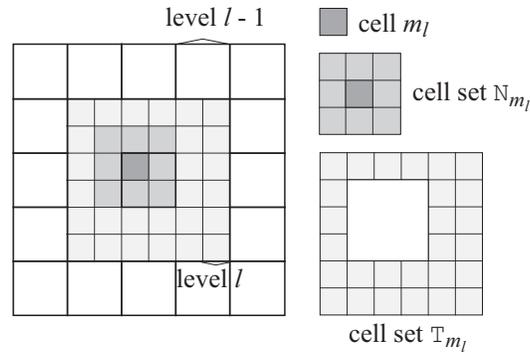


Fig. 2.8: Relationship between cells at level l for two-dimensional problem.

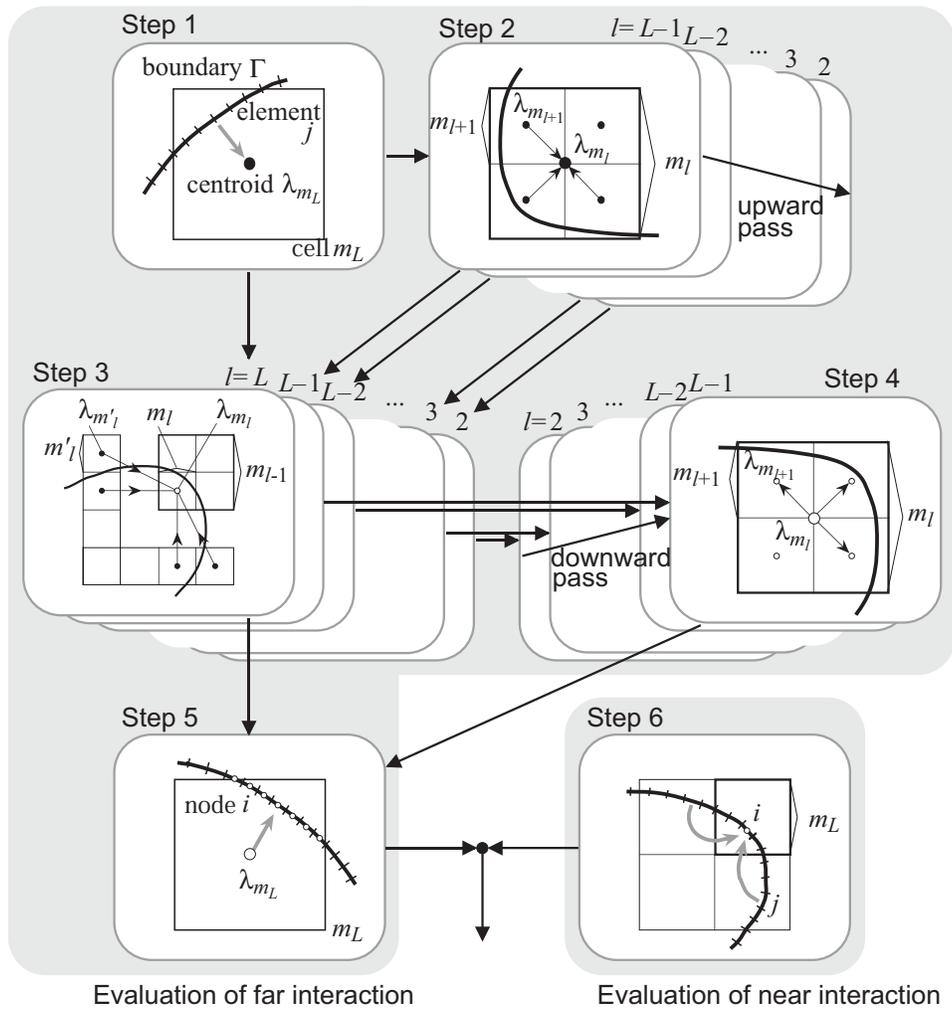


Fig. 2.9: Schematic diagram of MLFMA.

ステップ 1：最下位レベル L のセル m_L についてセル内の要素群 G_{m_L} の寄与をセル中心点 λ_{m_L} の寄与に変換して集積する．

ステップ 2：上位レベルのセル m_l が束ねる下位レベルのセル群 C_{m_l} の寄与を上位レベルのセル中心点 λ_{m_l} の寄与に変換して集積する．

ステップ 3：セル m_l の中心点 λ_{m_l} に対する相互作用セル群 T_{m_l} からの影響を集積する．

ステップ 4：上位レベルのセル m_l に対する影響を下位レベルのセル群 C_{m_l} 各中心点に対する影響に変換する．

ステップ 5：最下位レベルのセル m_L に対する影響をセル内の各節点に対する影響に変換する．

ステップ 6：最下位レベルのセル m_L 内の各節点に対して近傍セル群 N_{m_l} 内の要素群からの影響を集積する．

以上のステップを通して全要素間の影響を評価することが可能となる．

2.5.2 影響関数の定式化

第 4 節で示した多重極展開の基礎理論に基づいて，BEM における影響関数を FMBEM に対応づけた形に再定式化する．BF，NDF 及び Burton-Miller 法の場合について行う．また，その数値評価方法を示す．

BF における定式化

Eq.(2.9) で表される基本解は，Eq.(2.64) により次式で表現される．

$$G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) = \Psi^t(k, \mathbf{r}_{pq}) \cdot \mathbf{a}_G \quad (2.76)$$

但し， $\mathbf{a}_G = [jk/\sqrt{4\pi} \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots]^t$ ．

上式に Eqs.(2.65, 2.66, 2.67) で表される 3 段階の変換を施し，Eq.(2.75) の変換行列表現を用いると，基本解の多重極展開表現である次式が得られる．

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) &= \Phi^t(k, \mathbf{0}) \cdot \Lambda(k, \mathbf{r}_{pL}) \cdot \Xi(k, \mathbf{r}_{LM}) \cdot \Lambda(k, \mathbf{r}_{Mq}) \cdot \mathbf{a}_G \\ &= \frac{jk}{16\pi^2} \oint E_{pL}(\mathbf{k}) T_{LM}(\hat{\mathbf{k}}) E_{Mq}(\mathbf{k}) d\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (2.77)$$

さらに，上式を前節で示した MLFMA の手順に対応づけると，多重極展開が多段階化された以下の表現が得られる．

$$G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) = \frac{jk}{16\pi^2} \oint E_{p\lambda_{m_L}}(\mathbf{k}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m_{l+1}}\lambda_{m_l}}(\mathbf{k}) \cdot T_{\lambda_{m_I}\lambda_{m'_I}}(\hat{\mathbf{k}}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m'_l}\lambda_{m'_{l+1}}}(\mathbf{k}) E_{\lambda_{m'_L}q}(\mathbf{k}) d\hat{\mathbf{k}} \quad (2.78)$$

但し， I ：ステップ 3 を実行するセルのレベル．

また，関数 E については以下の関係式が成り立つ．

$$\frac{\partial E_{\lambda_{m'_L}q}(\mathbf{k})}{\partial n_q} = jk(\mathbf{n}_q \cdot \hat{\mathbf{k}}) E_{\lambda_{m'_L}q}(\mathbf{k}) \quad (2.79)$$

従って，Eq.(2.20) における基本解の点 q での法線方向微分は次式で表される．

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_q} = \frac{-k^2}{16\pi^2} \oint E_{p\lambda_{m_L}}(\mathbf{k}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m_{l+1}}\lambda_{m_l}}(\mathbf{k}) \cdot T_{\lambda_{m_I}\lambda_{m'_I}}(\hat{\mathbf{k}}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m'_l}\lambda_{m'_{l+1}}}(\mathbf{k}) E_{\lambda_{m'_L}q}(\mathbf{k})(\mathbf{n}_q \cdot \hat{\mathbf{k}}) d\hat{\mathbf{k}} \quad (2.80)$$

従って，BF における Eqs.(2.26, 2.27, 2.28) の各影響関数は Eqs.(2.78, 2.80) を代入することにより以下のように表される．

$$\begin{bmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ C_{ij} \end{bmatrix} = \frac{jk}{16\pi^2} \oint E_{i\lambda_{m_L}}(\mathbf{k}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m_{l+1}}\lambda_{m_l}}(\mathbf{k}) \cdot T_{\lambda_{m_I}\lambda_{m'_I}}(\hat{\mathbf{k}}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m'_l}\lambda_{m'_{l+1}}}(\mathbf{k}) \begin{bmatrix} \alpha_{\lambda_{m'_L}j}(\mathbf{k}) \\ \beta_{\lambda_{m'_L}j}(\mathbf{k}) \\ \gamma_{\lambda_{m'_L}j}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} d\hat{\mathbf{k}} \quad (2.81)$$

ここで，

$$\alpha_{\lambda_{m'_L}j}(\mathbf{k}) = \int_{\Gamma_1} N_j(\mathbf{r}_q) E_{\lambda_{m'_L}q}(\mathbf{k}) dS_q \quad (2.82)$$

$$\beta_{\lambda_{m'_L}j}(\mathbf{k}) = jk \int_{\Gamma} N_j(\mathbf{r}_q) E_{\lambda_{m'_L}q}(\mathbf{k})(\mathbf{n}_q \cdot \hat{\mathbf{k}}) dS_q \quad (2.83)$$

$$\gamma_{\lambda_{m'_L}j}(\mathbf{k}) = jk \int_{\Gamma_2} N_j(\mathbf{r}_q) \frac{E_{\lambda_{m'_L}q}(\mathbf{k})}{z(\mathbf{r}_q)} dS_q \quad (2.84)$$

である．

なお，3次元音場基本解の多重極展開表現 Eqs.(2.77, 2.78) の導出については，ここまで示した多重極展開理論による方法の他に，Gegenbauer の加法定理と球 Bessel 関数の平面波展開から直接的に導出する方法がある．(付録 A 3次元音場基本解の多重極展開表現の導出: pp. 201 参照)．

NDF における定式化

Eq.(2.38) における基本解の点 p での法線方向微分及び点 p, q での 2 階法線方向微分は, 多重極展開によりそれぞれ次のように表される .

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_p} &= \frac{-k^2}{16\pi^2} \oint (\mathbf{n}_p \cdot \hat{\mathbf{k}}) E_{p\lambda_{m_L}}(\mathbf{k}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m_{l+1}}\lambda_{m_l}}(\mathbf{k}) \\ &\quad \cdot T_{\lambda_{m_I}\lambda_{m'_I}}(\hat{\mathbf{k}}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m'_l}\lambda_{m'_{l+1}}}(\mathbf{k}) E_{\lambda_{m'_L}q}(\mathbf{k}) d\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_p \partial n_q} &= \frac{-jk^3}{16\pi^2} \oint (\mathbf{n}_p \cdot \hat{\mathbf{k}}) E_{p\lambda_{m_L}}(\mathbf{k}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m_{l+1}}\lambda_{m_l}}(\mathbf{k}) \\ &\quad \cdot T_{\lambda_{m_I}\lambda_{m'_I}}(\hat{\mathbf{k}}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m'_l}\lambda_{m'_{l+1}}}(\mathbf{k}) E_{\lambda_{m'_L}q}(\mathbf{k}) (\mathbf{n}_q \cdot \hat{\mathbf{k}}) d\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (2.86)$$

従って, NDF における Eqs.(2.43, 2.44, 2.45) の各影響関数は Eqs.(2.85, 2.86) を代入することにより以下のように表される .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{Nij} \\ B_{Nij} \\ C_{Nij} \end{bmatrix} &= \frac{-k^2}{16\pi^2} \oint (\mathbf{n}_i \cdot \hat{\mathbf{k}}) E_{i\lambda_{m_L}}(\mathbf{k}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m_{l+1}}\lambda_{m_l}}(\mathbf{k}) \\ &\quad \cdot T_{\lambda_{m_I}\lambda_{m'_I}}(\hat{\mathbf{k}}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m'_l}\lambda_{m'_{l+1}}}(\mathbf{k}) \begin{bmatrix} \alpha_{\lambda_{m'_L}j}(\mathbf{k}) \\ \beta_{\lambda_{m'_L}j}(\mathbf{k}) \\ \gamma_{\lambda_{m'_L}j}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} d\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (2.87)$$

上式を Eq.(2.81) と比較すると, 積分にかかる係数及び積分内の係数 $(\mathbf{n}_i \cdot \hat{\mathbf{k}})$ を除いては全て同一であることがわかる . このことから, 後述する FMBEM の具体的な計算過程は BF と NDF とでほぼ同一となる .

Burton-Miller 法における定式化

Eqs.(2.81, 2.87) から , Burton-Miller 法における Eqs.(2.54, 2.55, 2.56) の各影響関数は以下のように表される .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_{ij} \\ L_{ij} \\ M_{ij} \end{bmatrix} &= \frac{jk}{16\pi^2} \oint \left(1 + (\mathbf{n}_i \cdot \hat{\mathbf{k}}) \right) E_{i\lambda_{m_L}}(\mathbf{k}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m_{l+1}}\lambda_{m_l}}(\mathbf{k}) \\ &\quad \cdot T_{\lambda_{m_I}\lambda_{m'_I}}(\hat{\mathbf{k}}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m'_l}\lambda_{m'_{l+1}}}(\mathbf{k}) \begin{bmatrix} \alpha_{\lambda_{m'_L}j}(\mathbf{k}) \\ \beta_{\lambda_{m'_L}j}(\mathbf{k}) \\ \gamma_{\lambda_{m'_L}j}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} d\hat{\mathbf{k}} \quad (2.88) \end{aligned}$$

上式を Eq.(2.81) と比較すると , 積分内の係数 $\left(1 + (\mathbf{n}_i \cdot \hat{\mathbf{k}}) \right)$ を除いては全て同一であることがわかる . このことから , 後述する FMBEM の具体的な計算過程は Burton-Miller 法においても BF の場合とほぼ同一となる .

数値評価方法

Eqs.(2.81, 2.87, 2.88) を数値的に評価する場合 , Eq.(2.74) で表される $T_{\lambda_{m_I}\lambda_{m'_I}}$ 及び単位球面積分については近似的な取り扱いが必要である .

Eq.(2.74) の無限級数和については打ち切り次数を N_c とした次式により評価するものとする .

$$T_{LM}(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{l=0}^{N_c} j^l (2l+1) h_l^{(1)}(kr_{LM}) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{LM}) \quad (2.89)$$

多重極展開点 L, M の各セルを包含可能な球の直径を D とすると , 打ち切り次数 N_c について , Coifman *et al.* は kD よりやや大きい値が必要なこと , kr_{LM} を大きく上回る場合 , T_{LM} が激しく振動して Eq.(2.90) で表される数値積分における誤差の要因となることを述べている [43] . また , Koc *et al.* は N_c が kD に依存すること , N_c が過大な場合 , Hankel 関数の激しい振動により数値計算上の誤差が生じるため , $N_c < kr_{LM}$ が必要条件となることを述べている [47] .

単位球面積分については , θ 方向に対して Gauss-Legendre 求積法 , φ 方向に対して台

形公式を適用し，次式により算出するものとする．

$$\begin{aligned}
\oint f(\hat{\mathbf{k}})d\hat{\mathbf{k}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi)\sin\theta d\theta d\varphi \\
&= \sum_{i=1}^{N_k} \sum_{j=1}^{2N_k} w_i^g w_j^c f(\theta_i, \varphi_j) \\
&= \sum_{n=1}^K w_n f(\hat{\mathbf{k}}_n)
\end{aligned} \tag{2.90}$$

但し， w_i^g ， w_j^c ， w_n ：積分点 θ_i ， φ_j ， $\hat{\mathbf{k}}_n$ の重み係数．

上式は $\alpha + \beta + \gamma < 2N_k$ のとき多項式 $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ について厳密である．また，Eq.(2.60) の球面調和関数 $Y_{n,m}$ は n 次多項式に相当するため，上式は $n < 2N_k$ のとき厳密である [47]． θ 方向及び φ 方向の各積分点数については，Eq.(2.89) の打ち切り次数 N_c との関係で精度が保証される値として $N_k = N_c$ [43]，あるいは $N_k = N_c + 1$ [47] が推奨されている．

打ち切り次数 N_c や積分点数 $2N_k^2$ 等の数値的評価のための設定項目については，精度及び効率の両観点から具体的な設定条件を定める必要があり，第 4 章で詳しく検討する．

2.5.3 数値計算過程

BEM におけるマトリクス方程式に反復解法を用いる際，各行列ベクトル積の算出に対して第 5.1 節で示した MLFMA が適用可能である．本節では，BF，NDF，Burton-Miller 法の場合について，各行列ベクトル積の具体的な数値計算過程を MLFMA の各ステップに沿って示す．なお，以降では，レベル l における打ち切り次数及び単位球面積分点数をそれぞれ N_c^l ， K_l とし，各積分点の位置ベクトル及び重み係数をそれぞれ $\hat{\mathbf{k}}_n^l$ ， $w_n^l (n = 1, 2, \dots, K_l)$ とする．

BF における計算過程

Eq.(2.24) のマトリクス方程式における $(\mathbf{E} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{p}$ 及び $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ の行列ベクトル積に関して，Eq.(2.81) に基づいた計算過程を示す．但し，前者は繰り返し複数回，後者は 1 回の計算となる．

ステップ 1：単位球面上の各積分点 $\hat{\mathbf{k}}_n^L$ において，次式により最下位レベルセルの外向係数 ξ_{m_L} を行列ベクトル積ごと (上添字 \mathbf{p} ， \mathbf{v}) に算出する．

$$\begin{bmatrix} \xi_{m_L}^{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \\ \xi_{m_L}^{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \end{bmatrix} = \sum_{j \in G_{m_L}} \begin{bmatrix} \left(\beta_{\lambda_{m_L} j}(\hat{\mathbf{k}}_n^L) + \gamma_{\lambda_{m_L} j}(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \right) p_j \\ \alpha_{\lambda_{m_L} j}(\hat{\mathbf{k}}_n^L) v_j \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

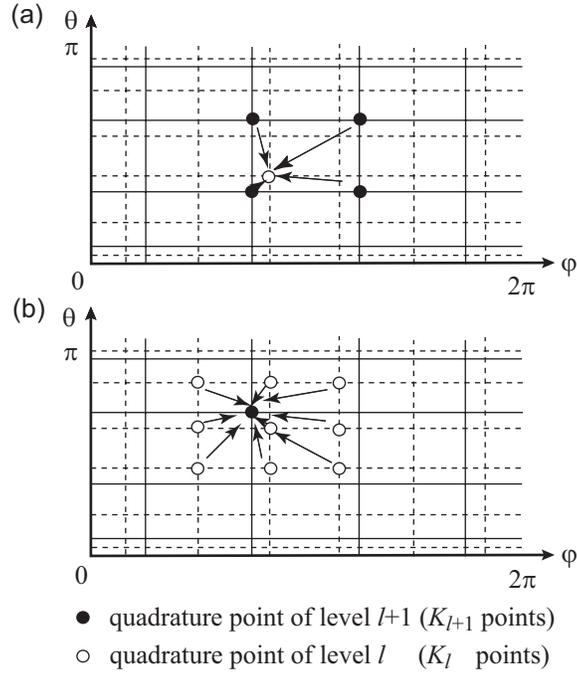


Fig. 2.10: (a) 4-point interpolation and (b) its adjoint interpolation between level $l + 1$ and l . Thick lines denote meshes for quadrature points at level $l + 1$, and dot lines denote those at level l . The number of quadrature points K_l is larger than K_{l+1} .

ステップ 2: 下位レベルセルの外向係数 $\xi_{m_{l+1}}$ から上位レベルセルの外向係数 ξ_{m_l} を算出する。その際、上位レベルでは積分点数が増加するため、次式のように積分点に関する補間を導入する。

$$\begin{bmatrix} \xi_{m_l}^p(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^l) \\ \xi_{m_l}^v(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^l) \end{bmatrix} = \sum_{m_{l+1} \in C_{m_l}} E_{\lambda_{m_l} \lambda_{m_{l+1}}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^l) \sum_{n=1}^{K_{l+1}} W_{n'n} \begin{bmatrix} \xi_{m_{l+1}}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^{l+1}) \\ \xi_{m_{l+1}}^v(\hat{\mathbf{k}}_n^{l+1}) \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

但し、 $W_{n'n}$: 補間係数。

$l = L - 1, L - 2, \dots, 2$ の昇順に計算を行う。但し、実際の数値計算においては、必ずしも下位レベルの全積分点による補間を行う必要はなく、精度確保に必要な補間点数を設定することとする。Fig.2.10(a) に 4 点補間の例を示す。補間方法には高速 Fourier 変換 (FFT) に基づく方法 [48, 64] や、Legendre 補間に基づくもの [25, 47] が知られている。補間方法及び必要十分な積分点数については第 4 章で扱う。

ステップ 3: 各レベル ($l = 2, 3, \dots, L$) において相互作用セル群に起因するセルの内向係数成分 τ_{m_l} を算出する。

$$\begin{bmatrix} \tau_{m_l}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^l) \\ \tau_{m_l}^v(\hat{\mathbf{k}}_n^l) \end{bmatrix} = \sum_{m'_l \in T_{m_l}} T_{\lambda_{m_l} \lambda_{m'_l}}^{N_c^l}(\hat{\mathbf{k}}_n^l) \begin{bmatrix} \xi_{m'_l}^p(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^l) \\ \xi_{m'_l}^v(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^l) \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

ステップ 4: 上位レベルセルの内向係数 (さらに上位レベルのセルによる内向係数成分 ζ_{m_l} と相互作用セル群による内向係数成分 τ_{m_l} の和) から, 下位レベルセルの上位レベルセルによる内向係数成分 $\zeta_{m_{l+1}}$ を算出する. その際, 下位レベルでは積分点数が減少するため, 間引く必要がある. これはステップ 2 に対応した手順であり, 前述の FFT による方法の他, 随伴補間による方法 [65] がある. ここでは後者による方法を示す (付録 B 随伴補間による内向係数の計算: pp. 203 参照).

$$\begin{bmatrix} \zeta_{m_{l+1}}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^{l+1}) \\ \zeta_{m_{l+1}}^v(\hat{\mathbf{k}}_n^{l+1}) \end{bmatrix} = \sum_{n'=1}^{K_l} \frac{w_{n'}^l}{w_n^{l+1}} W_{n'n} E_{\lambda_{m_{l+1}} \lambda_{m_l}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^l) \begin{bmatrix} \zeta_{m_l}^p(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^l) + \tau_{m_l}^p(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^l) \\ \zeta_{m_l}^v(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^l) + \tau_{m_l}^v(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^l) \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

但し, $\zeta_{m_2}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^2) = 0$.

$l = 2, 3, \dots, L-1$ の降順に計算を行う. 随伴補間は振動する被積分関数を持つ積分方程式を解くために提案され [65], Koc *et al.* らにより 3 次元散乱体による電磁場散乱解析に適用されている [47]. Fig.2.10(b) に (a) の 4 点補間に対応する随伴補間の例を示す.

ステップ 5: 最下位レベルセルの内向係数からセル内節点への寄与成分 $\phi_{F,i}$ を算出する.

$$\begin{bmatrix} \phi_{F,i}^p \\ \phi_{F,i}^v \end{bmatrix} = \frac{jk}{16\pi^2} \sum_{n=1}^{K_L} w_n^L E_{i\lambda_{m_L}}(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \begin{bmatrix} \zeta_{m_L}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^L) + \tau_{m_L}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \\ \zeta_{m_L}^v(\hat{\mathbf{k}}_n^L) + \tau_{m_L}^v(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

ステップ 6: 最下位レベルの近傍セル群内の要素群による節点への寄与成分 $\phi_{N,i}$ を算出する.

$$\begin{bmatrix} \phi_{N,i}^p \\ \phi_{N,i}^v \end{bmatrix} = \sum_{m'_L \in \mathcal{N}_{m_L}} \sum_{j \in \mathcal{G}_{m'_L}} \begin{bmatrix} (E_{ij} + B_{ij} + C_{ij})p_j \\ A_{ij}v_j \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

最終的に, 境界全面からの各節点への寄与は行列ベクトル積ごとに $\phi_i = \phi_{F,i} + \phi_{N,i}$ によって算出される. 従って, Eq.(2.24) に反復解法を用いる際に一連の計算過程を導入すると, その収束時には境界上全節点の音圧 p_j が定まるとともに, 全セルの外向係数 ξ_{m_l} 及び内向係数成分 ζ_{m_l}, τ_{m_l} が得られる.

Eq.(2.31) で表される領域内の音圧に関して, 既に算出された内向係数成分により効率的な計算が可能である. 計算方法は観測点の位置及び数に応じて様々なものが考えられるが, ここでは観測点がルートセル内にある場合の計算方法を示す.

観測点 \mathbf{r} が最下位レベルにいたるまでセルに内包されている場合, 上記過程のステップ 5, 6 の適用により観測点 \mathbf{r} での音圧が算出できる. ステップ 5 及び 6 における節点 i を領域内の点 \mathbf{r} に置き換えて Eqs.(2.95, 2.96) を各々次式に変形すると, 反復解法で得られた境界上の音圧 p_j と最下位レベルセルの内向係数成分 ζ_{m_L}, τ_{m_L} から各寄与成分が算出される.

$$\begin{bmatrix} \phi_{F,i}^p(\mathbf{r}_r) \\ \phi_{F,i}^v(\mathbf{r}_r) \end{bmatrix} = \frac{jk}{16\pi^2} \sum_{n=1}^{K_L} w_n^L E_{r\lambda_{m_L}}(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \begin{bmatrix} \zeta_{m_L}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^L) + \tau_{m_L}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \\ \zeta_{m_L}^v(\hat{\mathbf{k}}_n^L) + \tau_{m_L}^v(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_N^p(\mathbf{r}_r) \\ \phi_N^v(\mathbf{r}_r) \end{bmatrix} = \sum_{m'_L \in N_{m_L}} \sum_{j \in G_{m'_L}} \begin{bmatrix} (b_j(\mathbf{r}_r) + c_j(\mathbf{r}_r))p_j \\ a_j(\mathbf{r}_r)v_j \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

従って、最終的に点 \mathbf{r} の音圧は次式で得られる。

$$p(\mathbf{r}_r) = (\phi_F^p(\mathbf{r}_r) + \phi_N^p(\mathbf{r}_r)) - j\omega\rho(\phi_F^v(\mathbf{r}_r) + \phi_N^v(\mathbf{r}_r)) \quad (2.99)$$

観測点 \mathbf{r} を内包するセルが最下位レベルまで階層化されていない場合は、各レベルで観測点を内包するセルを生成し、ステップ 3 により相互作用セル群に起因するセルの内向係数成分 τ_{m_l} を算出する。観測点が最下位レベルセルに多数存在する場合は、ステップ 4 により内向係数成分 $\zeta_{m_{l+1}}$ を算出した後、上記過程と同様 Eqs.(2.97, 2.98, 2.99) により点 \mathbf{r} の音圧を算出する。観測点が少ない場合は、寄与成分を最下位レベルにまで分配するステップ 4 を省き、ステップ 3 で算出されるセル内向係数成分から直接寄与を算出する方が効率的と言える。観測点を含む（要素を内包する）最小のセルのレベルを $J(\geq 2)$ とすると、最下位レベルの近傍セル群以外からの寄与成分は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} \phi_F^p(\mathbf{r}_r) \\ \phi_F^v(\mathbf{r}_r) \end{bmatrix} = \frac{jk}{16\pi^2} \left(\sum_{n=1}^{K_J} w_n^J E_{r\lambda_{m_J}}(\hat{\mathbf{k}}_n^J) \begin{bmatrix} \zeta_{m_J}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^J) + \tau_{m_J}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^J) \\ \zeta_{m_J}^v(\hat{\mathbf{k}}_n^J) + \tau_{m_J}^v(\hat{\mathbf{k}}_n^J) \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \sum_{l=J+1}^L \sum_{n=1}^{K_l} w_n^l E_{r\lambda_{m_l}}(\hat{\mathbf{k}}_n^l) \begin{bmatrix} \tau_{m_l}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^l) \\ \tau_{m_l}^v(\hat{\mathbf{k}}_n^l) \end{bmatrix} \right) \quad (2.100)$$

最下位レベルの近傍セル群内の要素群による寄与成分は Eq.(2.98) より算出し、最終的に点 \mathbf{r} の音圧は Eq.(2.99) により算出する。

NDF における計算過程

Eq.(2.40) のマトリクス方程式における $(\mathbf{E}_N + \mathbf{B}_N + \mathbf{C}_N) \cdot \mathbf{p}$ 及び $(\mathbf{F}_N + \mathbf{A}_N) \cdot \mathbf{v}$ の行列ベクトル積に関して、Eq.(2.87) に基づいた計算過程を示す。但し、前者は繰り返し複数回、後者は 1 回の計算となる。なお、ステップ 1, 2, 3, 4 については BF の場合と同様であるため省略する。

ステップ 5：最下位レベルセルの内向係数からセル内節点への寄与成分 $\phi_{F,i}$ を算出する。

$$\begin{bmatrix} \phi_{F,i}^p \\ \phi_{F,i}^v \end{bmatrix} = \frac{-k^2}{16\pi^2} \sum_{n=1}^{K_L} w_n^L (\mathbf{n}_i \cdot \hat{\mathbf{k}}_n^L) E_{i\lambda_{m_L}}(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \begin{bmatrix} \zeta_{m_L}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^L) + \tau_{m_L}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \\ \zeta_{m_L}^v(\hat{\mathbf{k}}_n^L) + \tau_{m_L}^v(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

ステップ 6：最下位レベルの近傍セル群内の要素群による節点への寄与成分 $\phi_{N,i}$ を算出する。

$$\begin{bmatrix} \phi_{N,i}^p \\ \phi_{N,i}^v \end{bmatrix} = \sum_{m'_L \in N_{m_L}} \sum_{j \in G_{m'_L}} \begin{bmatrix} (E_{Nij} + B_{Nij} + C_{Nij})p_j \\ (F_{Nij} + A_{Nij})v_j \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

最終的に，境界全面からの各節点への寄与は行列ベクトル積ごとに $\phi_i = \phi_{F,i} + \phi_{N,i}$ によって算出される．従って，Eq.(2.40) に反復解法を用いる際に一連の計算過程を導入すると，その収束時には境界上全節点の音圧 p_j が得られる．

薄板解析における計算過程 剛な薄板に FMBEM (NDF) を適用する場合，行列ベクトル積の計算は Eq.(2.50) のマトリクス方程式における $\mathbf{B}_N \cdot \tilde{\mathbf{p}}$ のみとなる．計算過程は以下のようになる．なお，ステップ 2, 3, 4, 5 については FMBEM (NDF) の計算過程における上添字 p の場合と同様であるため省略する．

ステップ 1:

$$\xi_{m_L}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^L) = \sum_{j \in G_{m_L}} \beta_{\lambda_{m_L} j}(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \tilde{p}_j \quad (2.103)$$

ステップ 6:

$$\phi_{N,i}^p = \sum_{m'_L \in N_{m_L}} \sum_{j \in G_{m'_L}} B_{Nij} \tilde{p}_j \quad (2.104)$$

最終的に，境界全面からの各節点への寄与は行列ベクトル積ごとに $\phi_i = \phi_{F,i} + \phi_{N,i}$ によって算出される．従って，Eq.(2.50) に反復解法を用いる際に一連の計算過程を導入すると，その収束時には境界上全節点の両面音圧差 \tilde{p}_j が得られる．

Burton-Miller 法における計算過程

Eq.(2.53) のマトリクス方程式における $(\mathbf{L} + \mathbf{M} + \mathbf{N}) \cdot \mathbf{p}$ 及び $(\mathbf{K} + \alpha \mathbf{F}_N) \cdot \mathbf{v}$ の行列ベクトル積に関して，Eq.(2.88) に基づいた計算過程を示す．但し，前者は繰り返し複数回，後者は 1 回の計算となる．なお，ステップ 1, 2, 3, 4 については BF, NDF の場合と同様であるため省略する．

ステップ 5: 最下位レベルセルの内向係数からセル内節点への寄与成分 $\phi_{F,i}$ を算出する．

$$\begin{bmatrix} \phi_{F,i}^p \\ \phi_{F,i}^v \end{bmatrix} = \frac{-jk}{16\pi^2} \sum_{n=1}^{K_L} w_n^L \left(1 + (\mathbf{n}_i \cdot \hat{\mathbf{k}}_n^L)\right) E_{i\lambda_{m_L}}(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \begin{bmatrix} \zeta_{m_L}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^L) + \tau_{m_L}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \\ \zeta_{m_L}^v(\hat{\mathbf{k}}_n^L) + \tau_{m_L}^v(\hat{\mathbf{k}}_n^L) \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

ステップ 6: 最下位レベルの近傍セル群内の要素群による節点への寄与成分 $\phi_{N,i}$ を算出する．

$$\begin{bmatrix} \phi_{N,i}^p \\ \phi_{N,i}^v \end{bmatrix} = \sum_{m'_L \in N_{m_L}} \sum_{j \in G_{m'_L}} \begin{bmatrix} (L_{ij} + M_{ij} + N_{ij}) p_j \\ (K_{ij} + \alpha F_{Nij}) v_j \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

最終的に，境界全面からの各節点への寄与は行列ベクトル積ごとに $\phi_i = \phi_{F,i} + \phi_{N,i}$ によって算出される．従って，Eq.(2.53) に反復解法を用いる際に一連の計算過程を導入すると，その収束時には境界上全節点の音圧 p_j が得られる．

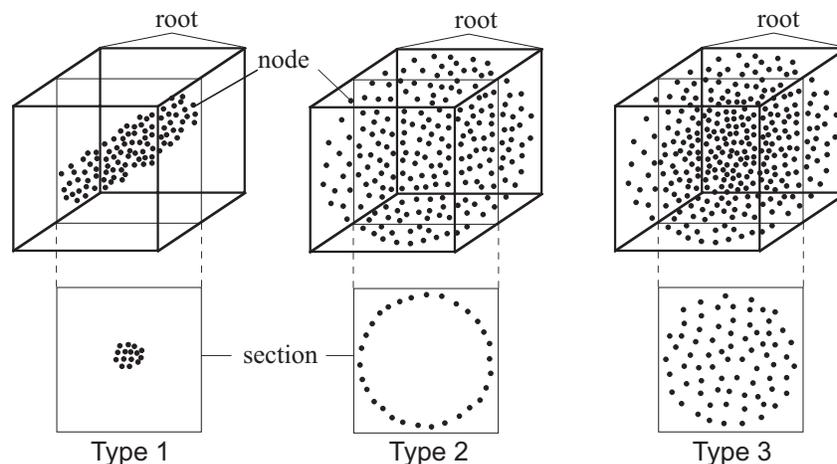


Fig. 2.11: Illustration of three types of problems.

以上で BF, NDF, Burton-Miller 法のそれぞれについて FMBEM の計算過程を示したが, ステップ 5, 6 のみが異なること, これらのステップでも係数が若干異なるものの計算内容はほぼ同一であることがわかる. 従って, 定式化による計算量の差は微小であると考えられる.

2.6 計算効率の理論的概算

MLFMA に基づく FMBEM が計算効率にもたらす効果を検証するため, 本手法による計算量及び必要記憶容量を理論的に概算する. 既往研究においては, 空間内における節点の分布性状を 2 次元的なものと仮定した概算や, 級数和打ち切り次数が考慮されていない概算が多い [43, 48, 52, 53]. しかしながら, 前者に関しては, 一般に節点の分布は任意であることから不十分であると考えられ, 後者に関しては精度確保のために必要な打ち切り次数を考慮した概算が必要であるといえる. ここでは打ち切り次数をセル代表長 (セルを内包する球の直径) D で基準化された無次元波数 kD との関係で考慮し, 典型的な例として節点分布の異なる 3 タイプを想定して, それぞれに対応させた概算を行う.

2.6.1 概算方法

Fig.2.11 に示すような典型的な 3 問題を対象とする. タイプ 1 は空間内に節点が 1 次元的にランダムに分布している場合で, 例としてダクト内部の音場や遮音壁を有する音場が挙げられる. タイプ 2 は空間内の面上に節点が 2 次元的にランダムに分布している場合で, 例として室内音場が挙げられる. タイプ 3 は空間全体に節点が 3 次元的にランダムに分布している場合で, 例として無数の小散乱体を有する音場が挙げられる. なお, 計算量

及び必要記憶容量は問題の節点数（自由度） N のオーダーでの評価を行うものとし，計算精度に関しては，誤差原因となる無限級数和の打ち切り次数及び単位球面積分の分点数を文献 [43] を参考に決定し，これにより精度が保証されると仮定して，以降では議論の対象外とする．セルの階層構造としては 8 分木構造を採用する．概算の設定条件を以下に示す．

- N : 境界面上の全節点数
- M : 最下位レベルセルに含まれる平均節点数
- M_l : レベル l におけるセル数
- $N_c^l \sim 2^{L-l} N_c^L$: レベル l における級数和打ち切り次数
($N_c^l \sim kD_l$ より)
- $K_l \sim 4^{L-l} K_L$: レベル l における単位球面積分分点数
($K_l \approx 2(N_c^l)^2 \sim (kD_l)^2$ より)

節点が a 次元的に分布している場合， $M_l \approx (2^a)^l$, $D_L \propto M^{1/a}$ が成り立つことから，以下の関係が得られる．

$$N_c^L \propto M^{\frac{1}{a}} \quad (2.107)$$

$$K_L \propto M^{\frac{2}{a}} \quad (2.108)$$

また， d を要素サイズ， $\lambda = nd$ を解析波長とすると， $N \sim (D_0/d)^a$ ， $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/nd$ より以下が成り立つ．

$$N \sim \left(\frac{n}{2\pi}\right)^a (kD_0)^a \sim (kD_0)^a \quad (2.109)$$

同様に， $M \sim (D_L/d)^a$ より以下が成り立つ．

$$M \sim \left(\frac{n}{2\pi}\right)^a (kD_L)^a \sim (kD_L)^a \quad (2.110)$$

また， $M_L = N/M$ より，タイプによらず以下が成り立つ．

$$L \propto \log M_L = \log\left(\frac{N}{M}\right) \quad (2.111)$$

2.6.2 計算量の評価

FMBEM の計算過程においては，反復計算する必要のない係数については反復演算以前の段階（セットアップ部）で計算しておくこととなる．具体的には以下のものが挙げられる．

- $\alpha_{\lambda_{m'_L} j}, \beta_{\lambda_{m'_L} j}, \gamma_{\lambda_{m'_L} j}$:
最下位レベルセルの外向係数算出のための係数（ステップ 1）

- $T_{\lambda_{m_l} \lambda_{m'_l}}$:
相互作用セル群からの寄与変換係数 (ステップ 3)
- $E_{ij} + B_{ij} + C_{ij}, A_{ij}$ (BF),
 $E_{Nij} + B_{Nij} + C_{Nij}, F_{Nij} + A_{Nij}$ (NDF),
 $L_{ij} + M_{ij} + N_{ij}, K_{ij} + \alpha F_{Nij}$ (Burton-Miller) :
最下位レベル近傍セル群内の節点間影響関数 (ステップ 6)

それぞれの計算量を $\overline{C}_1, \overline{C}_3, \overline{C}_6$ とすると, 計算量は以下のように表される .

Eqs.(2.82, 2.83, 2.84) から ,

$$\overline{C}_1 \sim NK_L P \sim N(kD_L)^2 P \quad (2.112)$$

但し, P : 境界要素内の数値積分に必要な積分点数 (定数).

Eq.(2.89) から ,

$$\overline{C}_3^l \sim K_l N_c^l I' \sim (kD_l)^3 I' \quad (2.113)$$

但し, $I' \leq 7^3 - 3^3 = 316$: 予め $T_{\lambda_{m_l} \lambda_{m'_l}}$ を計算するために考慮すべきセル間の位置関係の組み合わせ数 (定数).

$$\overline{C}_6 \sim NMPR \quad (2.114)$$

但し, $R \leq 3^3 = 27$: 最下位レベルにおける近傍セル群の平均セル数 (定数).

前述の概算の設定条件における係数間の関係性を考慮すると, セットアップ部における全計算量は以下のように表される .

$$\begin{aligned} \overline{C} &\sim \overline{C}_1 + \sum_{l=2}^L \overline{C}_3^l + \overline{C}_6 \\ &\sim \overline{e}_1^a M^{\frac{2}{3}} N + \overline{e}_3^a N^{\frac{3}{2}} + \overline{e}_6^a MN \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$\sim \begin{cases} \overline{a}_3 N^3 + (\overline{a}_1 M^2 + \overline{a}_6 M) N & \text{for Type 1} \\ \overline{b}_3 N^{\frac{3}{2}} + (\overline{b}_1 + \overline{b}_6) MN & \text{for Type 2} \\ (\overline{c}_6 M + \overline{c}_1 M^{\frac{2}{3}} + \overline{c}_3) N & \text{for Type 3} \end{cases} \quad (2.116)$$

但し, $\overline{e}_i^a, \overline{a}_i, \overline{b}_i, \overline{c}_i$: 計算機及びプログラムに依存する係数. i は \overline{C}_i に関わる演算であることを表す .

上式で M が N に非依存, 即ち全節点数とは無関係に最下位レベルセル内の平均節点数を設定すると, N が十分大きい場合, 計算量はタイプ 1 で $O(N^3)$, タイプ 2 で $O(N^{3/2})$, タイプ 3 で $O(N)$ となる. このことから, 3 次元的な節点分布の場合が最も効率化されること, FMBEM により効率化されるためには, 解析対象の節点分布がある程度 2~3 次元の必要があることがわかる. また, タイプ 1, 2 において計算量のオーダーを決定して

いる演算部は $\overline{C_3^l}$ であることから，この部分の演算量を低減できれば，より効率的な計算が可能となる．

反復演算部の各ステップにおける計算量をステップ i に関して C_i と表すと以下の通りである．

ステップ 1 : Eq.(2.91) から，

$$C_1 \sim NK_L \sim N(kD_L)^2 \quad (2.117)$$

ステップ 2 : レベル l における計算量は，Eq.(2.92) から，

$$C_2^l \sim M_l K_l J Q \sim (2^l)^a (kD_l)^2 J Q \quad (2.118)$$

但し， $J \leq 8$: 1 セルが内包する，1 段下位レベルでの平均セル数， Q : 積分点の補間に必要な点数 (定数)．

ステップ 3 : レベル l における計算量は，Eq.(2.93) から，

$$C_3^l \sim M_l K_l I \sim (2^l)^a (kD_l)^2 I \quad (2.119)$$

但し， $I \leq 6^3 - 3^3 = 189$: 相互作用セル群の平均セル数 (定数)．

ステップ 4 : レベル l における計算量は，Eq.(2.94) から，

$$C_4^l \sim M_{l+1} K_{l+1} Q \sim (2^{l+1})^a (kD_{l+1})^2 Q \quad (2.120)$$

ステップ 5 : Eqs.(2.95, 2.101) から，

$$C_5 \sim NK_L \sim N(kD_L)^2 \quad (2.121)$$

ステップ 6 : Eqs.(2.96, 2.102) から，

$$C_6 \sim NMR \quad (2.122)$$

従って，反復演算部における全計算量は以下のように表される．

$$\begin{aligned} C &\sim T \left(C_1 + \sum_{l=2}^{L-1} C_2^l + \sum_{l=2}^L C_3^l + \sum_{l=2}^{L-1} C_4^l + C_5 + C_6 \right) \\ &\sim T \left((e_1^a + e_5^a) M^{\frac{2}{3}} N + e_6^a MN + (e_2^a + e_3^a + e_4^a) \left\{ \begin{array}{l} N^2 \\ N \log \left(\frac{N}{M} \right) \\ \frac{N^{\frac{2}{3}}}{M^{\frac{1}{3}}} \end{array} \right\} \right) \\ &\quad - T(e_2^a + e_3^a + e_4^a) \left\{ \begin{array}{l} MN \\ N \\ N^{\frac{2}{3}} \end{array} \right\} \\ &\sim \left\{ \begin{array}{ll} T(a_2 + a_3 + a_4)N^2 + T((a_1 + a_5)M^2 + (a_6 - (a_2' + a_3' + a_4'))M)N & \text{for Type 1} \\ T(b_2 + b_3 + b_4)N \log \frac{N}{M} + T((b_1 + b_5 + b_6)M - (b_2' + b_3' + b_4'))N & \text{for Type 2} \\ T(c_6M + (c_1 + c_5)M^{\frac{2}{3}} + \frac{c_2 + c_3 + c_4}{M^{\frac{1}{3}}})N - T(c_2' + c_3' + c_4')N^{\frac{2}{3}} & \text{for Type 3} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.123)$$

但し, T : 反復回数, $e_i^a, e_i'^a, a_i, b_i, c_i, a_i', b_i', c_i'$: 計算機及びプログラムに依存する係数. i は C_i に関わる演算であることを表す.

上式で M が N に非依存, 即ち全節点数とは無関係に最下位レベルセル内の平均節点数を設定すると, N が十分大きい場合, 計算量はタイプ 1 で $O(N^2)$, タイプ 2 で $O(N \log N)$, タイプ 3 で $O(N)$ となる. このことから, セットアップ部と同様, 3 次元的な節点分布の場合が最も効率化されること, FMBEM により効率化されるためには, 解析対象の節点分布がある程度 2~3 次元的存在である必要があることがわかる. また, タイプ 1, 2 において計算量のオーダーを決定している演算部は C_2^l, C_3^l, C_4^l であることから, この部分の演算量を低減できれば, より効率的な計算が可能となる.

全計算量はセットアップ部と反復演算部の和であり, タイプ 1 で $O(N^3)$, タイプ 2 で $O(N^{3/2})$, タイプ 3 で $O(N)$ となるが, セットアップ部の全体に占める割合が低い場合, オーダーはタイプ 1 で $O(N^2)$, タイプ 2 で $O(N \log N)$, タイプ 3 で $O(N)$ となる. また, 実際の音響問題においては, 微小領域における境界面は 2 次元的な形状とみなせるため, 十分下位レベルのセル内においては, タイプ 1, 3 の場合でも $M_l \approx (2^2)^l = 4^l$ が成立すると考えられる. 従って, 1 次元, 3 次元的な節点分布の場合でも, タイプ 2 の計算量に近くなる可能性がある. BEM の場合直接解法を用いた場合で $O(N^3)$, 反復解法を用いた場合でも $O(N^2)$ の計算量であることから, 少なくとも 2, 3 次元的な節点分布の場合には本手法によって大規模問題における大幅な低減効果が得られると考えられる.

2.6.3 必要記憶容量の評価

BEM が $N \times N$ からなる密行列を保持する必要があるのに対し, FMBEM では以下に示す係数を記憶するのみである.

- p_j 及び v_j に関して: $E_1 = 2N$
- $\alpha_{\lambda_{m'_L j}}$ 及び $\beta_{\lambda_{m'_L j}} + \gamma_{\lambda_{m'_L j}}$ に関して: $E_2 = 2NK_L \sim 2N(kD_L)^2$
- レベル l における $\xi_{m_l}, \tau_{m_l}, \zeta_{m_l}$ に関して: $E_3^l = 6M_l K_l \sim 6(2^l)^a (kD_l)^2$
- レベル l における $T_{\lambda_{m_l} \lambda_{m'_l}}$ に関して: $E_4^l = K_l I' \sim (kD_l)^2 I'$
- 最下位レベル近傍セル群内の節点間影響関数 $E_{ij} + B_{ij} + C_{ij}$ 及び A_{ij} (BF), $E_{Nij} + B_{Nij} + C_{Nij}$ 及び $F_{Nij} + A_{Nij}$ (NDF), $L_{ij} + M_{ij} + N_{ij}, K_{ij} + \alpha F_{Nij}$ (Burton-Miller) に関して: $E_5 = 2NMR$

従って、全必要記憶容量は以下のように表される．

$$\begin{aligned}
E &\sim E_1 + E_2 + \sum_{l=2}^L (E_3^l + E_4^l) + E_5 \\
&\sim m_1^a N + m_2^a M^{\frac{2}{3}} N + m_3^a \left\{ \begin{array}{c} N^2 \\ N \log \left(\frac{N}{M} \right) \\ \frac{N^{\frac{2}{3}}}{M^{\frac{1}{3}}} \end{array} \right\} + m_4^a \left\{ \begin{array}{c} N^2 \\ N \\ N^{\frac{2}{3}} \end{array} \right\} + m_5^a MN \\
&\quad - m_3'^a \left\{ \begin{array}{c} MN \\ N \\ N^{\frac{2}{3}} \end{array} \right\} \\
&\sim \begin{cases} (f_3 + f_4)N^2 + (f_2M^2 + (f_5 - f_3')M + f_1)N & \text{for Type 1} \\ g_3N \log \frac{N}{M} + ((g_2 + g_5)M + g_1 + g_4 - g_3')N & \text{for Type 2} \\ \left(h_5M + h_2M^{\frac{2}{3}} + h_1 + \frac{h_3}{M^{\frac{1}{3}}} \right) N + (h_4 - h_3')N^{\frac{2}{3}} & \text{for Type 3} \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.124}$$

但し、 $m_i^a, m_i'^a, f_i, g_i, h_i, f_i', g_i', h_i'$ ：計算機及びプログラムに依存する係数． i は E_i に関わる係数であることを表す．

前節と同様、上式で M が N に非依存とすると、 N が十分大きい場合、必要記憶容量はタイプ 1 で $O(N^2)$ 、タイプ 2 で $O(N \log N)$ 、タイプ 3 で $O(N)$ となる．このことから、計算量同様、3 次元的な節点分布の場合が最も効率化されること、FMBEM により効率化されるためには、解析対象の節点分布がある程度 2～3 次元的存在である必要があることがわかる．また、タイプ 1 において必要記憶容量のオーダーを決定している部分は E_3^l, E_4^l 、タイプ 2 においては E_3^l であることから、この部分の記憶容量を低減できれば、記憶容量をより効率化することが可能となる．BEM の必要記憶容量は $O(N^2)$ であることから、少なくとも 2, 3 次元的な節点分布の場合は大規模問題では計算量と同様に大幅な低減効果が得られると考えられる．

2.7 まとめ

本章では、本研究の基礎となる 3 次元音場のための FMBEM の解析アルゴリズムを具体的に構築した．

はじめに音場の基礎方程式について述べ、従来の BEM により、BF, NDF, Burton-Miller 法に基づく音場の定式化を行った．次に多重極展開の基礎理論について概説した後、BEM に高速多重極アルゴリズムを多段階に適用するための階層セル構造を導入し、これに基づく 6 ステップからなる要素間の影響評価構造について述べた．これらを踏まえ、3 次元音場基本解の多重極展開をもとに BEM の BF, NDF, Burton-Miller 法における各影響関数を FMBEM により再定式化し、FMBEM の具体的な数値計算アルゴリズムを提示した．

次に，FMBEM の効果を見積もるため，問題の自由度のオーダーで評価した計算効率の理論的概算を行った．無数の小散乱体を有する音場のように空間内に節点が 3 次元的に分布する場合には，本手法の計算量が $O(N)$ ，必要記憶容量が $O(N)$ となること，一般の建築空間のように空間内に節点が 2 次元的に分布する場合には，本手法の計算量が $O(N^{3/2})$ ，必要記憶容量が $O(N \log N)$ となることを明らかにし，従来の BEM に対する大幅な効率化が実現可能であることを示した．一方で節点が 1 次元的に分布する場合は，効率化されない可能性があることを示した．

手法の汎用化のためには，計算精度及び計算効率の両観点から多重極展開の数値的近似，及び階層セル構造に関わる各種設定を定める必要があり，これらについては第 4 章，第 5 章でそれぞれ詳細に検討する．

第 3 章

解析アルゴリズムの有効性の検証

3.1 はじめに

前章では、本研究の基礎となる 3 次元音場のための FMBEM の解析アルゴリズムを具体的に構築した。本章では、構築したアルゴリズムをコンピューターに実装し、FMBEM による数値解析を試行的に行うことで、アルゴリズムの有効性を計算精度及び計算効率の両観点から検証する。検討は理論解の既知な音響管の解析によるケーススタディを通して行う。

3.2 音響管解析による精度・効率の評価

音響管の解析により FMBEM の精度及び効率を評価する。精度に関しては、1 次元 Helmholtz 方程式による理論解、及び FMBEM と同じ反復解法を用いた BEM 解析の結果と比較することにより評価する。

3.2.1 解析方法

音響管 ($0.8 \times 0.8 \times 8$ m) と階層セル構造の関係を Fig.3.1 に示す。ケース 1 は音響管をルートセルの中央に配置した場合、ケース 2 はレベル 1 のセルの隅部に配置した場合である。境界条件としては、管の一端 ($x = 0$) をピストン振動する振動境界、他端 ($x = 8$) を比音響インピーダンス $z = 1$ の吸音境界、他の壁面を剛壁境界とする。境界要素として四角形一定要素を用い、要素サイズを解析波長の $1/10$ とする。Table 3.1 に節点数、要素サイズ、解析周波数の相互関係を示す。マトリクス方程式の反復解法としては、BEM、FMBEM 共に前処理なしの BiCGStab [66] を用いる。各種計算パラメータに関しては既往文献を参照し、レベル l での級数和打ち切り次数を $N_c^l = kD_l$ [52]、単位球面積分点

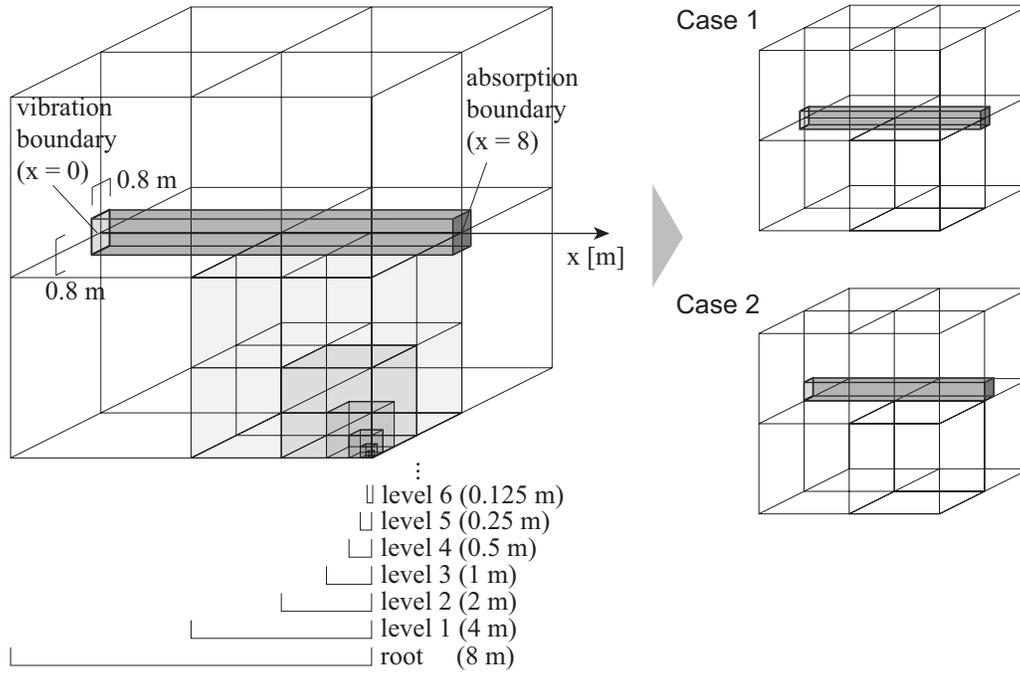


Fig. 3.1: Geometry of an acoustic tube and hierarchical cells in cases 1 and 2.

Table 3.1: Degree of freedom (DOF) N , the width of boundary elements and the analysis frequency for the acoustic tube analysis.

N	Element width [m]	Frequency [Hz]
378	0.2667	128.9
672	0.2000	171.9
1512	0.1333	257.8
2688	0.1000	343.7
6048	0.0667	515.6
10752	0.0500	687.4
24192	0.0333	1031.1

数 $K^l = 2(N_k^l)^2$ について $N_k^l = N_c^l$ [43], レベル間における積分点の補間法を Lagrange 補間として補間点数 $Q = 16$ を採用する. また, ここでは振動境界の節点数が全境界の節点数に比べて著しく少ないことから, Eq.(2.24) のマトリクス方程式における $A \cdot v$ の行列ベクトル積に関しては通常の BEM による計算とする.

3.2.2 結果と考察

計算精度

BEM 及び FMBEM による音響管内における音圧分布の解析結果を解析周波数ごとに Fig.3.2 ~ 3.8 に示す。BEM と FMBEM の解析結果は概ね一致している。しかしながら、FMBEM では解析周波数により誤差が異なること、階層セル構造の最下位レベル L によって誤差が変化することがわかる。また、ケースによっても精度が異なることから、解析対象のセル内における位置関係が精度に影響することがわかる。定量的な評価を行うため、振動面上における音圧について、理論解に対する振幅の相対誤差及び位相の誤差を Fig.3.9 に示す。最下位レベル L の増加に伴い誤差が増大する傾向が見られる。また、解析周波数により誤差が異なること、解析対象のセル内における位置関係が精度に影響することがわかる。これらの誤差は 3 次元音場基本解の多重極展開表現 Eq.(2.78) に現れる無限級数和や球面積分等の数値的扱いに由来するものであると考えられる。手法の実用化のためには、解析周波数、セル階層化レベル並びに解析問題のセル内の位置関係によらずに精度を確保する必要がある。そのためには多重極展開の数値的近似のための各種計算パラメータを適切に設定する必要がある。

計算量

セットアップ部 BEM 及び FMBEM 解析によるセットアップ部の計算時間をケースごとに Fig.3.10, Fig.3.11 に示す。ケースによる違いはほとんど見られない。FMBEM の階層化レベル L が 2 より大きい場合、BEM と比べ計算時間が短いことがわかる。また、階層化レベルの増加に伴い計算時間が短くなっている。

反復 1 回あたり BEM 及び FMBEM 解析による反復演算部の反復 1 回あたりの計算時間をケースごとに Fig.3.12, Fig.3.13 に示す。ケースによる若干の差異は見られるものの、傾向は類似している。BEM の計算時間は N^2 に比例して増加することがわかる。最下位レベルを固定した FMBEM では N の減少に伴い傾きが緩やかになり、 N の増加に伴い傾きが N^2 に近づく傾向が見られる。また、節点数の増加に伴い計算量を最適化するレベルも増加すること、各節点数において適切なレベルを設定することで多段階の FMBEM としては $O(N^{1.3})$ にまで低減されていることがわかる。本計算例では、ケース 1 では $N = 3000$ 付近から、ケース 2 では $N = 3000$ 付近から FMBEM による効率化がなされ

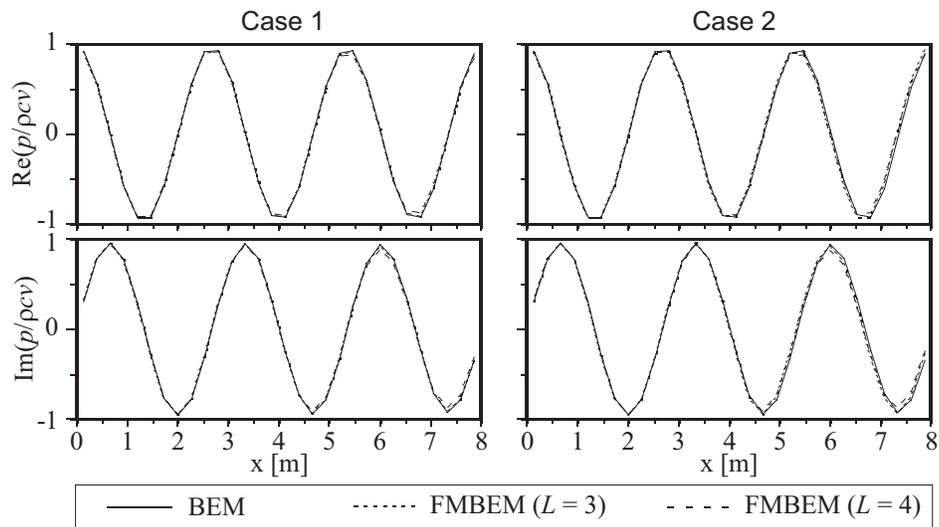


Fig. 3.2: Distribution of complex sound pressure in the tube at 128.9 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

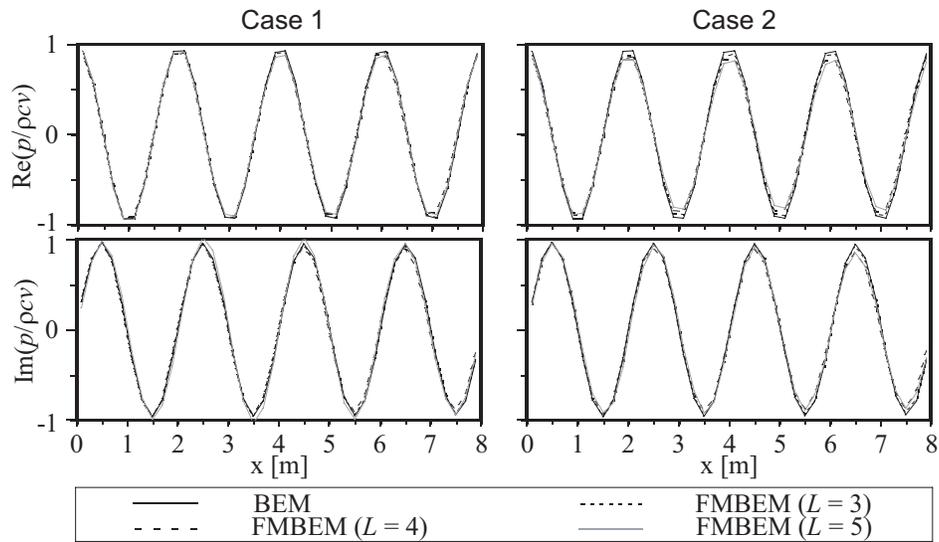


Fig. 3.3: Distribution of complex sound pressure in the tube at 171.9 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

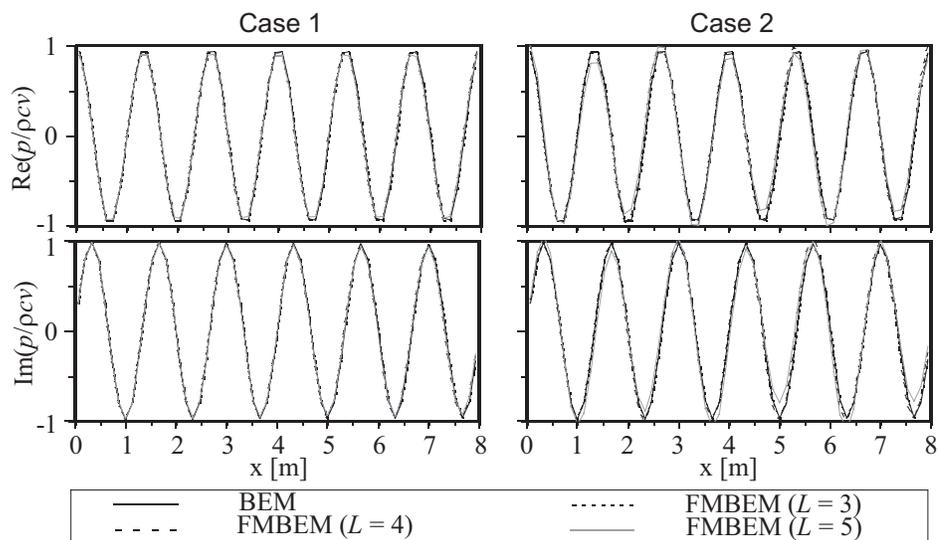


Fig. 3.4: Distribution of complex sound pressure in the tube at 257.8 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

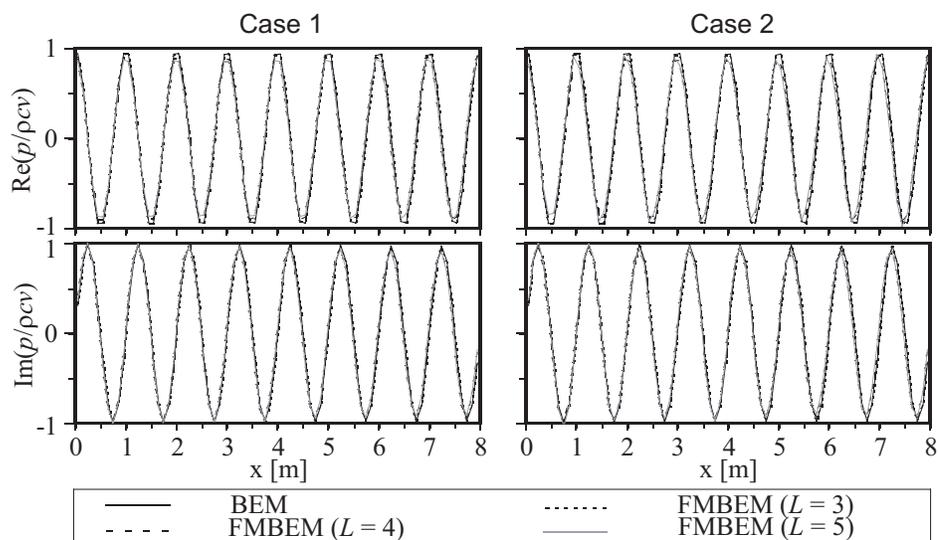


Fig. 3.5: Distribution of complex sound pressure in the tube at 343.7 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

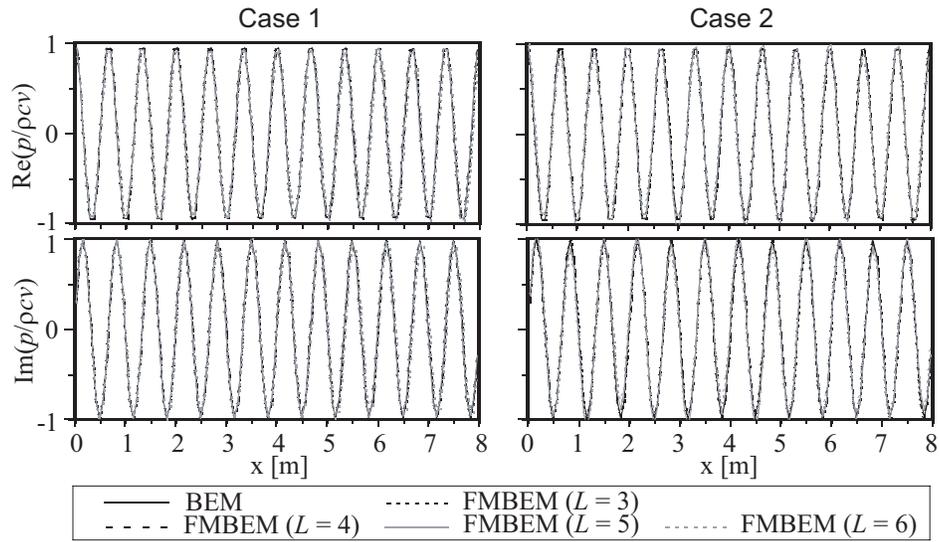


Fig. 3.6: Distribution of complex sound pressure in the tube at 515.6 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

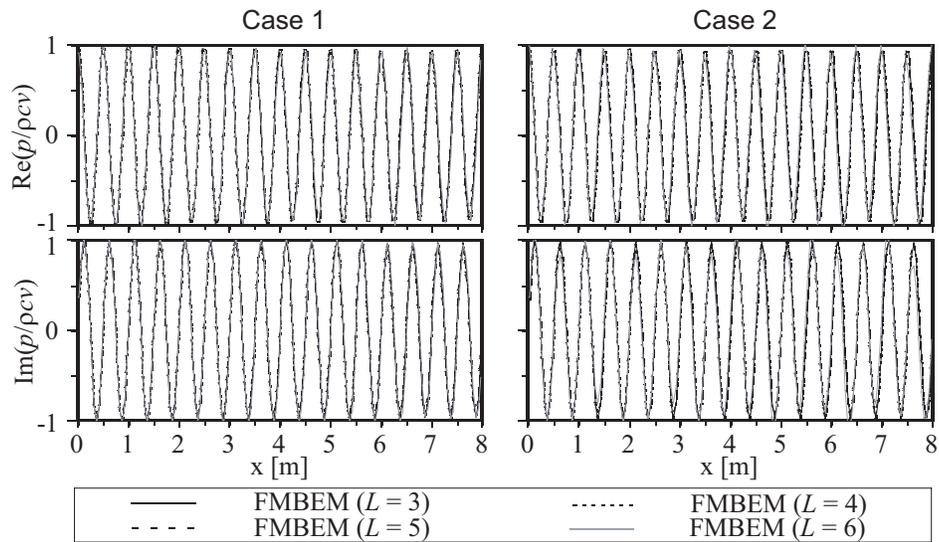


Fig. 3.7: Distribution of complex sound pressure in the tube at 687.4 Hz, obtained with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

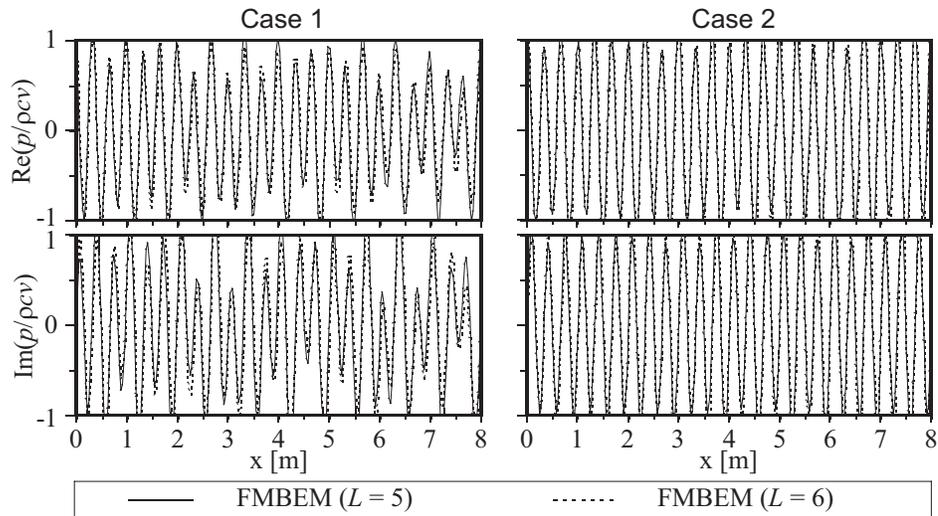


Fig. 3.8: Distribution of complex sound pressure in the tube at 1031.1 Hz, obtained with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

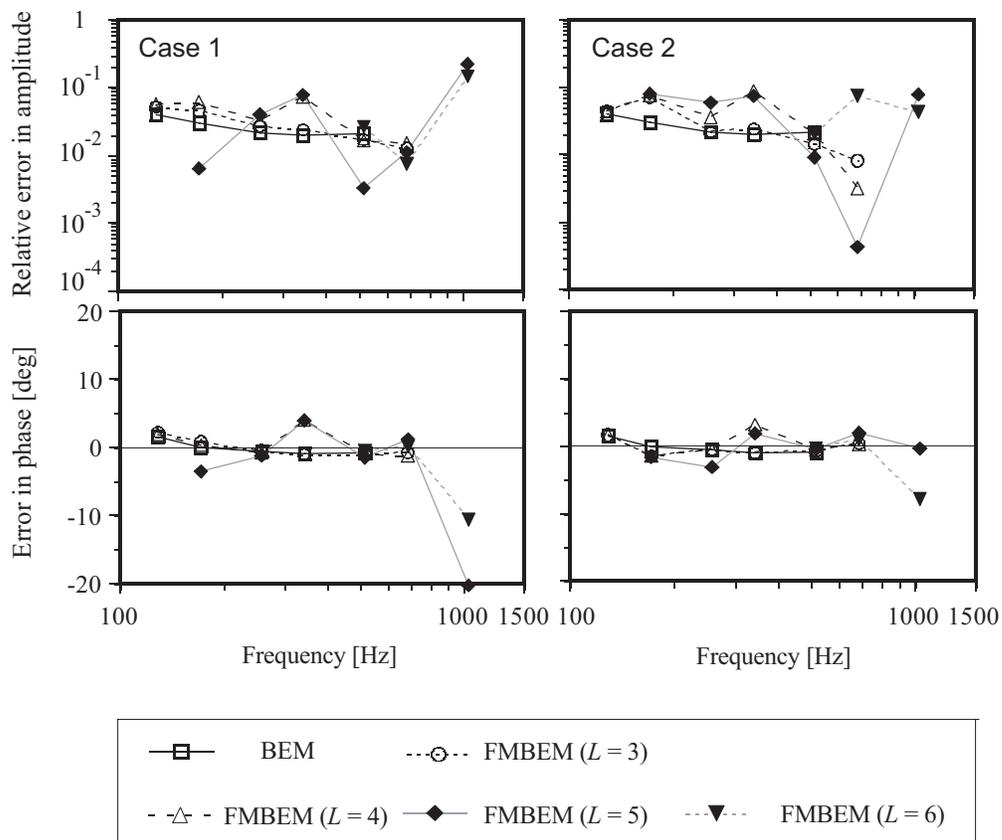


Fig. 3.9: Relative errors in magnitude and errors in phase of the radiation impedance ratio on the piston, obtained with the BEM and with the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

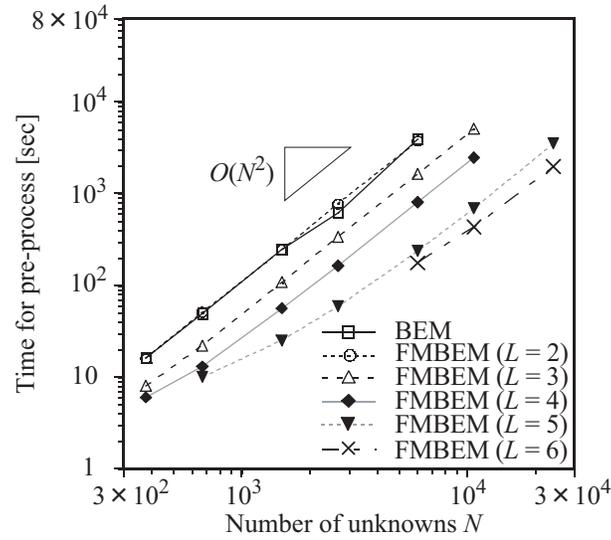


Fig. 3.10: Computational time for the pre-process of the BEM and of the FMBEM in case 1. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

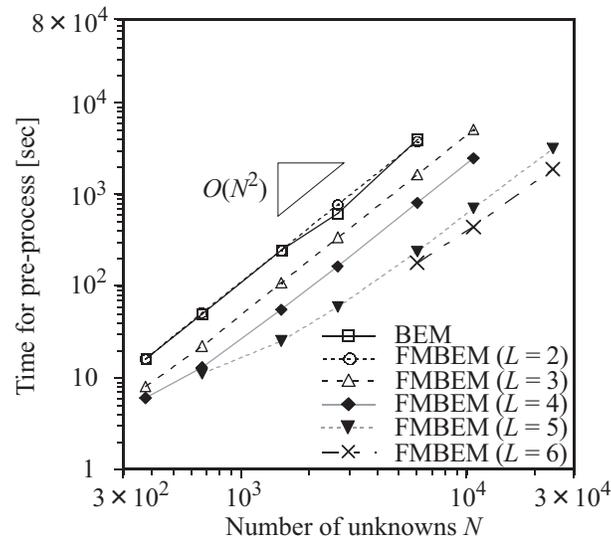


Fig. 3.11: Computational time for the pre-process of the BEM and of the FMBEM in case 2. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

ており，更なる大問題では BEM と比較して一層の効率化が期待できる．

反復演算部 BEM 及び FMBEM 解析による反復演算部全体の計算時間をケースごとに Fig.3.14, Fig.3.15 に示す．また，対応する反復回数をそれぞれ Fig.3.16, Fig.3.17 に示す．反復回数については，ケース 1 では BEM, FMBEM 共に節点数，即ち解析周波数による差が見られるが，FMBEM の階層化レベルによる差は見られない．一方ケース 2 では $L = 2, 3$ においてケース 1 と同傾向であるが，階層化レベルの増加に伴い反復回

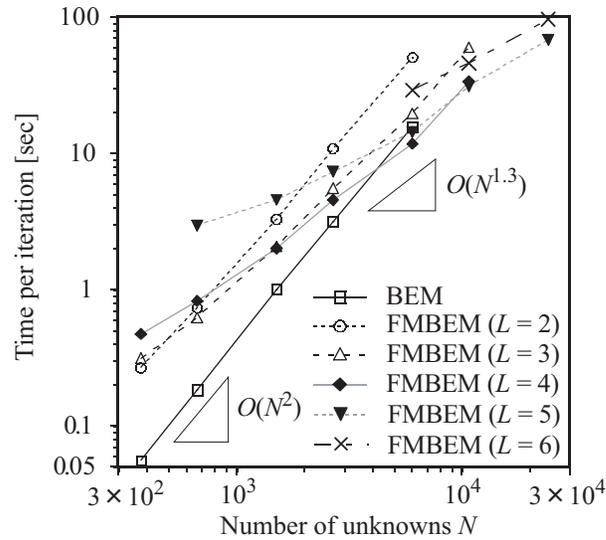


Fig. 3.12: Computational time per iteration for the BEM and for the FMBEM in case 1. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

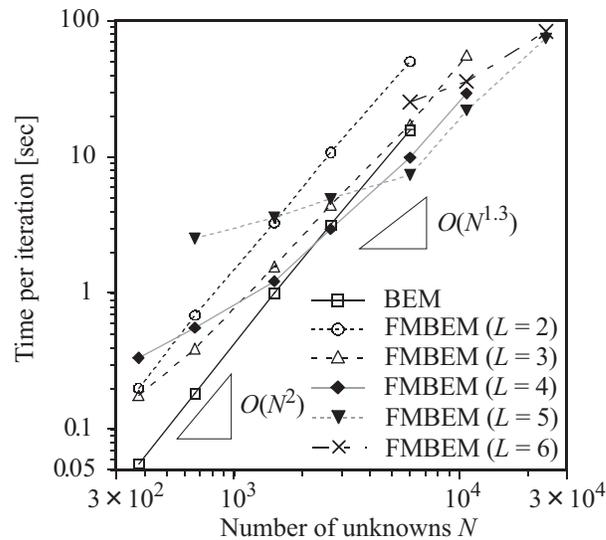


Fig. 3.13: Computational time per iteration for the BEM and for the FMBEM in case 2. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

数が増加する傾向が見られる。反復演算部全体の計算時間については、ケース 1, 2 とともに $N = 3000$ 付近から FMBEM による効率化がなされているが、反復回数の差を反映して反復 1 回あたりの場合と傾向が大きく異なっている。階層化レベルによる反復回数の違いは FMBEM の反復解法における行列ベクトル積の誤差に起因すると考えられる。誤差は多重極展開の数値的取扱いに起因するため、レベルによらず反復回数を安定させるためには各種計算パラメータの適切な設定により行列ベクトル積の誤差を低減する必要がある。

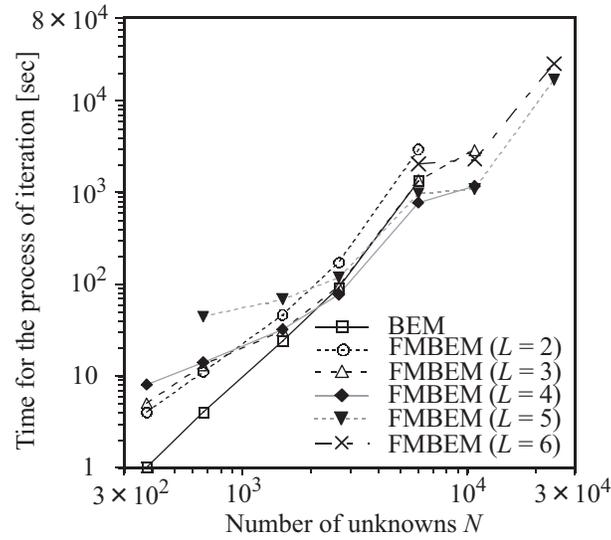


Fig. 3.14: Computational time for the process of iteration of the BEM and of the FMBEM in case 1. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

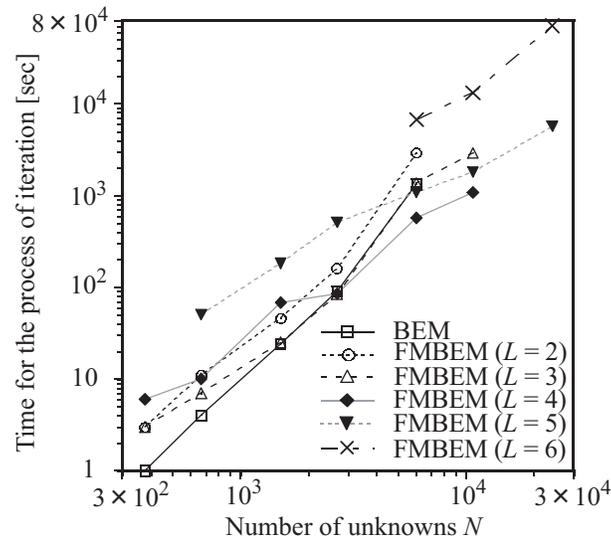


Fig. 3.15: Computational time for the process of iteration of the BEM and of the FMBEM in case 2. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

総量 BEM 及び FMBEM 解析による計算時間の総量をケースごとに Fig.3.18 ,Fig.3.19 に示す . 反復回数の違いを反映してケースによる差が顕著であり , 計算量を最適化するレベルも両者で異なっていることがわかる . このようなケースによる差はあるものの , 両ケースとも解析範囲全体に及んで多段階の FMBEM による計算時間の低減がなされている .

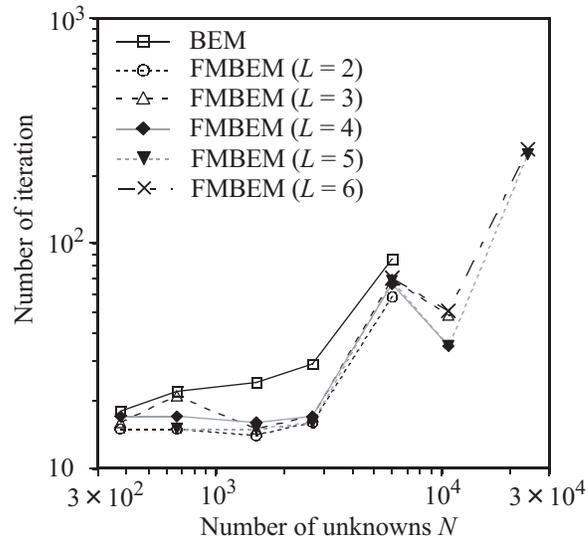


Fig. 3.16: The number of iteration of the BEM and of the FMBEM in case 1. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

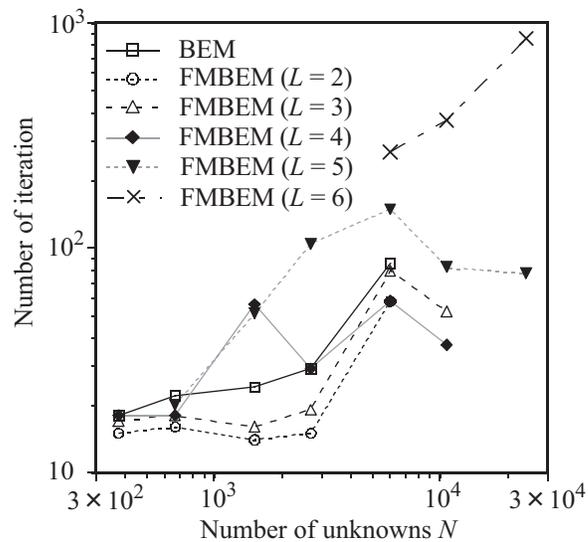


Fig. 3.17: The number of iteration of the BEM and of the FMBEM in case 2. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

必要記憶容量

BEM 及び FMBEM 解析による必要記憶容量の総量をケースごとに Fig.3.20, Fig.3.21 に示す. BEM では N^2 に比例して必要記憶容量が増加するのに対して, 最下位レベルを固定した FMBEM では, N が小さくなるにつれて傾斜が緩やかになり, N が大きくなる

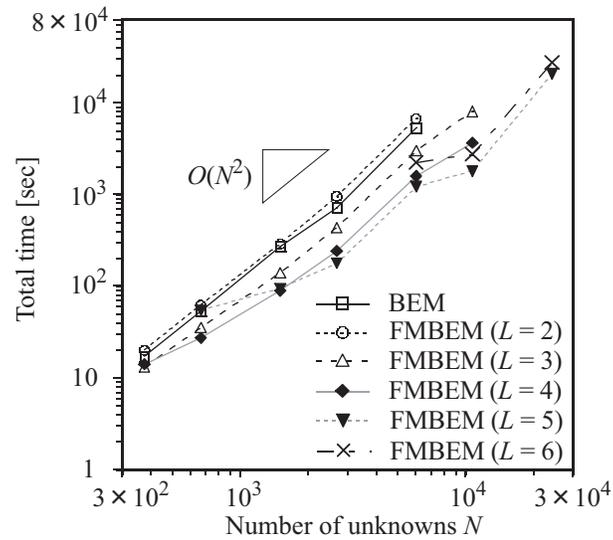


Fig. 3.18: Computational time for the total process of the BEM and of the FMBEM in case 1. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

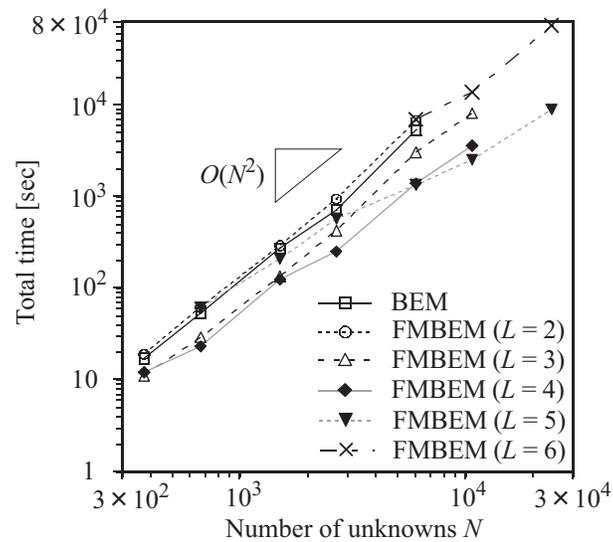


Fig. 3.19: Computational time for the total process of the BEM and of the FMBEM in case 2. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

につれて N^2 の傾斜に近づく傾向が見られる。また、必要記憶容量を最小化する最下位レベルが N によって異なっており、 N の増加に伴い最小化する L も増加することがわかる。本計算例の範囲では多段階の FMBEM で必要記憶容量は概ね $O(N)$ となっており、BEM と比べて大幅に低減されている。

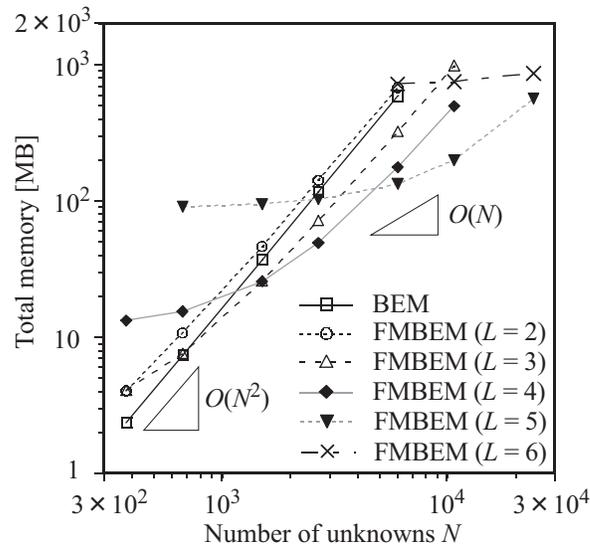


Fig. 3.20: Memory requirements for the BEM and for the FMBEM in case 1. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

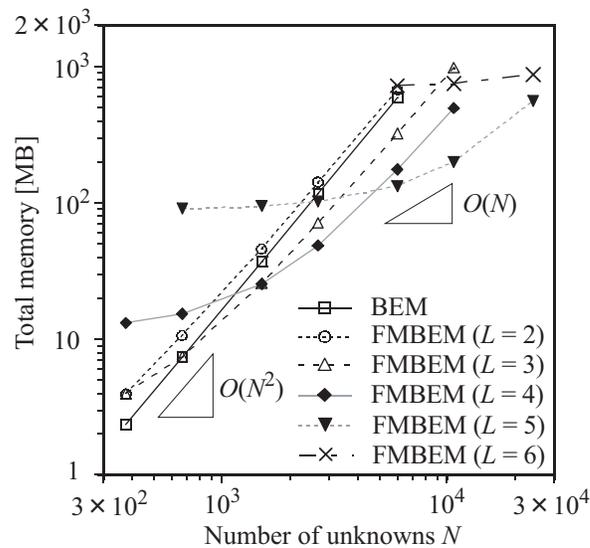


Fig. 3.21: Memory requirements for the BEM and for the FMBEM in case 2. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

3.3 まとめ

本章では、前章で構築した 3 次元音場のための FMBEM の解析アルゴリズムをコンピューターに実装し、理論解と比較可能な音響管解析に適用することでアルゴリズムの有効性を検証した。

解析にあたって、手法の実行に必要な各種計算パラメータは既往文献を参照して決定した。解析対象と階層セル構造の位置関係が異なる 2 ケースを設定し、節点数を変化させて影響を調べた。

計算精度に関しては、概ね理論解及び BEM 解析結果との良い対応が見られた。一方、解析周波数により誤差が異なること、階層セル構造の最下位レベルによって誤差が変化すること、解析対象のセル内における位置関係が精度に影響することがわかった。しかしながら、これらの結果はここでの計算パラメータの設定においてのものであり、適切な設定により解析問題や解析周波数、階層化レベルによらず実用上十分な精度が確保できると考えられる。

計算量に関しては、セットアップ部においては FMBEM の階層化レベルの増加に伴い計算時間が減少することがわかった。問題の節点数(自由度)を N とすると、反復演算部では、反復 1 回あたりで BEM の計算時間が $O(N^2)$ であるのに対し、多段階の FMBEM では $O(N^{1.3})$ にまで低減され、大幅な効率化が確認された。また、節点数の増加に伴い計算量を最適化するレベルも増加していくことが明らかになった。反復演算部全体では上記の傾向が薄れたが、これは解析周波数や解析対象のセル内位置により反復回数が大きく変化することが原因であった。解析対象のルートセル内位置による反復回数の違いは行列ベクトル積の誤差によるものであり、計算精度と同様、計算パラメータの適切な設定により改善が可能と考えられる。総計算量としては FMBEM により効率化されることが確認された。

必要記憶容量に関しては、BEM では $O(N^2)$ であるのに対し、多段階の FMBEM では概ね $O(N)$ となり、BEM と比べて大幅に低減されることが確認された。また、節点数の増加に伴い必要記憶容量を最適化するレベルも増加していくことが明らかになった。

第 4 章

多重極展開の設定条件に関する検討

4.1 はじめに

第 2 章では、本研究の基礎となる 3 次元音場のための FMBEM の解析アルゴリズムを具体的に構築したが、本手法を適用した数値計算を行うにあたっては、3 次元音場基本解の多重極展開表現における単位球面積分、相互作用セル群からの寄与変換係数における無限級数和において近似的な取り扱いが必要である。具体的には、以下の 3 項目の計算パラメータを定める必要がある。

- 単位球面積分分点数 $K = 2N_k^2$
(31 ページ Eq.(2.90) 参照)
- 相互作用セル群からの寄与変換係数 $T(\hat{\mathbf{k}})$ における無限級数和打ち切り次数 N_c
(30 ページ Eq.(2.89) 参照)
- レベル間における単位球面積分分点の補間・随伴補間点数 Q
(32 ページ Eq.(2.92), 33 ページ Eq.(2.94) 参照)

第 3 章では、多重極展開に関わる各種計算パラメータを既往文献を参照して設定し、第 2 章で構築した FMBEM の解析アルゴリズムを音響管解析に適用したが、計算精度、計算効率の両面で手法が十分有効なことを示すと同時に、計算パラメータの不適切な設定の下では解析周波数やセル階層化レベル、あるいは解析対象のセル内における位置関係が精度や反復解法の反復回数に及ぼす影響が大きいことを明らかにした。FMBEM で任意形状、任意規模の問題を扱うためには、これらに依存せずに十分高精度かつ高効率となる計算パラメータを設定する必要がある。

無限級数和打ち切り回数については、打ち切りに伴う多重極展開の誤差を理論的に概算するための研究がなされているほか [49, 64]、打ち切り回数設定のための経験式がいくつ

か提案されている [43, 25, 47] . これらの経験式はいずれも定数が異なるのみの類似した式であり, またセルサイズのみ依存する式であることから簡便なものといえるが, 一方で変換行列の対角化を施す前の従来の多重極展開表現に対して提案されていたり, 対角化後の多重極展開に対して用いている場合も十分な記述がない場合が多く, その設定基準, 適用基準は曖昧なものとなっている. この問題に対して Rahola[67] は, 上記の設定式を対角化を施す前の従来の多重極展開のためのものとして扱った上で, 対角化を施した多重極展開においては球面積分の数値的取り扱いが更なる誤差要因となること, 対角化前の多重極展開においては打ち切り次数増加に伴う球 Bessel 関数の指数関数的な減少により展開級数が収束を見せるのに対し, 対角化後の多重極展開においては打ち切り次数が増加すると球面積分で用いる最小値がマシン精度のオーダーとなり, 球 Bessel 関数がそれ以下の値をとることから数値的誤差増大の原因となる可能性があることを述べている. このような数値的誤差まで含めた検討は数値解析により十分検証されたとは言えない.

単位球面積分点数については, 級数和打ち切り次数との関係で積分点数を決定する必要がある [44, 43, 47] . MLFMA の場合, 上位レベルのセルに影響を集積するにあたっては, セルサイズの増加により必要となる打ち切り次数が増加することから, 必要な積分点数が増加する. このため, 上位レベルセルに影響を集積する際は積分点数を補間し, 下位レベルセルに影響を分配する際は間引く必要がある. これには高速 Fourier 変換 (FFT) による方法 [48, 64] や, Lagrange 補間と随伴補間 [65] を用いる方法 [25, 47] が知られている. 前者は精妙な方法であるが, 各レベルで $O(N_c^2 \log N_c)$ の計算量が必要となり, 上位レベルに行くに従い N_c の増加により計算量が増大する欠点がある. 一方後者はシンプルな方法であるが, プログラミングが容易なことと, 特に上位レベルにおいて前者より少ない点数で補間できる可能性があり, 効率面でのメリットが高い. 本章では後者の方法を前提として議論を進めるが, ここで適切な補間点数の設定が課題となる.

以上の背景から, 本章では, 多重極展開を数値計算上近似的に取り扱うための各種計算パラメータについて, 数値解析によるケーススタディを通じた精度及び効率の両観点からの検討を行い, 具体的な設定条件を提案する. まず, 本手法の基礎となる 3 次元音場基本解の多重極展開について, 厳密解との比較による精度の検討を通して, 解析周波数及び本手法で想定され得る多重極展開点の位置関係によらず高精度となる各種設定条件を具体的に決定する. 次に上記設定を用いた FMBEM による数値解析を行い, 第 2 章で示した BF, NDF, Burton-Miller 法の各定式化について計算精度及び計算効率の観点から設定条件の妥当性を検証する.

4.2 1 段階多重極展開における検討

本節では，3次元音場基本解の1段階多重極展開表現に関する精度評価を通して，単位球面積分分点数及び級数和打ち切り次数の設定について検討する．また，以降の精度評価については，音場の性格を決定する波数 k と領域の代表長としてのセルを内包する球の直径 D とを掛け合わせた無次元量 kD との関係で行うものとする．

4.2.1 解析方法

3次元音場基本解の1段階の多重極展開表現である Eq.(4.1) (Eq.(2.77) と同一) に関して，厳密解 Eq.(2.9) との比較により精度を検討する．

$$G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) = \frac{jk}{16\pi^2} \oint E_{pL}(\mathbf{k}) T_{LM}(\hat{\mathbf{k}}) E_{Mq}(\mathbf{k}) d\hat{\mathbf{k}} \quad (4.1)$$

但し，次式で表される $T_{LM}(\hat{\mathbf{k}})$ における無限級数和の打ち切り次数を N_c とする (Eq.(2.89) と同一)．

$$T_{LM}(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{l=0}^{N_c} j^l (2l+1) h_l^{(1)}(kr_{LM}) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{LM}) \quad (4.2)$$

単位球面積分に関しては， θ 方向に対して Gauss-Legendre 求積法， φ 方向に対して台形公式を適用し，次式により算出する (Eq.(2.90) と同一)．

$$\begin{aligned} \oint f(\hat{\mathbf{k}}) d\hat{\mathbf{k}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \sum_{i=1}^{N_k} \sum_{j=1}^{2N_k} w_i^g w_j^c f(\theta_i, \varphi_j) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Fig.4.1 に示すセルの位置関係を想定し，ケーススタディを行う．各セルは立方体とし，セル N ， F はセル S の相互作用セル群に属する．あるセルとその相互作用セルとの位置関係の中で，セル S と N は最も近い場合，セル S と F は最も遠い場合であり，この両配置における精度の挙動を調べることで評価を十分なものにできると考えられる．各セル中心点 M ， L はそれぞれ多重極展開点，局所展開点である．各セル内の点 p ， q の位置に応じた3ケースを設定し，Eq.(4.1) を数値評価する．

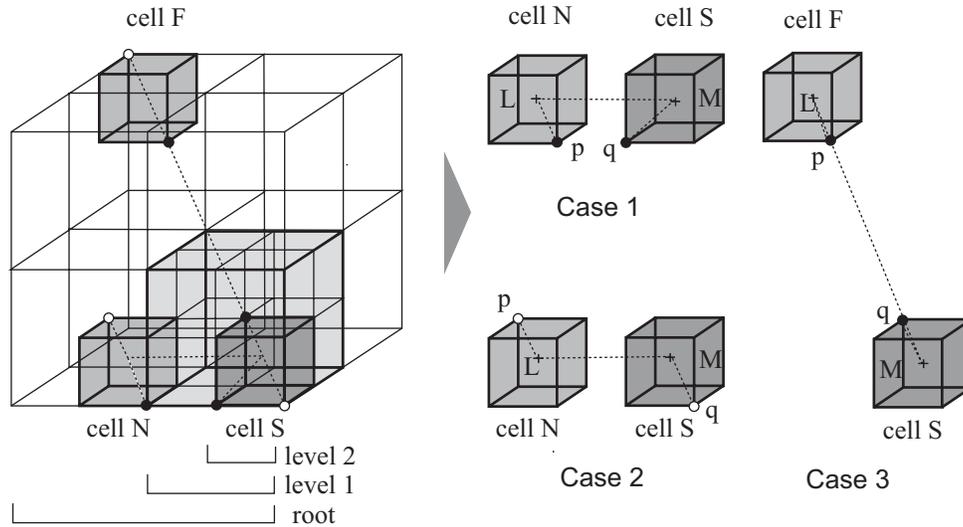


Fig. 4.1: Geometry of cells (S, N, and F) and points (p, q, L, and M) in cases 1, 2, and 3.

4.2.2 結果と考察

単位球面積分点数

N_c , kD を固定し, 単位球面積分点数 N_k を変化させた場合の基本解の振幅の相対誤差及び位相の誤差を Fig.4.2 に示す. 但し, $D (= \sqrt{3}d)$ は各セルを包含可能な球の直径, d はセル 1 辺の長さである. $kD = 7.9$ ($d = 1$ [m] のときの 250 Hz に相当), $kD = 31.7$ ($d = 1$ [m] のときの 1000 Hz に相当) の場合のそれぞれについて $N_k = N_c$ となる値を合せて表示する. セルの位置関係や kD によらず, $N_k \geq N_c$ では振幅及び位相の誤差が十分 0 に収束することがわかる [43]. これを踏まえ, 以降の検討では N_k に関して次の設定式を採用することとする.

$$N_k = N_c \quad (4.4)$$

無限級数和打ち切り次数

精度に対する kD と N_c の影響を見るため, $N_k = N_c$ として打ち切り次数 N_c を変化させた場合の基本解の振幅の相対誤差及び位相の誤差を Fig.4.3 に示す. 収束には $N_c > kD$ が必要条件であること [43], セル及び点 p, q の位置関係が精度に大きく影響を及ぼすことがわかる. 次に, N_c , kD を共に変化させた場合の基本解の振幅の相対誤差及び位相

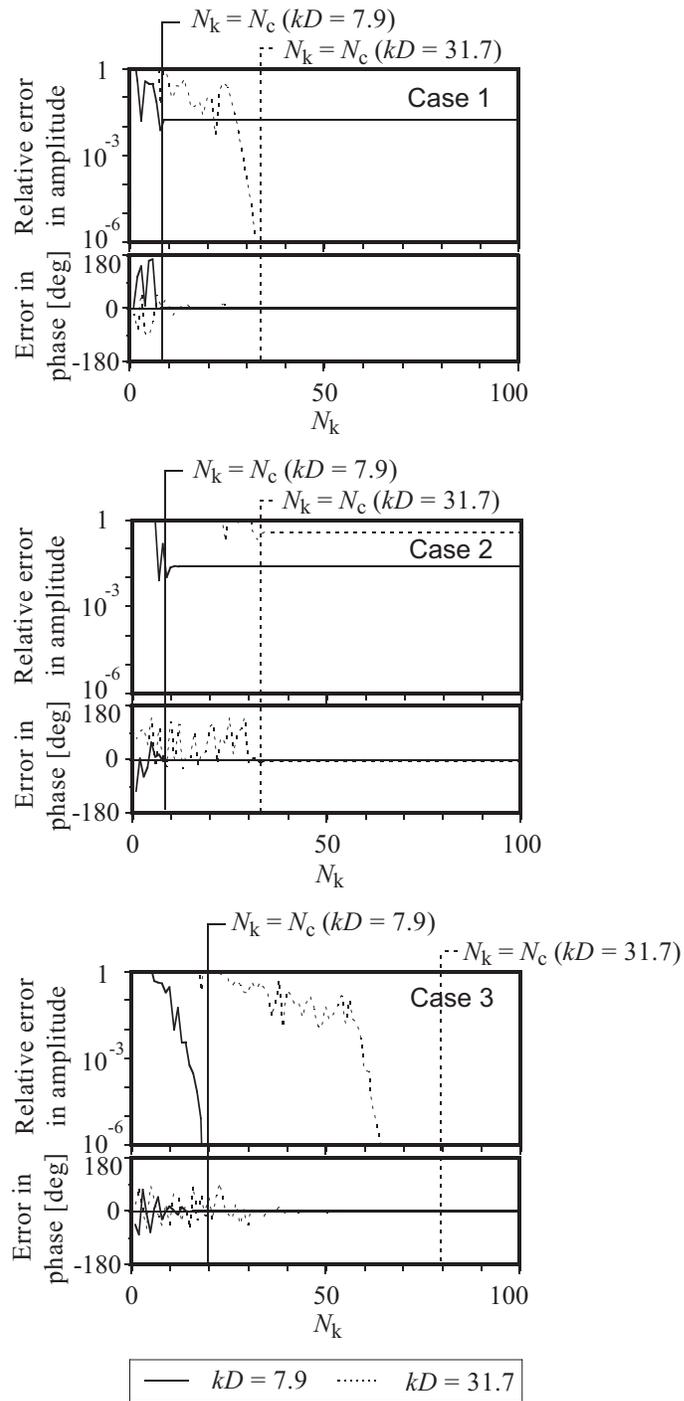


Fig. 4.2: Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA, under two conditions for kD and N_c .

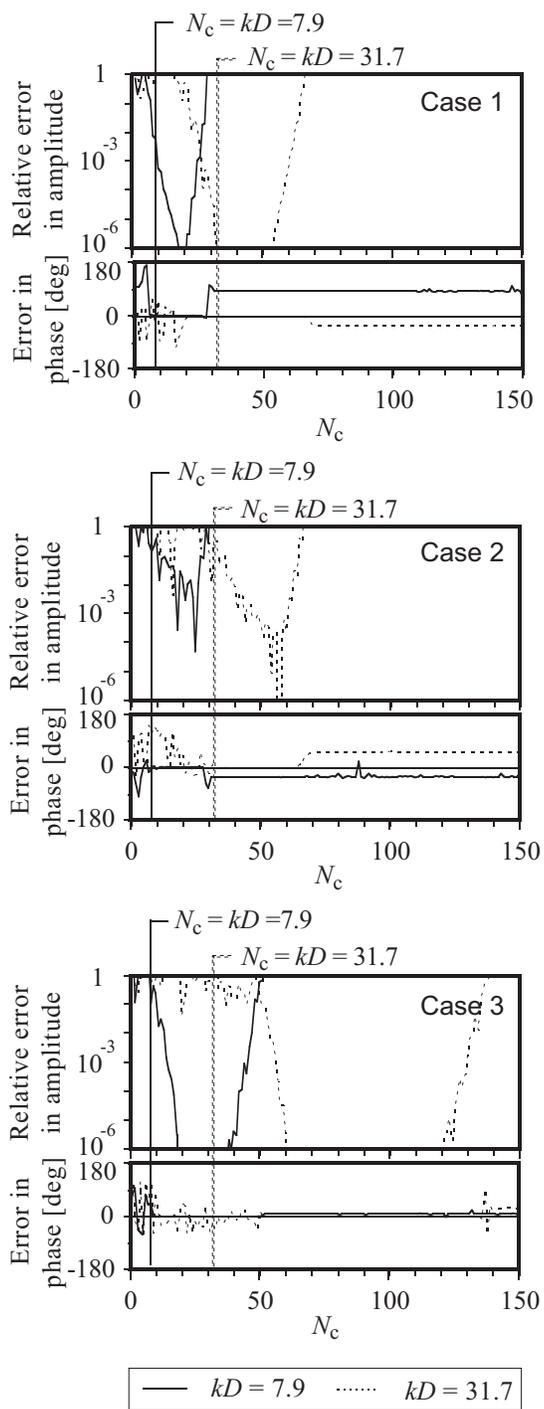


Fig. 4.3: Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA, under two conditions for kD . $N_k = N_c$.

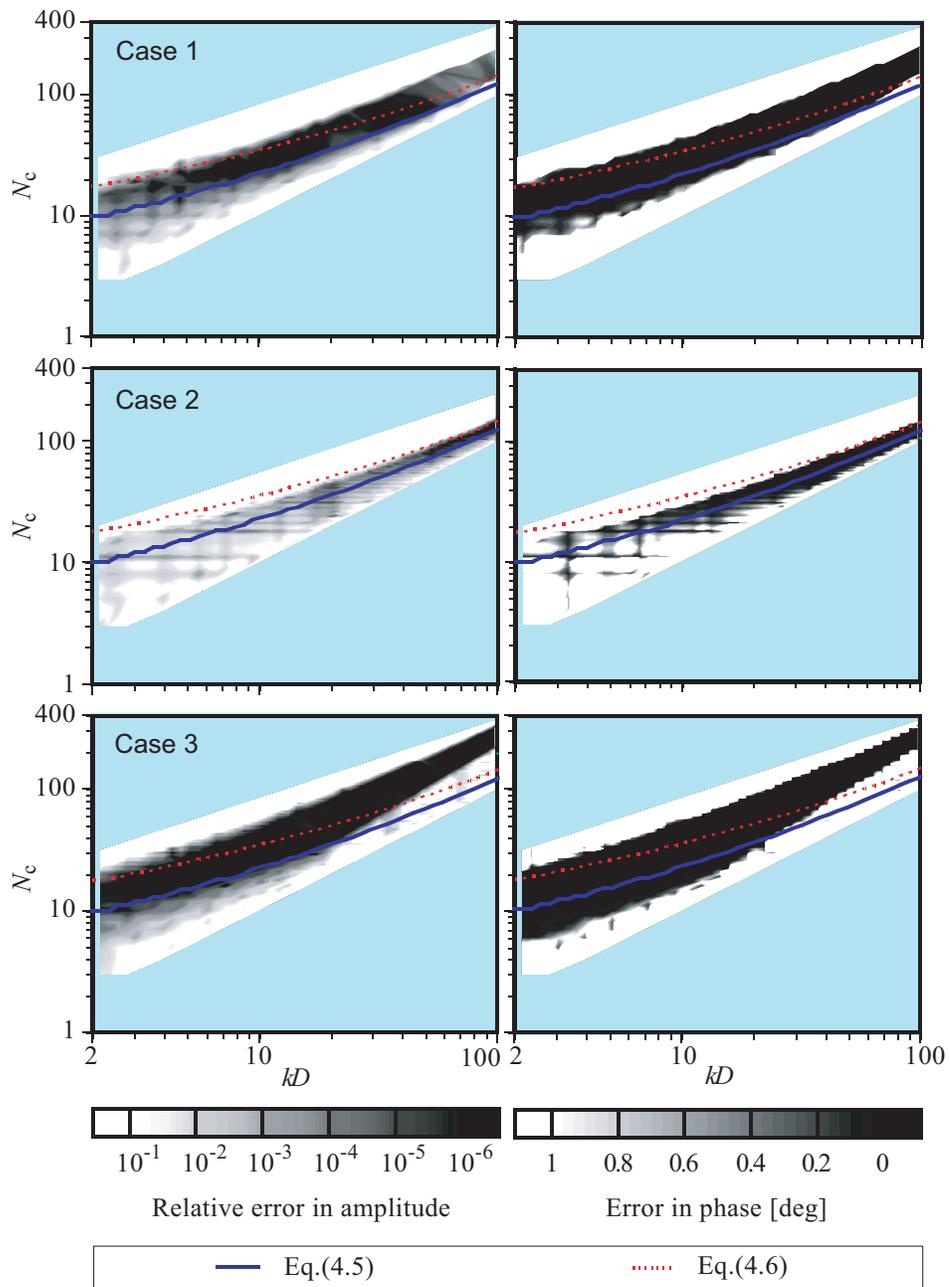


Fig. 4.4: Two formulae for N_c , overlaid on contour maps of relative errors in magnitude and of errors in phase obtained with the FMA.

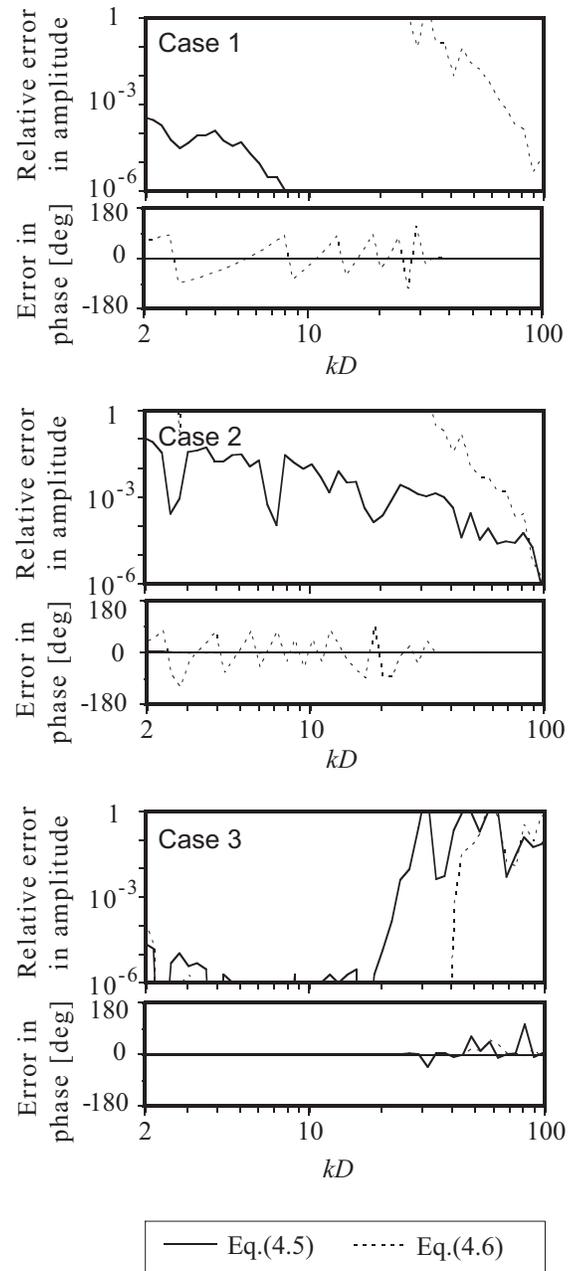


Fig. 4.5: Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA, under two conditions for N_c .

の誤差の分布を Fig.4.4 に示す． N_c を以下の Eqs.(4.5, 4.6) により規定した場合のグラフを重ねて表示する．

$$N_c = \lfloor kD + 5 \ln(kD + \pi) \rfloor + 1 \quad (4.5)$$

$$N_c = \lfloor kD + 10 \ln(kD + \pi) \rfloor + 1 \quad (4.6)$$

但し， $\lfloor \cdot \rfloor$: \cdot の整数部．

Eqs.(4.5, 4.6) は R.Coifman *et al.* のそれぞれ単精度，倍精度における推奨式である [43]．また， N_c を Eqs.(4.5, 4.6) により規定し kD を変化させた場合の振幅の相対誤差及び位相の誤差を Fig.4.5 に示す．Fig.4.4 の誤差分布を見ると，いずれのケースにおいても N_c が大きすぎると誤差が増大していることがわかる．これは第 1 節にて述べたように，変換行列の対角化に起因する数値的誤差の影響と考えられる．ケース間で比較すると，各ケースにより精度が大きく異なっており，セルの位置関係の影響が大きいことがわかる．また，高精度となる範囲の分布状況については，観測点 p がセル N に含まれるケース 1, 2 が類似し，観測点 p がセル F に含まれるケース 3 のみ大きく異なることがわかる．このことから，高精度の分布範囲に関してはセル同士の位置関係が大きく影響し，各セル内の点 p , q によらないことが示唆される．一方，Fig.4.5 及び Fig.4.4 の N_c を規定した場合のグラフを見ると，Eq.(4.5) ではケース 3 における広範囲な精度低下，ケース 3 における kD の大きい範囲での精度低下が見られ，Eq.(4.6) ではケース 3 における kD の大きい範囲での精度低下が見られる．Eqs.(4.5, 4.6) はセル同士の位置関係を考慮していない式であり，周波数と共にセルの位置関係を反映した N_c の設定式が必要であると言える．

以上の結果を踏まえ，セルの位置関係を反映した場合の N_c 経験式を設定した．ここではセル中心点間距離 r_{LM} を導入している．

$$N_c = \lfloor k(D + r_{LM})/2 + 5 \ln(kD + \pi) \rfloor + 1 \quad (4.7)$$

N_c , kD を変化させた場合の基本解の振幅の相対誤差及び位相の誤差の分布を Fig.4.6 に示す． N_c を Eqs.(4.5, 4.6, 4.7) により規定した場合のグラフを重ねて表示する．また， N_c を Eqs.(4.5, 4.6, 4.7) により規定し kD を変化させた場合の振幅の相対誤差及び位相の誤差を Fig.4.7 に示す．Fig.4.6 から， N_c を Eq.(4.7) で規定した場合はケース及び kD によらず高精度であることがわかる．Fig.4.7 から，Eqs.(4.5, 4.6) のときの精度低下が Eq.(4.7) では改善されていることがわかる．FMBEM で 1 段階多重極展開しか用いない場合，即ちセルの階層化レベルが $L = 2$ の場合は，上式を用いて高精度な予測が可能であると考えられる．

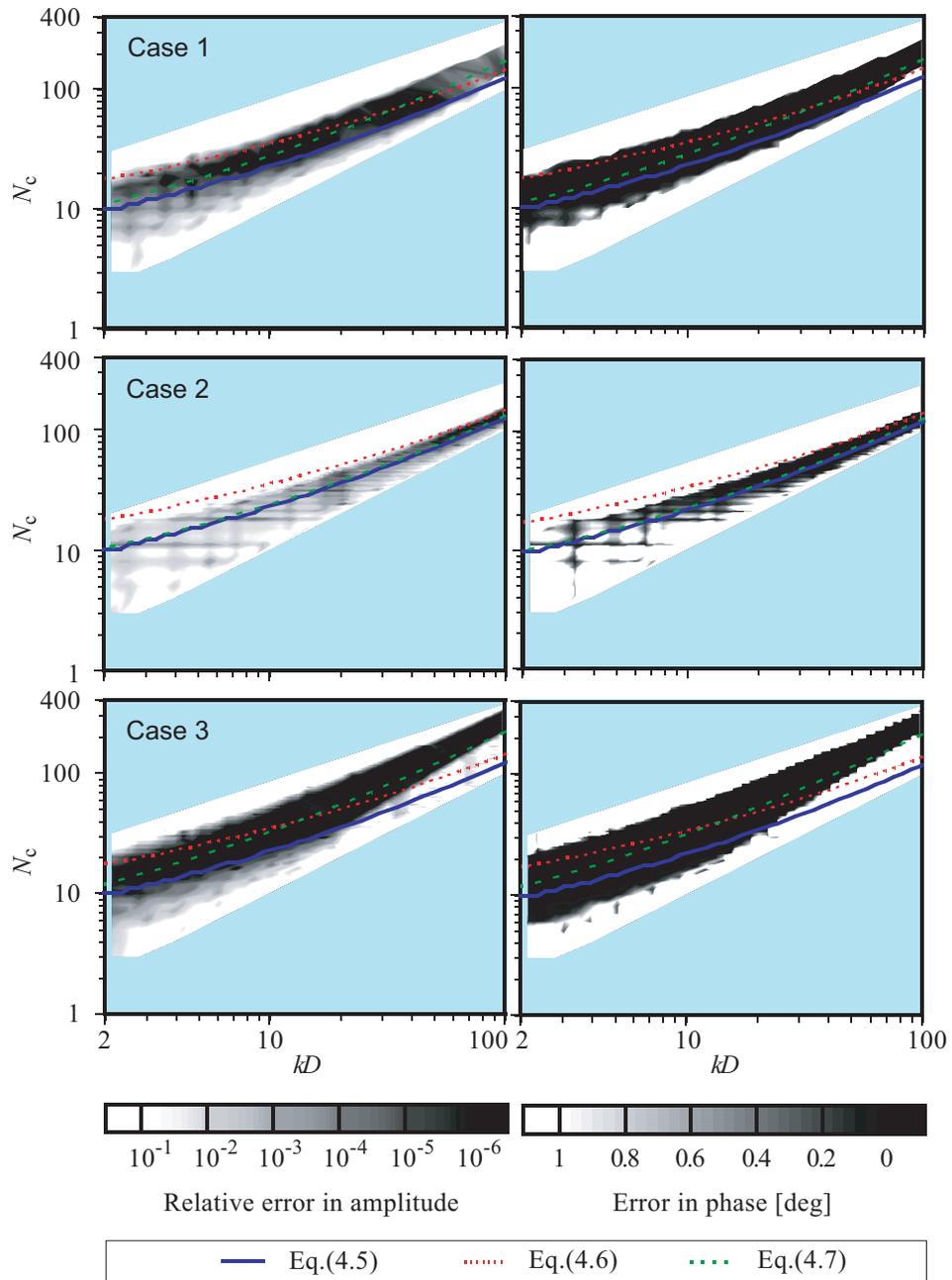


Fig. 4.6: Three formulae for N_c , overlaid on contour maps of relative errors in magnitude and of errors in phase obtained with the FMA.

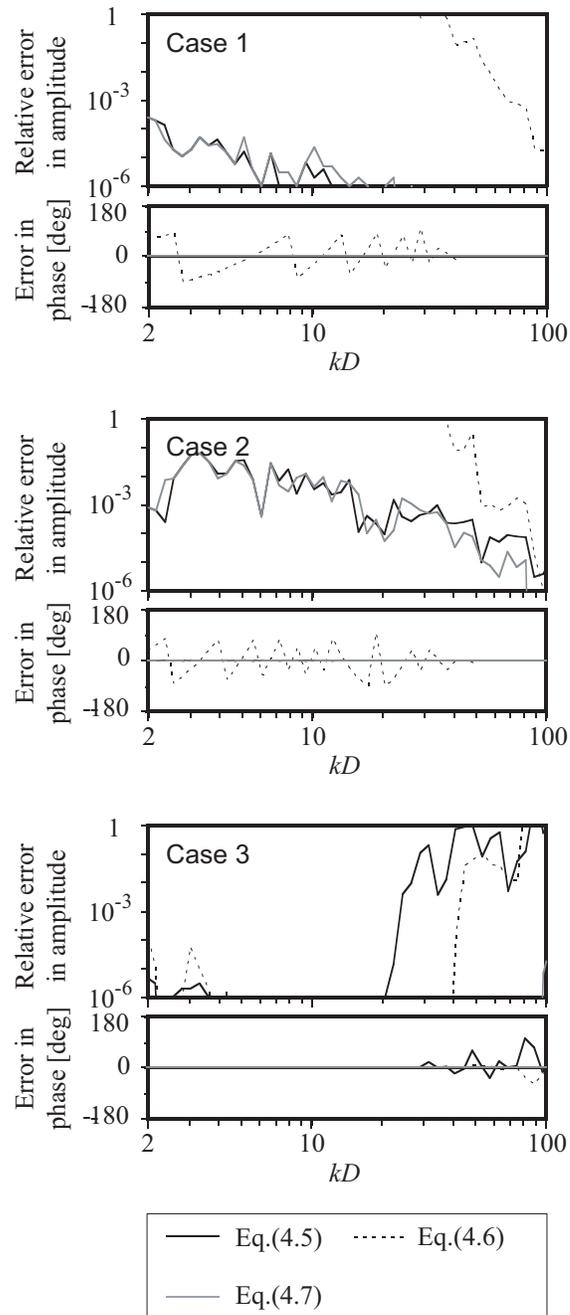


Fig. 4.7: Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA, under three conditions for N_c .

4.3 多段階多重極展開における検討

本節では，3次元音場基本解の多段階多重極展開表現に関する精度評価，及び音響管の FMBEM 解析による精度評価を通して，級数和打ち切り次数及びレベル間における球面積分点の補間・随伴補間のための点数の設定について検討する．打ち切り次数については多段階化に対応した設定式について検討し，補間・随伴補間については Lagrange 補間を前提として [47] 補間点数の検討を行う．

4.3.1 解析方法

多重極展開表現による精度評価

3次元音場基本解の多段階の多重極展開表現である Eq.(4.8) に関して，厳密解 Eq.(2.9) との比較により精度を検討する．

$$G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) = \frac{jk}{16\pi^2} \oint E_{p\lambda_{m_L}}(\mathbf{k}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m_{l+1}}\lambda_{m_l}}(\mathbf{k}) \cdot T_{\lambda_{m_I}\lambda_{m'_I}}(\hat{\mathbf{k}}) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m'_l}\lambda_{m'_{l+1}}}(\mathbf{k}) E_{\lambda_{m'_L}q}(\mathbf{k}) d\hat{\mathbf{k}} \quad (4.8)$$

Fig.4.8 に示すセルの位置関係を想定し，ケーススタディを行う．ルートセルは点 p, q を内包し，8分木構造により階層化される．レベル2に属するセル N, F はセル S の相互作用セル群に属し，それぞれ内部に下位セル（レベル3，レベル4）を持つ．点 p, q の位置に応じた2ケースを設定する．なお，各点の位置に関しては，予備的なスタディを通して最も精度が劣化する場合を選定している．各セル中心点 M, L をそれぞれ多重極展開点，局所展開点とし，レベル2まで（1段階多重極展開，補間無し），レベル3まで（2段階多重極展開，補間1段），レベル4まで（3段階多重極展開，補間2段）階層化した場合を考え，多段階化における補間点数 Q と打ち切り次数 N_c による精度への影響を調べる．

音響管解析による精度評価

FMBEM の手法全体としての精度を確認するため，音響管の解析を行う．音響管（ $0.8 \times 0.8 \times 8 \text{ m}$ ）と階層セル構造の関係を Fig.4.9 に示す．境界条件としては，管の一端（ $x = 0$ ）をピストン振動する振動境界，他の壁面を剛壁境界とする．境界要素として四角形一定要素を用い，要素サイズを解析波長の7分の1とする．マトリクス方程式の反復解

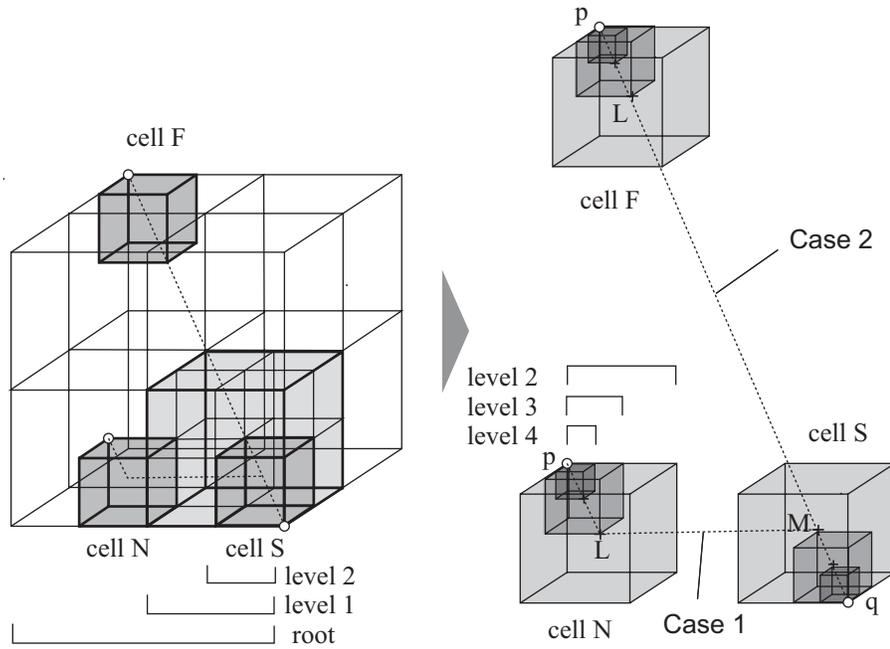


Fig. 4.8: Geometry of cells and points in cases 1 and 2.

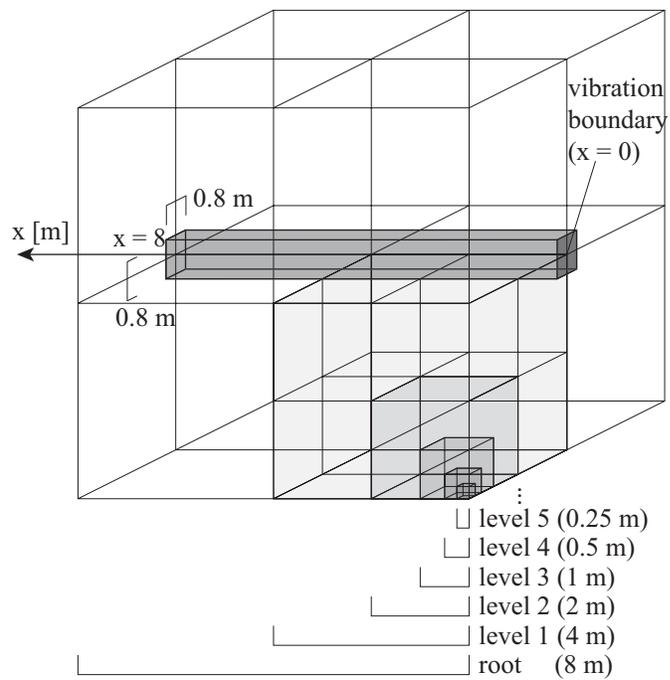


Fig. 4.9: Geometry of an acoustic tube and hierarchical cells.

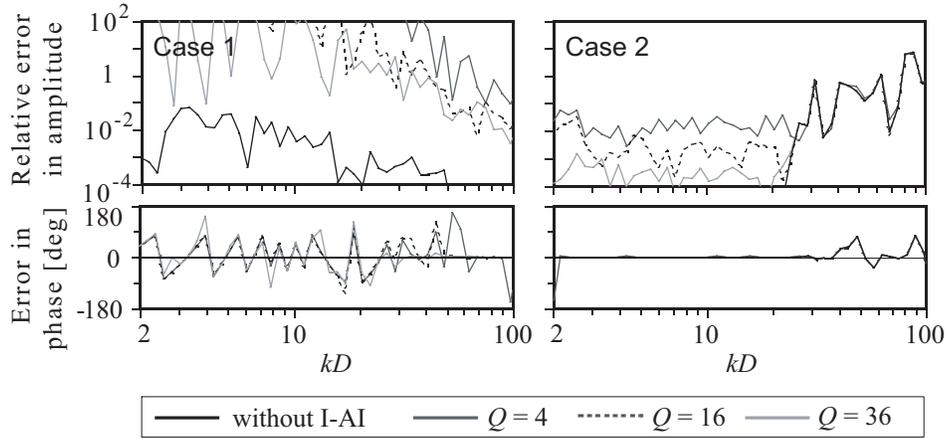


Fig. 4.10: Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA. N_c is given by Eq.(4.5). I-AI denotes interpolation and adjoint interpolation.

法として前処理なしの BiCGStab[66] を用いる。また，ここでは振動境界の節点数が全境界の節点数に比べて著しく少ないことから，Eq.(2.24) のマトリクス方程式における $A \cdot v$ の行列ベクトル積に関しては通常の BEM による計算とする。

4.3.2 結果と考察 –2 段階多重極展開（補間 1 段）の場合–

ここでは階層セル構造をレベル 3 まで階層化した場合，即ち 2 段階多重極展開（補間 1 段）の場合について結果及び考察を述べる。

多重極展開表現による精度評価

N_c を Eq.(4.5, 4.6, 4.7) 及び次の Eq.(4.9) により規定したときの補間点数 Q と基本解の精度の関係を Fig.4.10, 4.11, 4.12, 4.13 にそれぞれ示す（上図：振幅の相対誤差，下図：位相の誤差）。

$$N_c = \lfloor kD + \ln(kD + \pi) \rfloor + 1 \quad (4.9)$$

但し，補間点数 Q については以下の 3 式を設定した。

$$Q = 4 \quad (4.10)$$

$$Q = 16 \quad (4.11)$$

$$Q = 36 \quad (4.12)$$

補間点数 N_c が Eq.(4.5) の場合（Fig.4.10）のケース 2 における kD の大きい範囲，Eq.(4.6) の場合（Fig.4.11）のケース 1，及びケース 2 における kD の大きい範囲，Eq.(4.9)

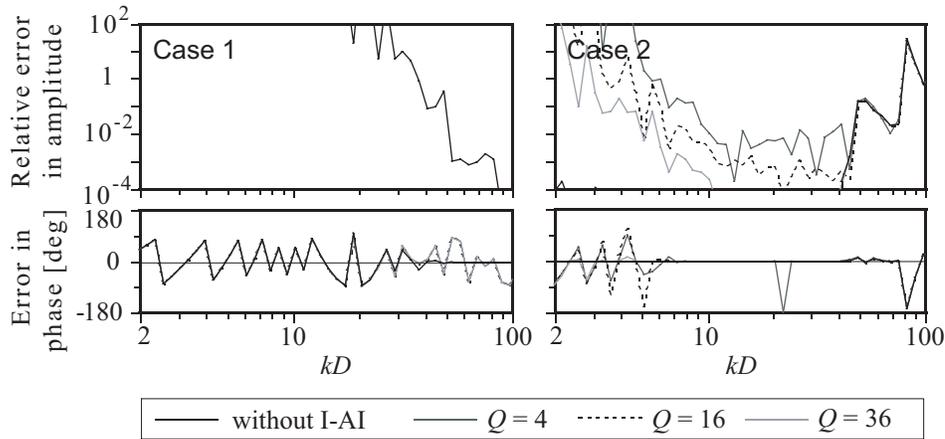


Fig. 4.11: Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA. N_c is given by Eq.(4.6). I-AI denotes interpolation and adjoint interpolation.

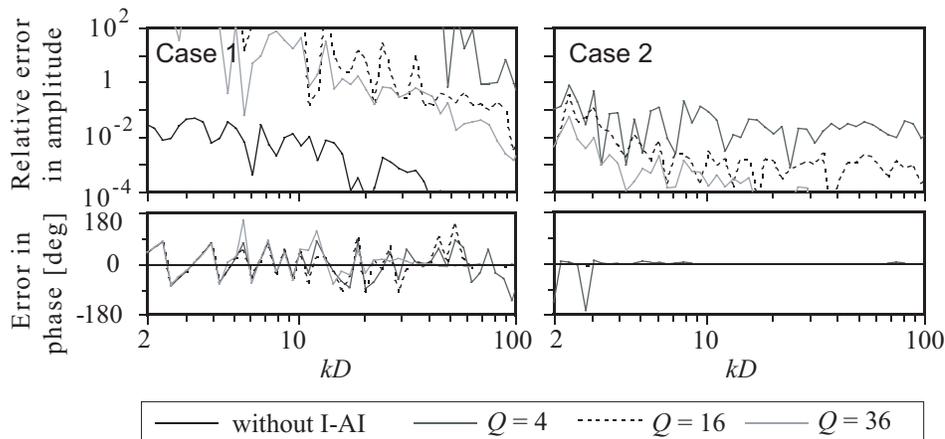


Fig. 4.12: Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA. N_c is given by Eq.(4.7). I-AI denotes interpolation and adjoint interpolation.

の場合 (Fig.4.13) においては, 補間・随伴補間無しの場合においても誤差が大きく, このため補間及び随伴補間による更なる精度低下は見られない. 一方補間・随伴補間無しの場合の精度が比較的高い Eq.(4.5) の場合 (Fig.4.10), Eq.(4.7) の場合 (Fig.4.12) を見ると, いずれも補間・随伴補間による精度低下が認められるものの, N_c 及びケースによらず $Q = 4$ と $Q = 16$ とでは誤差に大きな差があるのに対し, $Q = 16$ と $Q = 36$ とでは大きな差が認められない. また, kD の違いによる誤差への影響が小さいことから, 補間点数はレベルによらず定数を用いることができるといえる. これは FFT を用いる補間法に比べると効率面で大きなメリットである. 以上の結果から, 以降の検討では補間点数についてレベルによらず $Q = 16$ を採用することとする.

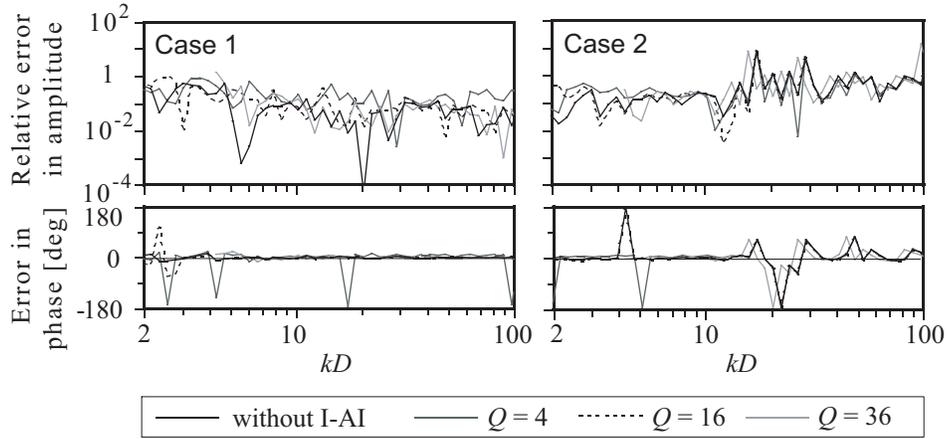


Fig. 4.13: Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the FMA. N is given by Eq.(4.9). I-AI denotes interpolation and adjoint interpolation.

級数和打ち切り次数 N_c については，1 段階で高精度であった Eq.(4.7) の場合 (Fig.4.12) に補間・随伴補間による著しい精度低下を見せており，特にケース 1，即ちが r_{LM} が最小となる場合で顕著となっている． N_c が過大な場合，変換係数 T_{LM} 内の Hankel 関数の激しい振動が発生し数値計算上の誤差の要因となることが知られているが [47]， N_c が Eq.(4.7) の場合，補間・随伴補間による誤差が生じるほど過大であったと言える．このことから，多段階化に対応した N_c の設定式が必要であることがわかる．

音響管解析による精度評価

音響管内における音圧分布の BEM 及び FMBEM による解析結果を Fig.4.14 に示す．但し，積分点数 $K = 2N_k^2$ については Eq.(4.4) を，補間点数に Q については Eq.(4.11) を採用し， N_c を Eq.(4.7)，Eq.(4.9) の 2 種類設定した．周波数は 200 Hz に固定した．

級数和打ち切り次数 N_c が Eq.(4.9) の場合はレベルによらず BEM の結果によく一致しているが，Eq.(4.7) ではレベル 3，即ち補間 1 段の場合に精度低下が見られる．このことから， N_c の設定によって補間・随伴補間による誤差の影響が大きく変化することがわかる．

4.3.3 結果と考察 –多段階多重極展開 (補間多段) の場合–

ここではセル構造をレベル 4 以上に階層化した場合，即ち 3 段階多重極展開 (補間 2 段) 以上に多段階化した場合について結果及び考察を述べる．また，多段階多重極展開に

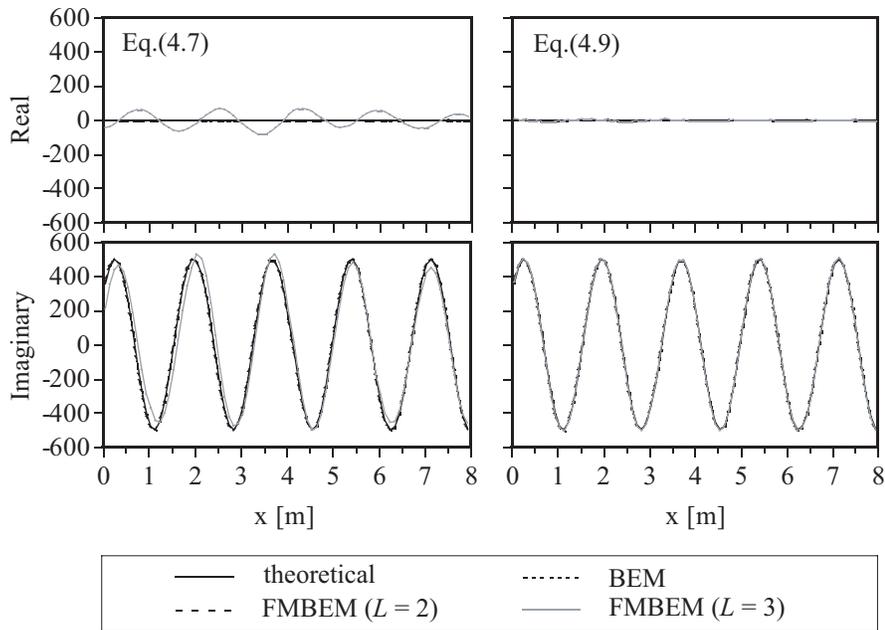


Fig. 4.14: Distribution of complex sound pressure in the tube at 200 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 2688$.

対応した打ち切り次数 N_c のための経験式を具体的に提案する。

打ち切り次数 N_c の設定

前節までの検討から，精度確保のための N_c の設定には以下の特徴を考慮する必要がある。

- (i) 高精度となる N_c は kD , kr_{LM} に依存し , $kD \leq N_c \leq kr_{LM}$ が必要条件である .
(kr_{LM} については大きく上回らなければよい .)
- (ii) N_c が過大な場合 , 1 段階多重極展開にて高精度な場合でも Hankel 関数の激しい振動により補間・随伴補間による誤差が生じる .

Eq.(4.7) は筆者が設定した 1 段階多重極展開のための設定式であるが , 多段階化にあたっては (ii) による精度低下の改善が必要である . また , $kD \geq 100$ の範囲では検討を行っておらず (Fig.4.6 参照) , より kD の大きい範囲に対応することが必要である . 以上を踏まえ , 多段階 FMBEM における N_c 設定式を以下のように定めた .

$$N_c = \lfloor k(\alpha D + (1 - \alpha)r_{LM}) + \frac{r_{LM}}{D} \ln(kD + \pi) \rfloor + 1 \quad (4.13)$$

但し ,

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4.14)$$

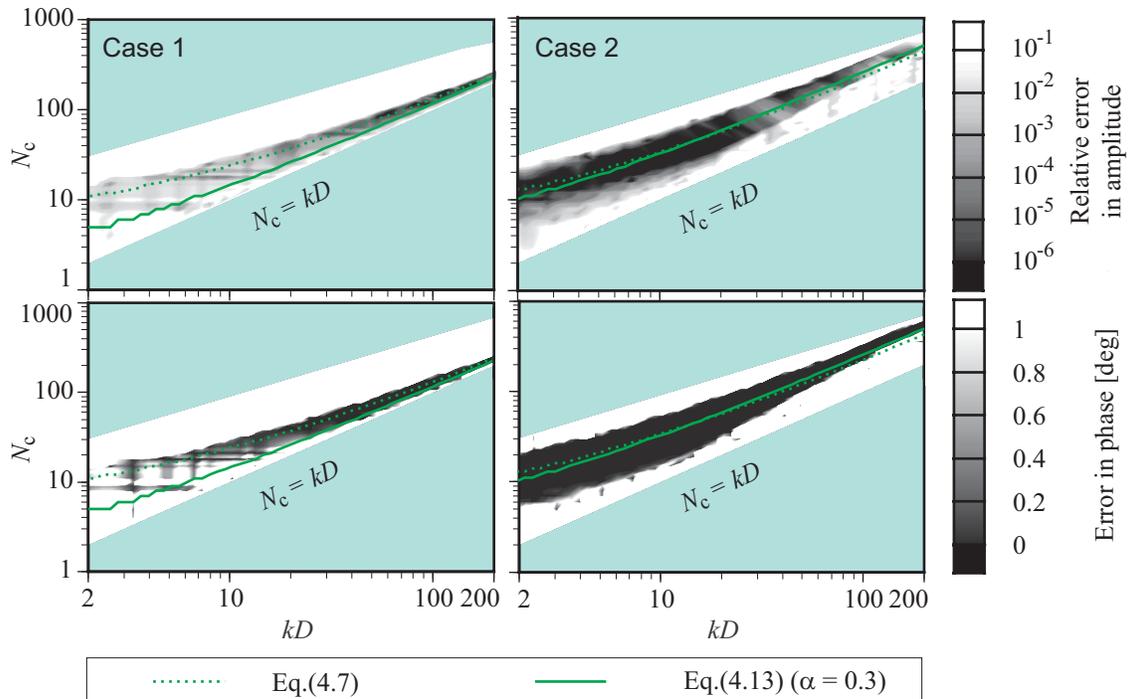


Fig. 4.15: Two formulae for N_c , overlaid on contour maps of relative errors in magnitude and of errors in phase obtained with the MLFMA.

α は扱う問題の kD により変化させる．第 1 項は α の設定により上記 2. の範囲内を動き， kD のより大きい範囲に対応可能となっている．第 2 項は上記 (ii) に対応し，Eq.(4.7) に比べ r_{LM} が小さい場合の N_c の値を小さくすることで補間・随伴補間による誤差を低減する．

多重極展開表現による精度評価

Fig.4.15 に，1 段階多重極展開において N_c ， kD を変化させた場合の基本解の振幅の相対誤差及び位相の誤差の分布を示す． N_c を Eq.(4.7)，Eq.(4.13) ($\alpha = 0.3$) により規定した場合のグラフを重ねて表示する．ケース 1 において，Eq.(4.7) の場合の精度が Eq.(4.13) に比べ高いこと，Eq.(4.13) による N_c の値が Eq.(4.7) に比べ小さいことがわかる．

N_c を Eq.(4.7) 及び次の Eq.(4.13) により規定したときの kD と基本解の精度の関係を Fig.4.16，4.17 にそれぞれ示す．(上図：振幅の相対誤差，下図：位相の誤差)．

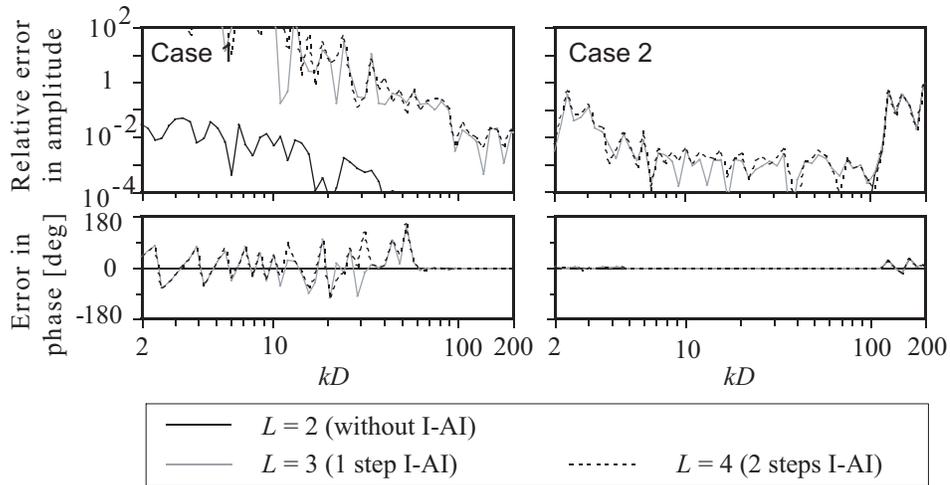


Fig. 4.16: Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the MLFMA. N_c is given by Eq.(4.7). I-AI denotes interpolation and adjoint interpolation.

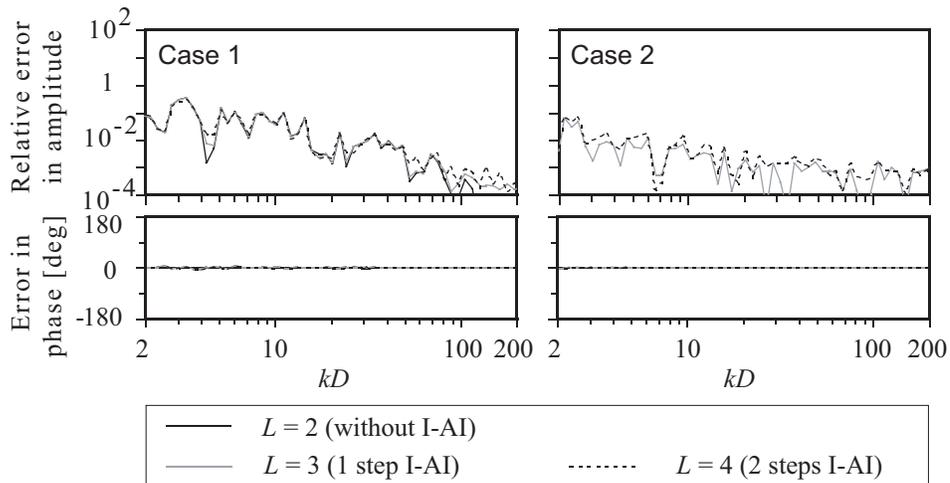


Fig. 4.17: Relative errors in magnitude and errors in phase obtained with the MLFMA. N_c is given by Eq.(4.13). I-AI denotes interpolation and adjoint interpolation.

補間・随伴補間による影響 補間・随伴補間による影響は N_c によらず補間が1段の場合と2段の場合とでほとんど変わらないことがわかる。

級数和打ち切り次数 N_c が Eq.(4.7) の場合，ケース1における補間・随伴補間による精度低下，ケース2における kD の大きい範囲での精度低下が見られるが，Eq.(4.13) においては両者とも改善されていることがわかる。

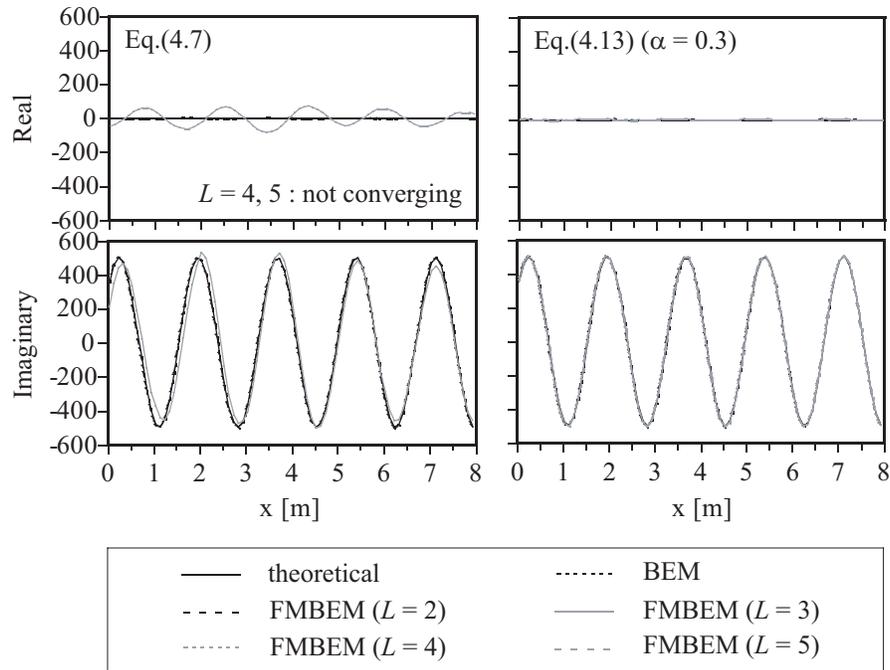


Fig. 4.18: Distribution of complex sound pressure in the tube at 200 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 2688$.

音響管解析による精度評価

解析にあたっては、積分点数 $K = 2N_k^2$ については Eq.(4.4) を、補間点数 Q については Eq.(4.11) を採用し、 N_c を Eq.(4.7), Eq.(4.13) ($\alpha = 0.3$) の 2 種類設定した。解析周波数は 200 Hz に固定した。音響管内における音圧分布の BEM 及び FMBEM による解析結果を Fig.4.18 に示す。Eq.(4.13) では階層化レベルによらず BEM の結果によく一致しているが、Eq.(4.7) では階層化レベル 3、即ち補間 1 段の場合に精度の低下が見られ、階層化レベル 4 では収束していない。このことから、FMBEM による解析においても不適切な N_c の設定によって大きく誤差が出ることが確認できる。

4.4 設定条件の妥当性の検証

前節までで多重極展開に関わる各種計算パラメータを設定し、これを踏まえた FMBEM (BF) による音響管解析を通して多段階 FMBEM において精度が確保されることを確認した。ここでは、BF, NDF, Burton-Miller 法の各定式化に基づく FMBEM・BEM 解析を行い、精度及び効率の観点から、これらの定式化における設定条件の妥当性を検証する。

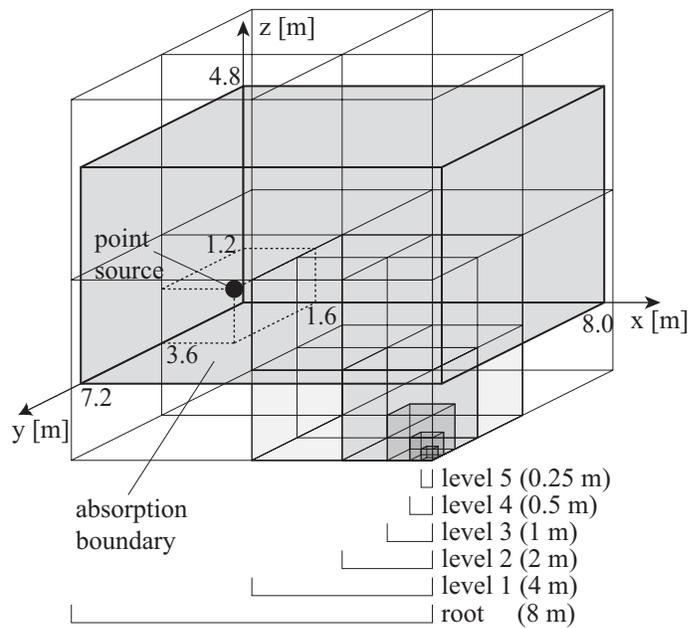


Fig. 4.19: Geometry of a rectangular room, a point source and hierarchical cells.

4.4.1 直方体解析による BF の検証

解析方法

直方体室と点音源からなる解析モデルを Fig.4.19 に示す．境界条件は全面吸音とし，吸音率 0.5 となるインピーダンスを実数で与える．境界要素は四角形一定要素とし，要素サイズを解析波長の 7 分の 1 とする．Table 4.1 に節点数，要素サイズ，解析周波数の相互関係を示す．マトリクス方程式の反復解法として前処理なしの BiCGStab を用いる．各種計算パラメータに関しては，前節までの結果を踏まえ，積分点数 $K = 2N_k^2$ については Eq.(4.4) を，Lagrange 補間の補間点数 Q については Eq.(4.11) を，打ち切り次数 N_c については Eq.(4.13) ($\alpha = 0.3$) を採用する．

結果と考察

計算精度 BEM 及び FMBEM 解析による室の床面における音圧分布を解析周波数毎に Fig.4.20 ~ 4.25 に示す．Fig.4.20 ~ 4.23 より，視覚的に見て FMBEM の解析結果が解析周波数，階層化レベルによらず BEM の結果によく一致していることがわかる．また，本

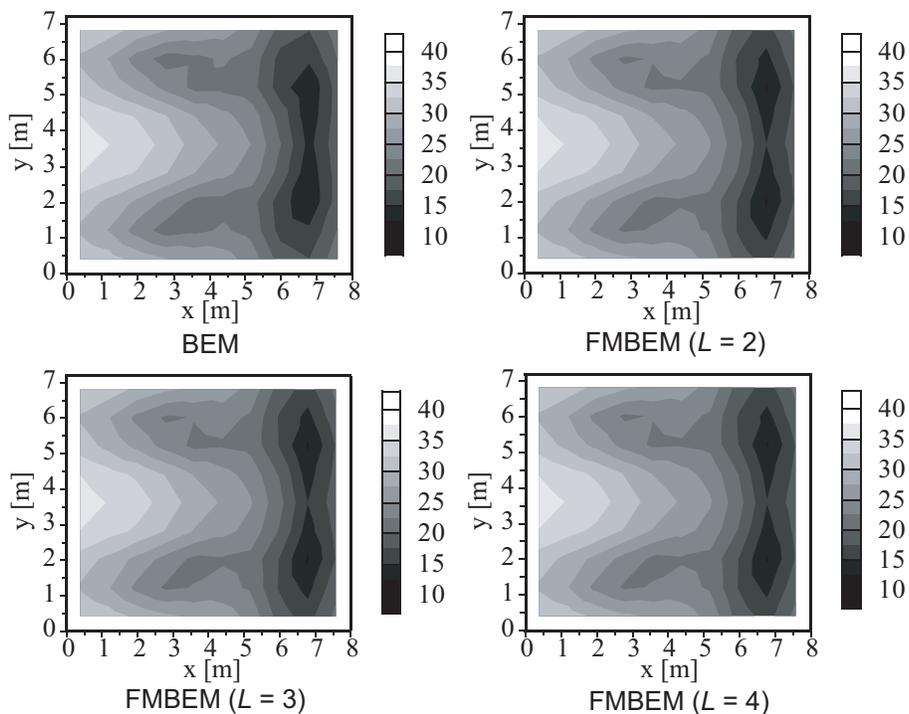


Fig. 4.20: Distribution of sound pressure level on the floor at 61.4 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 408$.

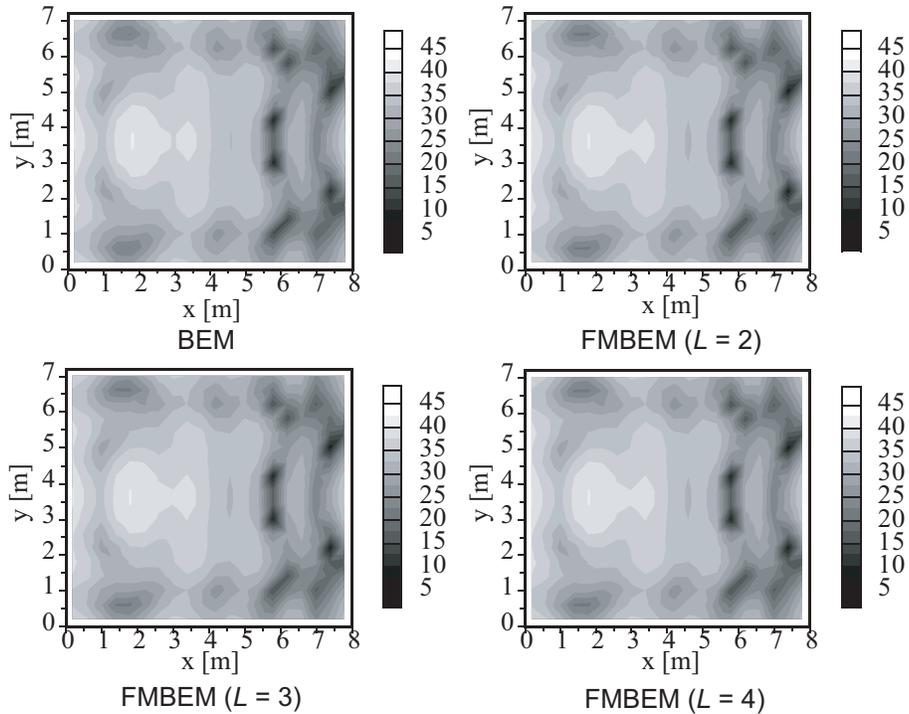


Fig. 4.21: Distribution of sound pressure level on the floor at 122.8 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 1632$.

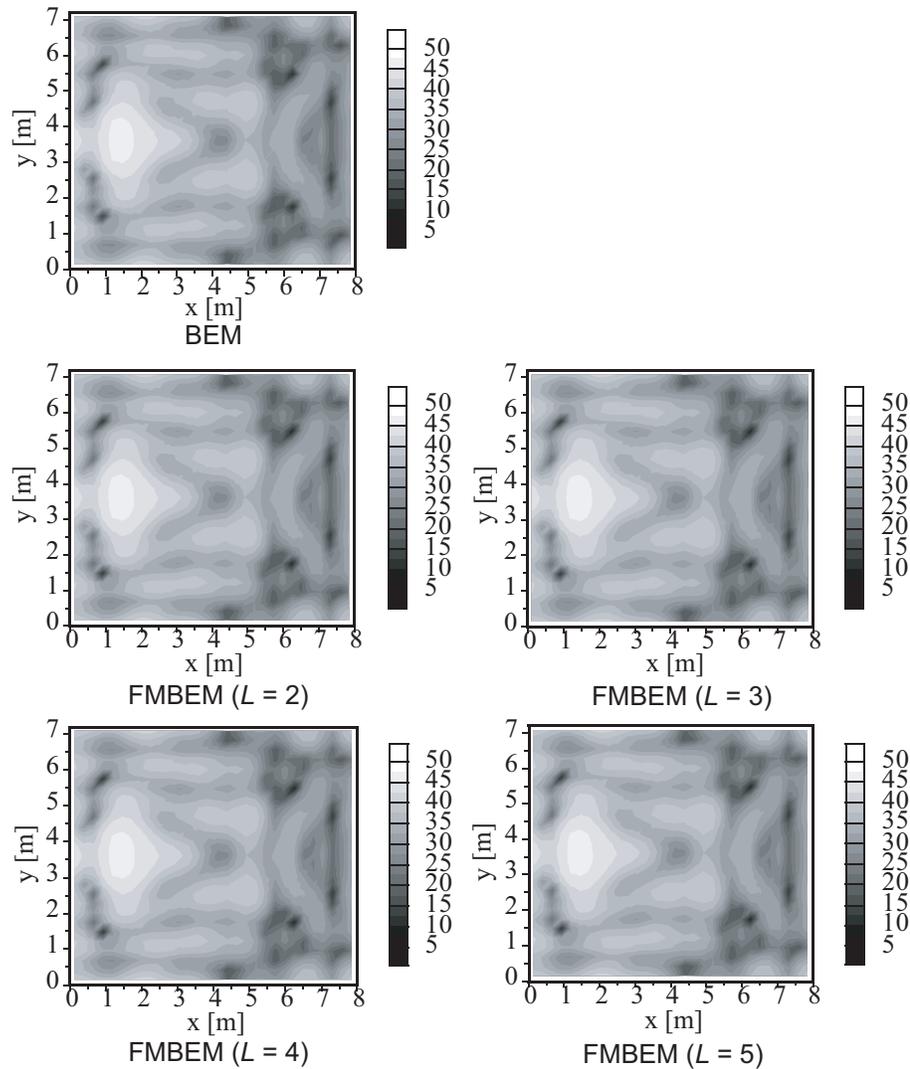


Fig. 4.22: Distribution of sound pressure level on the floor at 184.1 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 3672$.

計算機において記憶容量上の制限から BEM で解析不可能な自由度 (Fig.4.24 ~ 4.25) においても、階層化レベルによる差が見られないことがわかる。次に定量的な評価を行うため、両者の境界節点上での音圧分布の違いを床面で平均したものを Table 4.1 に示す。但し、節点位置の空間サンプリングによる影響を避けるため、評価量として次式を用いることとする。

$$\varepsilon_m = \frac{\sum_n ||p_B(\mathbf{r}_n)|^2 - |p_F(\mathbf{r}_n)|^2|}{\sum_n |p_B(\mathbf{r}_n)|^2} \quad (4.15)$$

但し、 $p_B(\mathbf{r}_n)$ 、 $p_F(\mathbf{r}_n)$ ：それぞれ BEM、FMBEM による節点位置 \mathbf{r}_n での音圧。

ε_m は全てのケースで -13dB 以下となっており、節点数 (自由度) N の増加に伴い更に値が低下していることがわかる。また、セル階層化レベル L の違いは FMBEM の解析精度

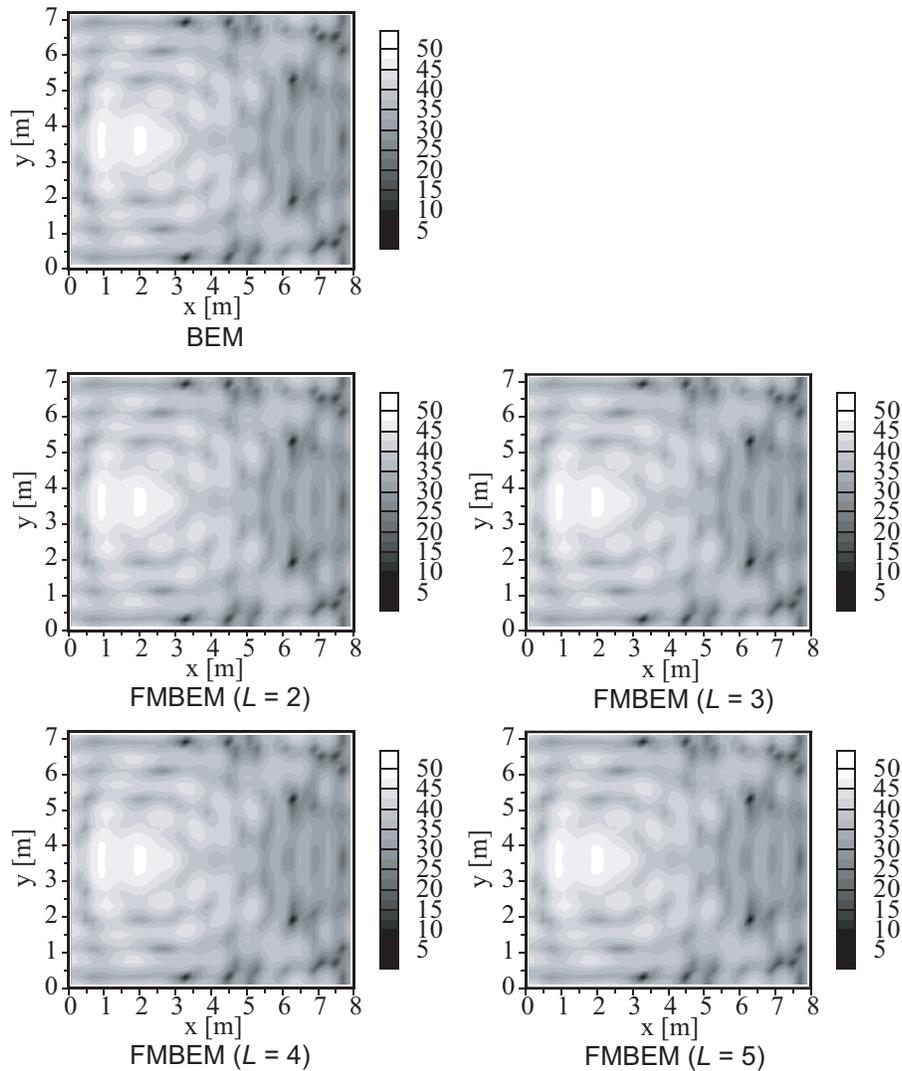


Fig. 4.23: Distribution of sound pressure level on the floor at 244.5 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 6528$.

にほとんど影響していないことがわかる．この結果から，提案した設定式によりセル階層化レベル，節点数によらず十分高精度となることが検証されたといえる．

計算量

セットアップ部 BEM 及び FMBEM 解析によるセットアップ部の計算時間を Fig.4.26 に示す．FMBEM の階層化レベル L が 2 より大きい場合，BEM と比べ計算時間が短いことがわかる．また，階層化レベルの増加に伴い計算時間が短くなっている．

反復 1 回あたり BEM 及び FMBEM 解析による反復演算部の反復 1 回あたりの計算時間を Fig.4.27 に示す．BEM の計算時間は N^2 に比例して増加することがわかる．多段階の FMBEM としては，各節点数において適切なレベルを設定することで $O(N^{1.3})$ にまで

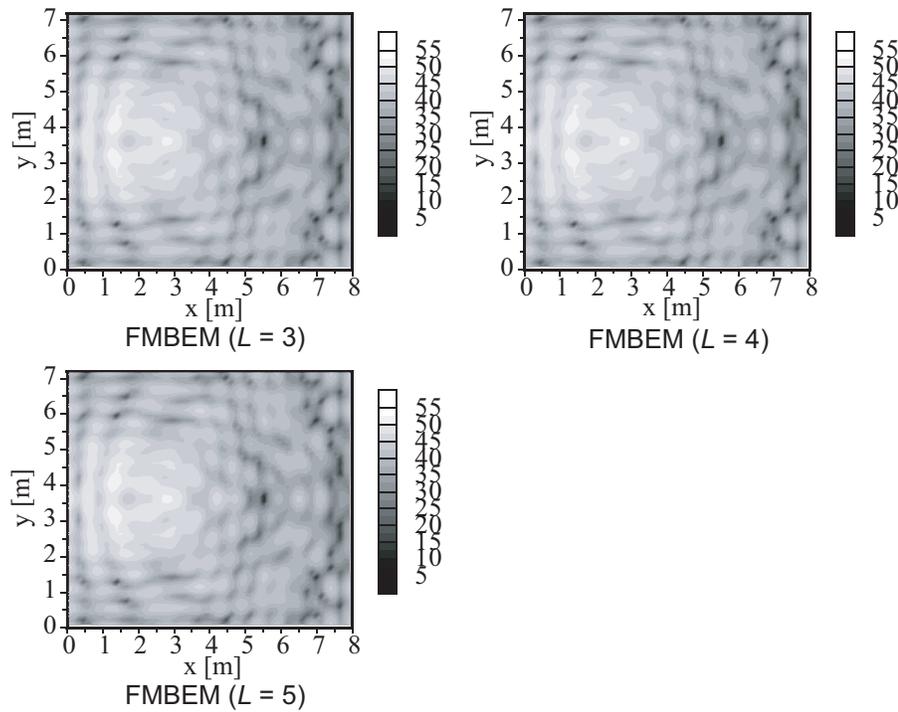


Fig. 4.24: Distribution of sound pressure level on the floor at 368.3 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 14688$.

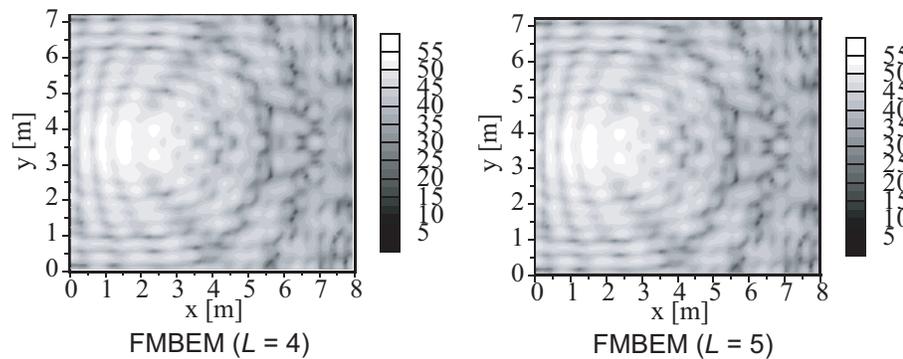


Fig. 4.25: Distribution of sound pressure level on the floor at 491.0 Hz, obtained with the BEM and with the FMBEM. Degree of freedom $N = 26112$.

低減されていることがわかる。

反復演算部 BEM 及び FMBEM 解析による反復演算部全体の計算時間を Fig.4.28 に、反復回数を Fig.4.29 に示す。反復回数については、FMBEM において階層化レベルの違いにより 1, 2 回程度之差が見られる場合もあるが、BEM, FMBEM でよく対応していることがわかる。また、節点数 N によらず反復回数が 10 回程度と安定していることがわかる。このため、反復演算部全体の計算時間については、反復 1 回あたりと同様、BEM が

Table 4.1: Differences between results with the FMBEM and those with the BEM with the same iterative solver, averaged over all nodes on the floor. ε_m is defined as Eq. (4.15). N is degree of freedom (DOF), and L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

N	Element width [m]	Frequency [Hz]	$10 \log_{10} \varepsilon_m$ [dB]			
			$L = 2$	$L = 3$	$L = 4$	$L = 5$
408	0.8000	61.4	-13.1	-13.1	-13.0	-
1632	0.4000	122.8	-16.5	-16.5	-16.4	-
3672	0.2667	184.1	-17.8	-17.8	-17.7	-17.7
6528	0.2000	244.5	-20.1	-20.1	-20.0	-20.0
14688	0.1333	368.3	-	-	-	-
26112	0.1000	491.0	-	-	-	-

$O(N^2)$ であるのに対して，多段階の FMBEM では $O(N^{1.3})$ にまで低減されていることがわかる．

総量 BEM 及び FMBEM 解析による計算時間の総量を Fig.4.30 に示す．反復演算部と同様，BEM が $O(N^2)$ であるのに対して，多段階の FMBEM では $O(N^{1.3})$ にまで低減されていることがわかる．本計算例の範囲では $N = 2000$ 付近から FMBEM による効率化がなされており，更なる大問題では一層の効率化が期待できる．

必要記憶容量 BEM 及び FMBEM 解析による必要記憶容量の総量を Fig.4.31 に示す．BEM では N^2 に比例して必要記憶容量が増加するのに対して，最下位レベルを固定した FMBEM では， N が小さくなるにつれて傾斜が緩やかになり， N が大きくなるにつれて N^2 の傾斜に近づく傾向が見られる．また，必要記憶容量を最小化する最下位レベルが N によって異なることがわかる．本計算例の範囲では多段階の FMBEM で必要記憶容量は概ね $O(N)$ となっており，BEM と比べて大幅に低減されていることがわかる．

4.4.2 外部問題の解析による NDF・Burton-Miller 法の検証

ここでは BF，NDF，Burton-Miller 法の 3 種の定式化に基づく FMBEM により外部問題を解析し，理論解との比較を通して FMBEM における NDF 及び Burton-Miller 法の精度・効率を検証すると共に，外部問題における解の一意性の問題のための Burton-Miller 法に基づく FMBEM の有効性を確認する．

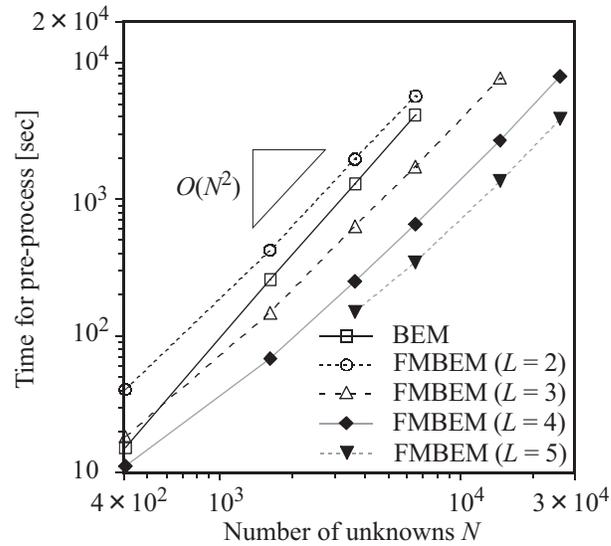


Fig. 4.26: Computational time for the pre-process of the BEM and of the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

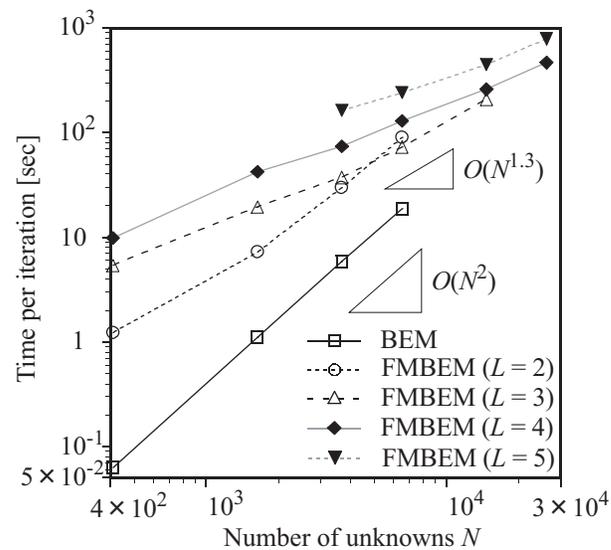


Fig. 4.27: Computational time per iteration for the BEM and for the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

解析方法

一辺 d [m] の立方体からなる解析モデルを Fig.4.32 に示す．境界条件として，立方体中央に仮定した点音源によって生成される粒子速度を与え，外部問題の解析を行う [57]．この条件下での解析結果は点音源からの放射音場と等しくなるため，理論値との比較，誤差

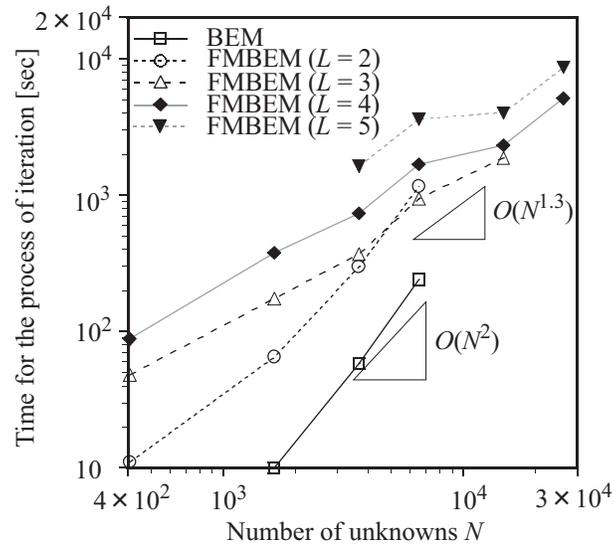


Fig. 4.28: Computational time for the process of iteration of the BEM and of the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

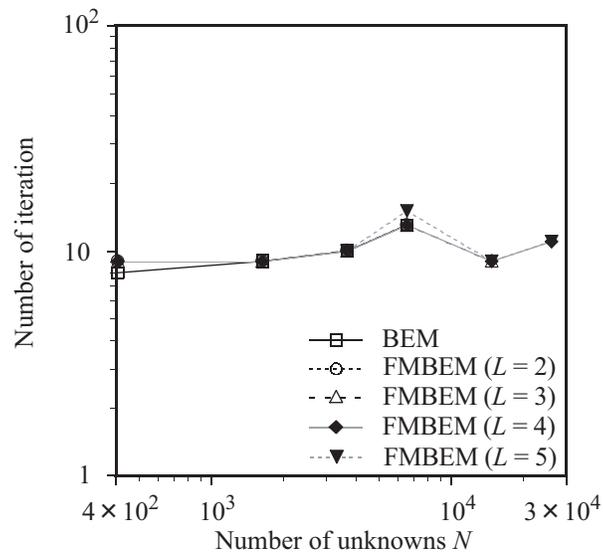


Fig. 4.29: The number of iteration of the BEM and of the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

評価が可能となる．境界要素は立方体一辺を 25 分割した四角形一定要素とする（要素数 3750）．反復解法には前処理なしの BiCGStab を用いた．セル階層化レベルは第 5 章の検討を基に $L = 3$ （最下位レベルセル内平均節点数 $M = 12.7$ ）とした．

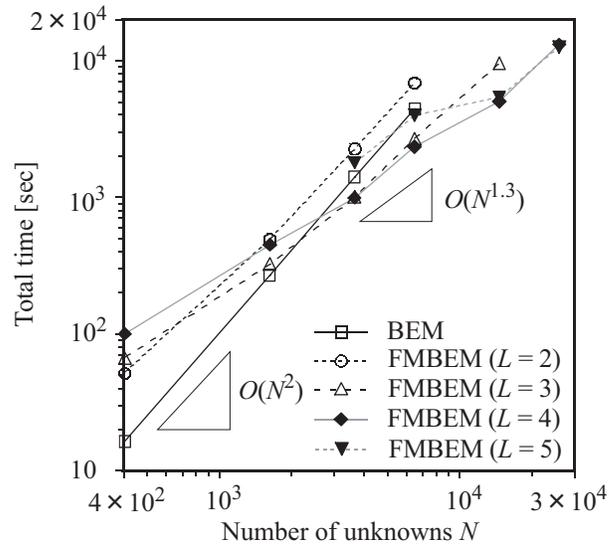


Fig. 4.30: Computational time for the total process of the BEM and of the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

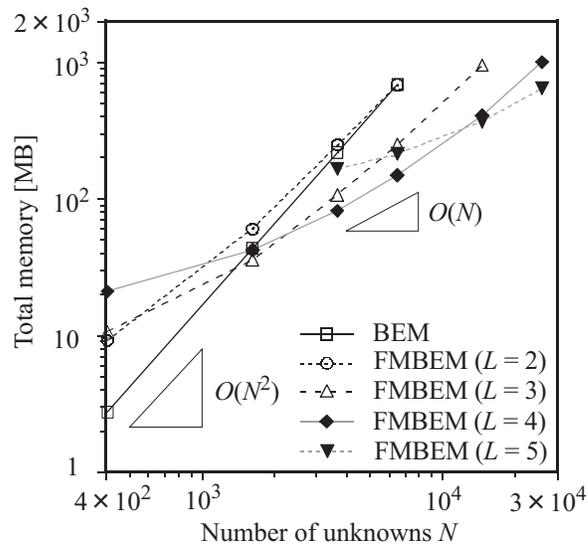


Fig. 4.31: Memory requirements for the BEM and for the FMBEM. L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

結果と考察

計算精度 立方体の面中央 $(d/2, d/2, 0)$ における音圧振幅の相対誤差 (上) と位相の誤差 (下) を BF, NDF, Burton-Miller 法ごとにそれぞれ Fig.4.33, 4.34, 4.35 に示す。い

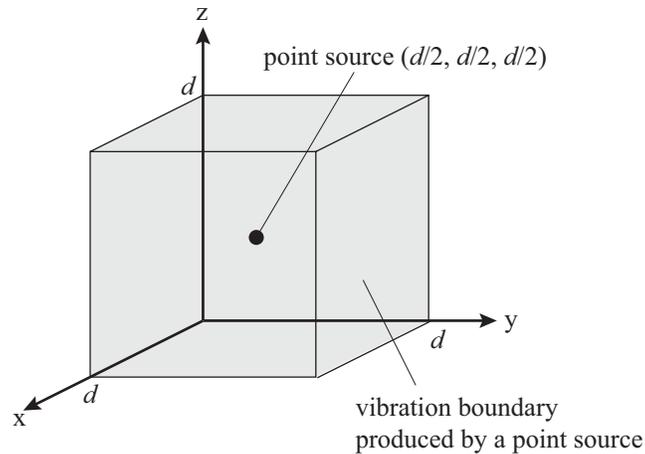


Fig. 4.32: Geometry of an analysis model. Velocity distribution on the surface of the cube approximates that produced by a point source at the center.

れも BEM と FMBEM で概ね対応していることがわかる。BF の場合内部 Dirichlet 問題の固有周波数となる位置に，NDF の場合内部 Neumann 問題の固有周波数となる位置において著しい誤差が見られる。一方 Burton-Miller 法ではいずれの誤差も見られず，振幅においては BEM，FMBEM 共に概ね相対誤差 0.01 以下となっている。

収束性・計算効率 BEM と FMBEM の反復回数を Fig.4.36 に示す。いずれも内部固有周波数との対応はあまり見られない。また，本計算例では両者とも NDF，Burton-Miller 法の場合に反復回数が増加しており，反復解法，あるいは BiCGStab に対して NDF の方が係数行列のスペクトルが不適な可能性がある。BEM と FMBEM による総計算時間を Fig.4.37 に示す。どの定式化においても FMBEM による効率化が見られる。必要記憶容量に関しては定式化による差はなく，BEM の 225.6MB に対し FMBEM では周波数によらず 60MB 以下にまで効率化された。

4.5 まとめ

本章では，任意問題に FMBEM による数値解析を適用するにあたり必須となる，多重極展開を数値計算上近似的に取り扱うための各種計算パラメータ，即ち単位球面積分点数 $K = 2N_k^2$ ，無限級数和打ち切り次数 N_c ，レベル間における単位球面積分点の補間・随伴補間点数 Q の設定について検討し，精度及び効率の両観点から具体的な設定式を提案した。これらを踏まえた FMBEM による数値解析を行い，精度・効率の両観点から設定式の妥当性を確認した。

まず，本手法の基礎となる 3 次元音場基本解の多重極展開について，厳密解との比較に

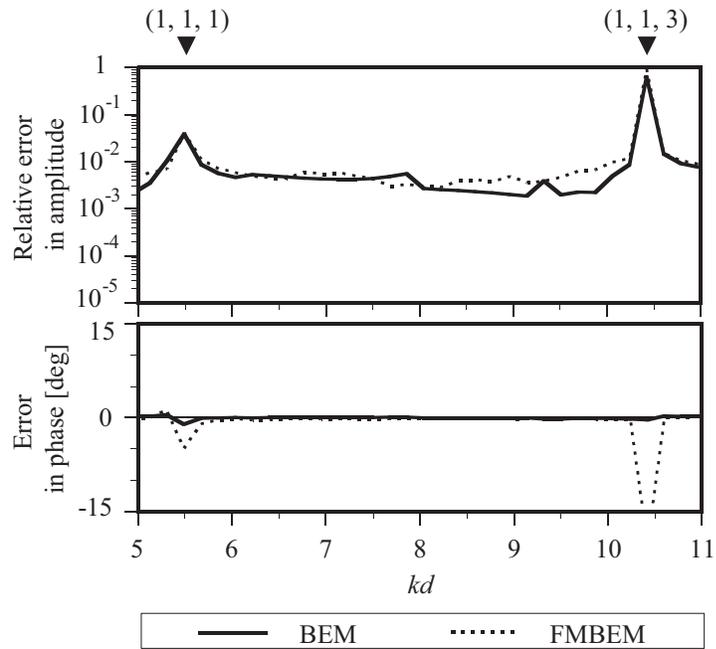


Fig. 4.33: Errors in amplitude and in phase of sound pressure at $(d/2, d/2, 0)$, using the BEM and the FMBEM in BF.

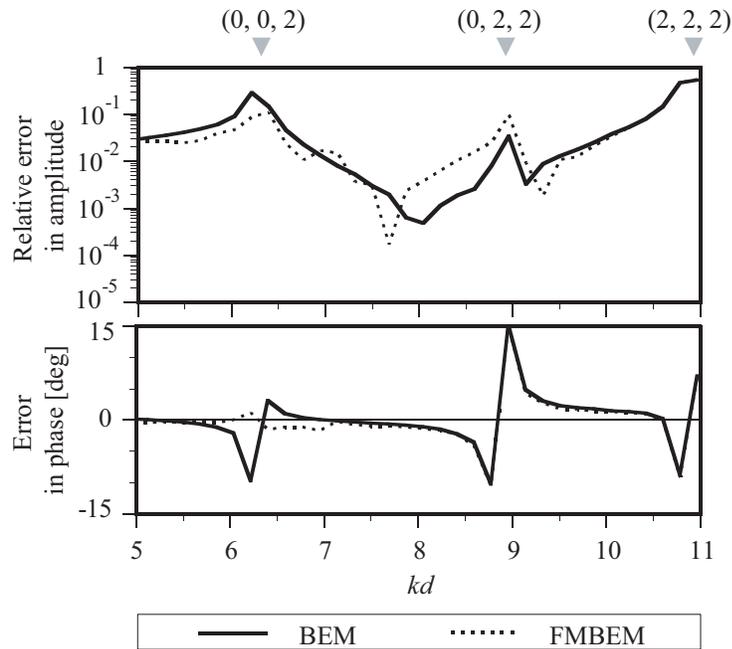


Fig. 4.34: Errors in amplitude and in phase of sound pressure at $(d/2, d/2, 0)$, using the BEM and the FMBEM in NDF.

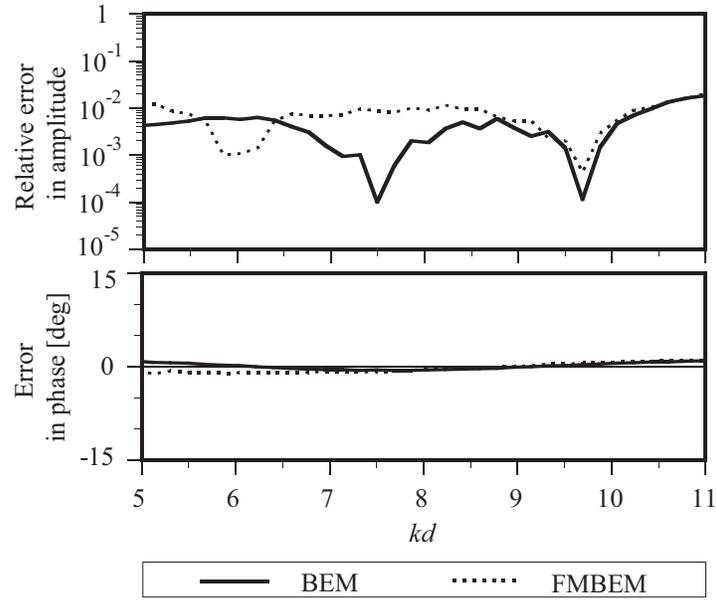


Fig. 4.35: Errors in amplitude and in phase of sound pressure at $(d/2, d/2, 0)$, using the BEM and the FMBEM in Burton-Miller formulation.

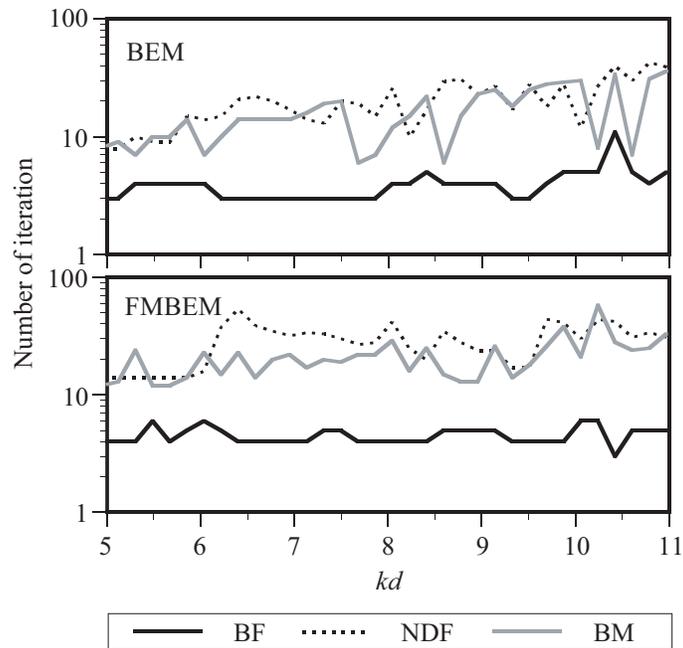


Fig. 4.36: The number of iteration of the BEM and the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM).

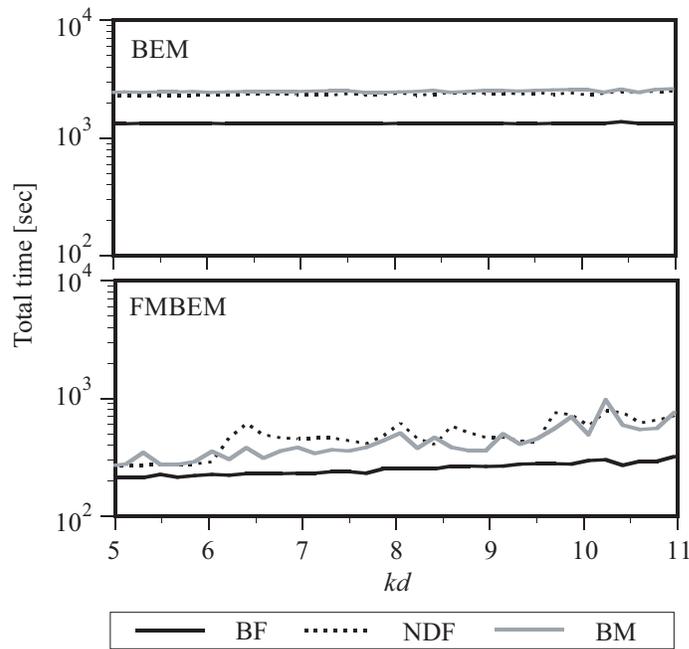


Fig. 4.37: The computational times of the BEM and the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM).

よる精度の検討を行った。多重極展開点，局所展開点を持つセルの位置関係によらず高精度となるよう，セルの位置関係の異なる数ケースを設定し，解析上意味を持つ無次元波数 kD (k : 波数， D : セルを内包する球の直径) との関係で検討を行った。

単位球面積分分点数 N_k については，1 段階の多重極展開による検討より，打ち切り次数 N_c より大きく設定した場合にセルの位置関係や kD によらず誤差が十分収束することを明らかにし，具体的な設定式として Eq.(4.4) を提案した。

補間・随伴補間のための点数 Q については，多段階の多重極展開による精度の検討より，セルの位置関係や kD によらず 16 点では補間・随伴補間による誤差が十分収束することを明らかにし，階層化レベルに依存しない設定式として Eq.(4.11) を提案した。

無限級数和打ち切り次数 N_c については，1 段階の多重極展開による検討より，セルの位置関係により誤差が変化することを明らかにし，従来の kD のみに依存する設定式にセル中心点間距離を導入する必要性を示した。また，多段階の多重極展開による検討より， N_c が過大な場合，1 段階で高精度な設定式であっても補間・随伴補間による誤差が生じることを明らかにし，これに対応した N_c の設定式として Eq.(4.13) を提案した。

以上の 3 次元音場基本解による基礎的検討を踏まえて，上記設定を適用した FMBEM を直方体室の内部音場に適用し，FMBEM 解析として，精度・計算効率の観点から設定条件の妥当性を検証した。また，外部問題の解析を通して，BF のみならず NDF 並びに Burton-Miller 法の各定式化についても妥当性を確認した。

第 5 章

階層セル構造に関する検討

5.1 はじめに

従来の BEM の計算効率が主に解析周波数，またはそれに依存する節点数によりほぼ決定するのに対して，FMBEM の計算効率は多重極展開及び階層セル構造に関わる要因にも影響を受ける．多重極展開に関わる影響要因としては，前章にて検討したように単位球面積分点数，無限級数和打ち切り次数が挙げられる．一方，階層セル構造に関わる影響要因としては，解析対象に対する階層セル構造の配置（ルートセル内の節点の分布状況），及びセルの階層化レベルが挙げられる．セル構造の配置は各レベルにおけるセル数及びセルサイズを決定し，階層化レベルはそのレベル数を決定することから，いずれも計算効率へ直接的に関わる要因であるといえる．多重極展開に関わる影響要因がいずれも解析波数 k とセルを内包する球の直径 D の積である無次元波数 kD との関係で記述できること [43, 47] を合わせると，FMBEM の計算効率への影響要因は，解析周波数，節点数の他には上記の階層セル構造に関わるものであるとすることができる．

解析対象と階層セル構造の位置関係が計算効率に及ぼす影響については，第 2 章における計算効率の理論的概算において，ルートセル内の節点の分布が計算効率に影響を及ぼすこと，特に 1 次元的な節点分布の場合に計算効率が著しく低下する可能性があることを示した．既往研究においても，N 体問題の FMA において粒子の空間分布が計算量に影響を及ぼすことが知られており [68, 54, 69]，Greengard *et al.* によるアルゴリズム [16] が粒子数 N に対し $O(N)$ の計算量とはならないことが指摘されている [70, 54]．音響問題において 1 次元的な節点分布となる解析対象としては遮音壁，ダクト等が挙げられ，特に遮音壁の解析といった大規模問題への適用を考えると，1 次元的な形状の問題においても FMBEM が十分効率化される必要がある．

一般に，FMA の計算プロセスにおいて最も計算量が大きい部分は多重極展開係数を局

所展開係数へと変換する部分である．本論文でも第 2 章における計算効率の理論的概算において，1 次元的，2 次元的な節点分布の場合には上記の変換のための変換係数 T_{LM} の算出部が全計算量のオーダーを決定すること，1 次元的な節点分布の方がそのオーダーが大きいことを示している．従って，これらの節点分布，特に 1 次元的な節点分布の場合に全計算量を低減するためには，変換係数 T_{LM} の算出部の計算量を低減することが不可欠である．また，1 次元的な分布の場合，2，3 次元的分布と異なり，ルートセル内での解析対象の配置をより自由に設定できるため，計算効率低減の観点からそれらの適切な位置関係についても考慮する必要がある．

一方，節点分布に関わらず，ある FMBEM 解析において計算効率を最適化した計算を行うためには，階層セル構造の階層化レベルを適切に設定する必要がある．最適階層化レベルを議論する上では，階層化レベルの違いが計算効率に与える影響について，反復解法の収束性，解析対象の節点分布による影響を考慮した検討が必要である．しかしながら，FMA の既往研究においては，最下位レベルセルのサイズと解析波長との関係を考慮して階層化レベルを決定するといった曖昧なものが多く [48, 64]，明確な階層化レベル設定基準が示されていない．

また，効率化に関しては上記のように解析問題によらない汎用的な効率化を目指す方向がある一方，頻繁に解析される特殊な設定の問題における更なる効率化を目指す方向が考えられる．このような問題の一例として対称形となる音場が挙げられる．この音場に対しては，無限大剛面上の音場（即ち剛面に対する鏡像を想定した際にできる対称形音場）を含めると頻繁に解析が行われており，具体例として，地表面上に遮音壁がある音場 [71, 72, 5]，ステージ上に雛壇がある音場 [73] 等，十分広い面からの音響的な影響を考慮する必要があるものが挙げられる．その他にも，音源まで含めて対称となる室・物体の解析や，周期構造を持つ壁や音響拡散体の解析などを挙げることができる．以上のような対称形音場に対しては，階層セル構造を解析対象に対して適切に配置し，セル間で諸係数の関係に留意することにより更なる効率化が行える可能性がある．

以上の背景を踏まえ，本章では FMBEM の持つ効率化能力を最大限引き出す上で重要となる階層セル構造の適切な設定に関して，理論的概算及び数値解析によるケーススタディを通して検討を行う．（なお以降では，階層セル構造の配置，及び多重極展開係数を局所展開係数へと変換する係数 T_{LM} に関する設定を合わせて「階層セル構造の設定」と呼ぶこととする．）はじめに，境界形状（節点分布）を考慮した階層セル構造の効果的な設定に関して検討する．解析対象の境界形状が FMBEM の計算効率に及ぼす影響を，数値解析によるケーススタディを通して詳細に調べた後，FMBEM の計算効率が大幅に低下する可能性のある 1 次元的な境界形状の問題に関して，理論的概算及び数値解析によるケーススタディを通して，境界形状に依存せずに効率化するための階層セル構造の設定方法について検討する．これを踏まえた後，FMBEM の計算効率を最適化するセル階層化レ

ベルの設定法について，理論的考察及び数値解析を通して検討し，セル階層化レベルの設定方法を具体的に提案する．最後に，対称形となる音場の解析における効率化手法に関して，効率化アルゴリズムの構築，及び数値解析による計算精度，計算効率の妥当性の検証を行う．

5.2 境界形状を考慮した階層セル構造の設定に関する検討

本節では，理論的概算及び数値解析によるケーススタディを通して，節点分布に依存しない階層セル構造の設定について検討し，その設定方針を提案する．

5.2.1 計算効率への影響要因

FMBEM の計算効率への影響要因のうち，階層セル構造に関わる要因について整理する．

階層セル構造の配置

解析対象に対し階層セル構造の配置を変化させることは，一般には全ての計算過程において計算効率を変化させるが，ここでは次節にて確認するように，最下位レベルセル内平均節点数 M が境界形状及び階層セル構造の配置によらず変化しないものと仮定する．また，セル構造が十分下位まで階層化されている場合，最下位レベルセルのサイズ D_L に対して $D_L^2 \propto M$ が成り立つことから， D_L も同様に変化しないものとする．これにより，第 2 章における理論的概算から検討対象は以下に限られる．

- 計算量：

- セットアップ部：変換係数 T_{LM} 算出のための演算．

$$\sum_{l=2}^L \overline{C}_3^l = \sum_{l=2}^L (kD_l)^3 I_l' \quad (5.1)$$

- 反復演算部：ステップ 2～4 に関わる演算．

$$\sum_{l=2}^{L-1} C_2^l = \sum_{l=2}^{L-1} M_l (kD_l)^2 JQ \quad (5.2)$$

$$\sum_{l=2}^L C_3^l = \sum_{l=2}^L M_l (kD_l)^2 I_l \quad (5.3)$$

$$\sum_{l=2}^{L-1} C_4^l = \sum_{l=2}^{L-1} M_{l+1} (kD_{l+1})^2 Q \quad (5.4)$$

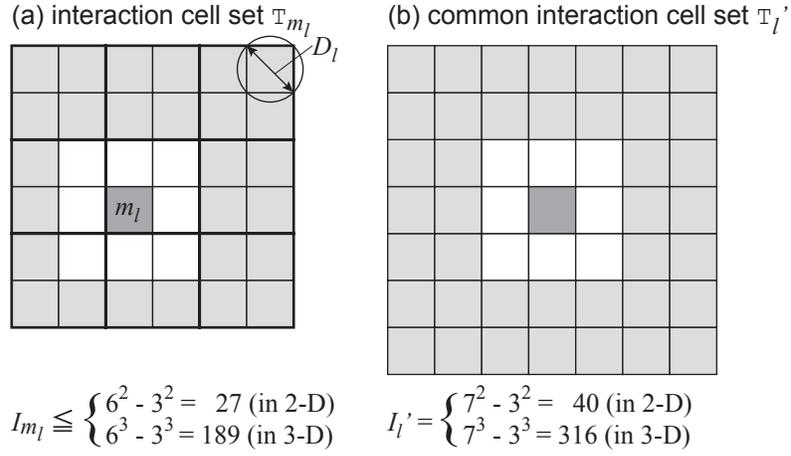


Fig. 5.1: (a) T_{m_l} : interaction cell set of cell m_l at level l , and (b) T'_l : common interaction cell set for pre-calculation of translation coefficients T_{LM} at level l (in 2-D). I_{m_l} and I'_l are the numbers of cells of T_{m_l} and T'_l , respectively.

- 必要記憶容量：外向・内向係数 ξ, τ, ζ 及び T_{LM} に必要な部分。

$$\sum_{l=2}^L E_3^l = \sum_{l=2}^L 6M_l(kD_l)^2 \quad (5.5)$$

$$\sum_{l=2}^L E_4^l = \sum_{l=2}^L (kD_l)^2 I'_l \quad (5.6)$$

また，Eqs.(5.1, 5.6) はレベル l におけるセルサイズ D_l と共有相互作用セル群 T'_l （後述）のセル数 I'_l に，Eqs.(5.2, 5.3, 5.4, 5.5) はセルサイズ D_l とセル数 M_l に依存することがわかる。従って，効率化のためには M_l, I'_l, D_l を低減することが必要となる。

相互作用セル群からの寄与変換係数

第2章にて述べたとおり，FMBEM では相互作用セル群からの影響評価（ステップ3）において次式で表される変換係数を用い，多重極展開係数を局所展開係数へと変換する。

$$T_{LM}(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{l=0}^{N_c} j^l (2l+1) h_l^{(1)}(kr_{LM}) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{LM}) \quad (5.7)$$

あるセル m_l に対する相互作用セル群の例を Fig.5.1(a) に示す。実際は図に示すうち要素を内包する正方形（3次元では立方体）のみがセルとなるため，相互作用セル群はセル毎に異なる。変換係数 T_{LM} は \mathbf{k} と \mathbf{r}_{LM} のみの関数であることから，反復演算部で利用の度に繰り返し計算する必要はなく，セットアップ部にて予め計算しておく。その際，個々の

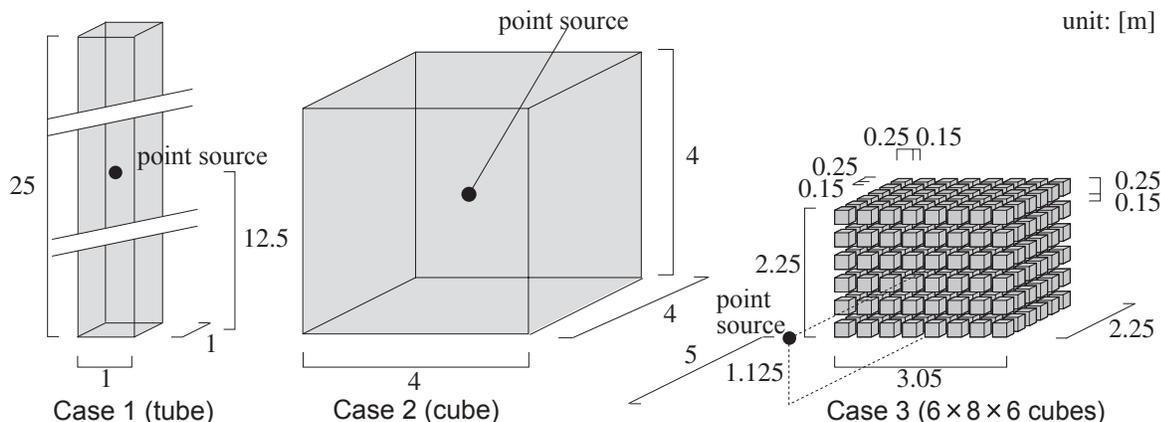


Fig. 5.2: Geometry of three cases of problems. All cases have uniform rigid surfaces. A point source is located at the center in cases 1 and 2.

セルに対してその相互作用セルのための係数を保存するのではなく、セル位置の相対性を利用して、各レベルで T_{LM} のためのセル群をまとめて設定するのが効率的である。このようなセル群の例を Fig.5.1(b) に示す。以後、このセル群を共有相互作用セル群 T'_l と呼ぶこととする。任意形状の問題に対しては、図に示す全ての正方形（立方体）をセルと捉え、セル構造のレベルによらず T'_l の数 I'_l を等しく $I'_l = 316$ とする方法が容易な設定方法として考えられる。一方、プログラミングがやや煩わしくなるものの、Fig.5.16, 5.17 に示すように、解析対象ごとに各レベルで必要最小限の T'_l を用いる方法がより効率的な方法として考えられる。

5.2.2 境界形状が計算効率に与える影響

ここでは、特に個々の解析対象に対して特段配慮したセル構造の設定を行わない場合に、解析対象の形状が FMBEM の計算量・必要記憶容量に及ぼす影響に関して、数値解析によるケーススタディを通して調べる。

解析方法

レベル l ($\leq l_d$) におけるセル数 M_l について、

$$M_l \propto (2^a)^l \quad (5.8)$$

であるとき、境界形状がレベル l_d まで a 次元であると定義し、典型的な境界形状の問題として Fig.5.2 に示す 3 ケースを設定する。ケース 1, 2, 3 はそれぞれあるレベル l_d まで 1 次元、2 次元、3 次元である境界形状の場合である。Fig.5.3 にレベル l とセル

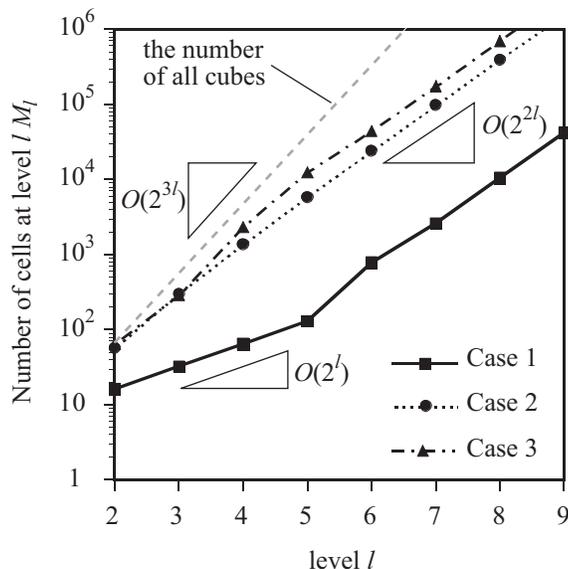


Fig. 5.3: Relationship between level l and the number of cells at level l , M_l .

数 M_l との関係を一ケースごとに示す．一般に境界要素法で解かれるような問題の場合，全体的に見て 1 次元的，3 次元的な分布の場合でも局所的には 2 次元的な分布となるが，本ケース群の場合，ケース 1，3 において $l = 6$ 以上の下位レベルで 2 次元的な分布と同様の傾きとなっている．ケース 1，2 は内部問題，ケース 3 は外部問題の解析とする．境界条件は全面剛とし，メッシュ生成により節点数を変化させて解析を行う．境界要素として四角形一定要素を用い，要素サイズを解析波長の 8 分の 1 以下とする．反復解法として前処理なしの BiCGStab を用いる．FMBEM における各種計算パラメータに関しては第 4 章の結果を踏まえたものとする．解析対象に対する階層セル構造の配置については，単純な設定として，階層セル構造の辺が各ケースの直方体の辺と平行になるよう，またルートセルの中心が各ケースの解析対象の中心と等しくなるよう配置し，各ケースごとにルートセルのサイズを解析対象全体を内包する必要最小限のサイズとした．また，変換係数 T_{LM} については，任意の問題に対応できるように，Fig.5.1(b) に示す共有相互作用セル群を想定して，ケースによらず各レベルにて $I'_l = 316$ として算出した．

結果と考察

計算量

セットアップ部 解析に FMBEM を適用した場合の節点数 (DOF) N とセットアップ部の計算時間との関係を Fig.5.4 に示す．但し，計算時間を最小化する階層化レベルにおける値のみ示している．傾きに関しては，ケース 3 が最も緩くケース 2，1 の順に急となっ

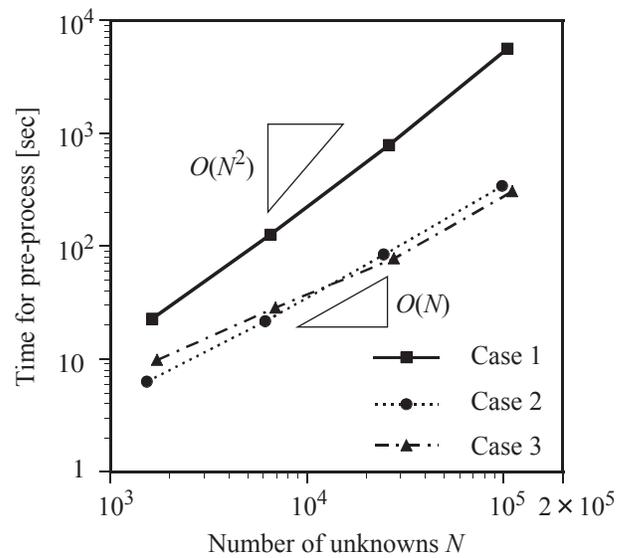


Fig. 5.4: Computational time for the pre-process of the FMBEM with the optimum cell level number $L_{T_p, \text{opt}}$.

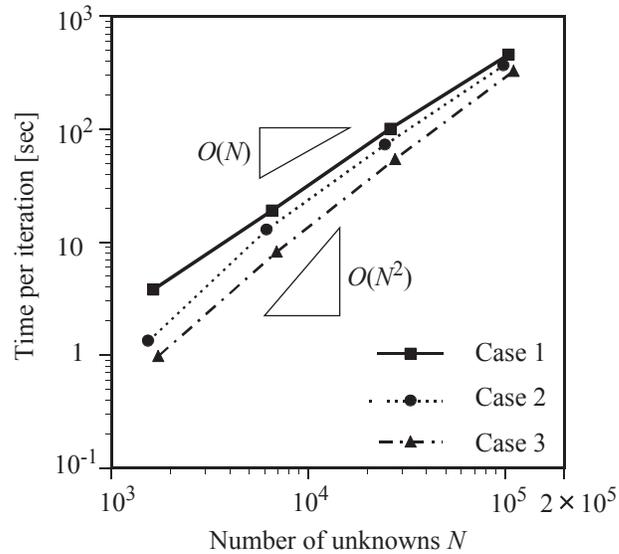


Fig. 5.5: Computational time per iteration for the FMBEM with the optimum cell level number $L_{T_i, \text{opt}}$.

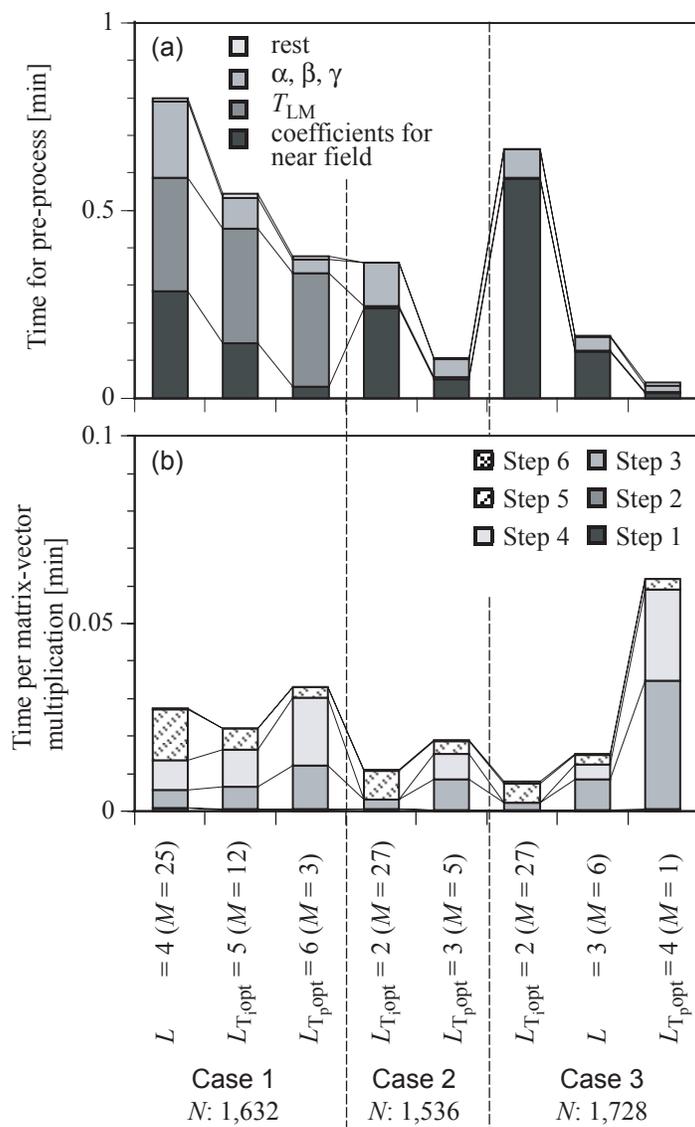


Fig. 5.6: Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM for analyzing three cases of problems at 125 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

ており，Eq.(2.116) に示した理論的概算に合致した傾向であるが，本計算例では概算に比べケース間による傾きの差が少ない結果となっている．原因としては，Fig.5.3 に示すようにケース 1，3 に関しては下位レベルのセル内において 1 次元の，3 次元のな節点分布が成立しておらず 2 次元のな節点分布と見なせることが挙げられる．一方量的に比較すると，ケース 2，3 はほぼ同様の計算時間である一方，ケース 1 は $N = 100,000$ 程度の節点数で他のケースのほぼ 10 倍もの計算時間となっており，1 次元のな節点分布において計算量が大幅に増加していることがわかる．このことから，反復演算部の収束が比較的速

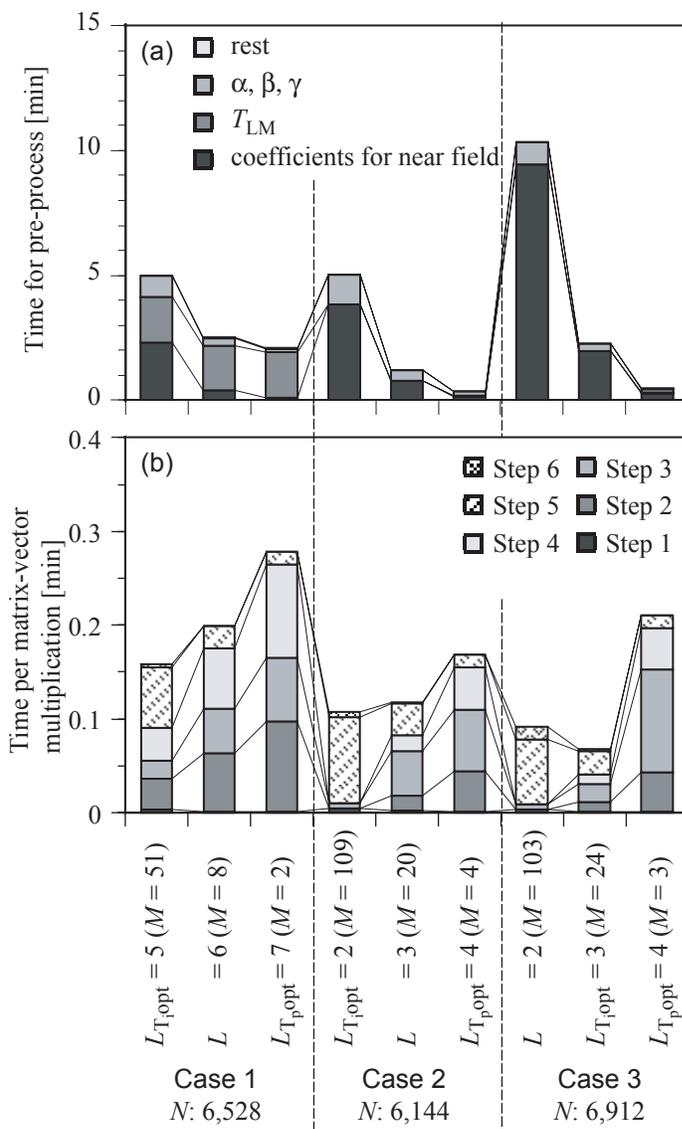


Fig. 5.7: Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM for analyzing three cases of problems at 250 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

くセットアップ部の計算量が相対的に大きい場合は、1次元的な節点分布の問題における計算量が他のほぼ同様の節点数の問題の場合に比べて膨大化すると言える。

次に計算時間の詳しい内訳を第2章の理論的概算に対応する形で解析周波数ごとに Fig.5.6(a)~5.9(a)に示す。但し、セットアップ部、反復演算部の各計算時間を最小化する階層化レベル(それぞれ $L_{T_{popt}}$, $L_{T_{iopt}}$ とする)を含んだ複数の階層化レベル L を設定している。反復回数が十分小さい場合は $L_{T_{popt}}$ が全計算時間を最小化する最適階層化レベルに、反復回数が十分大きい場合は $L_{T_{iopt}}$ が全計算時間を最小化する最適階層化レベ

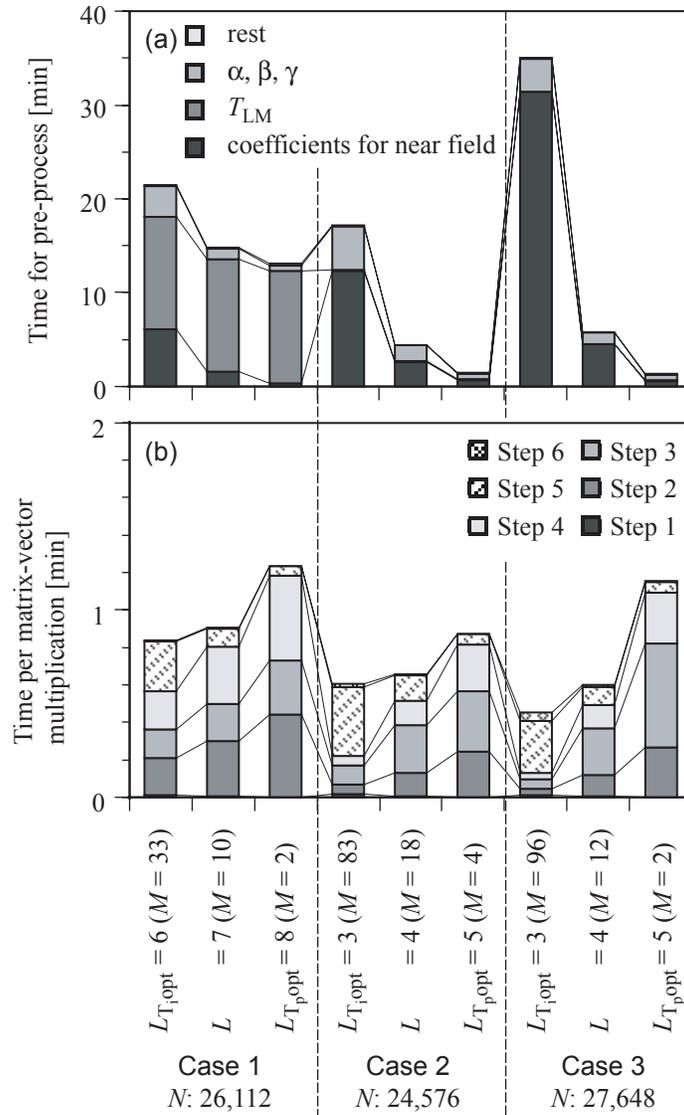


Fig. 5.8: Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM for analyzing three cases of problems at 500 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

ルになる．解析周波数，階層化レベルによらず，ケース 1 においては他のケースと比べて T_{LM} に関わる計算時間の割合が非常に高いことがわかる．この結果は第 2 章における理論的概算結果からの考察に一致しており，1 次元的な境界形状の問題に対して効率化するためには T_{LM} に関わる計算量を大幅に低減する必要がある．また，ケース 1 における T_{LM} に関わる計算時間は階層化レベルによらずほぼ同じ値をとっていることがわかる．これは Eq.(5.1) からわかるように，レベル l における T_{LM} に関わる計算量 \overline{C}_3^l がセルサイズ D_l の 3 乗に比例しており，セルサイズの大きい上位レベルにおける計算量が T_{LM} に

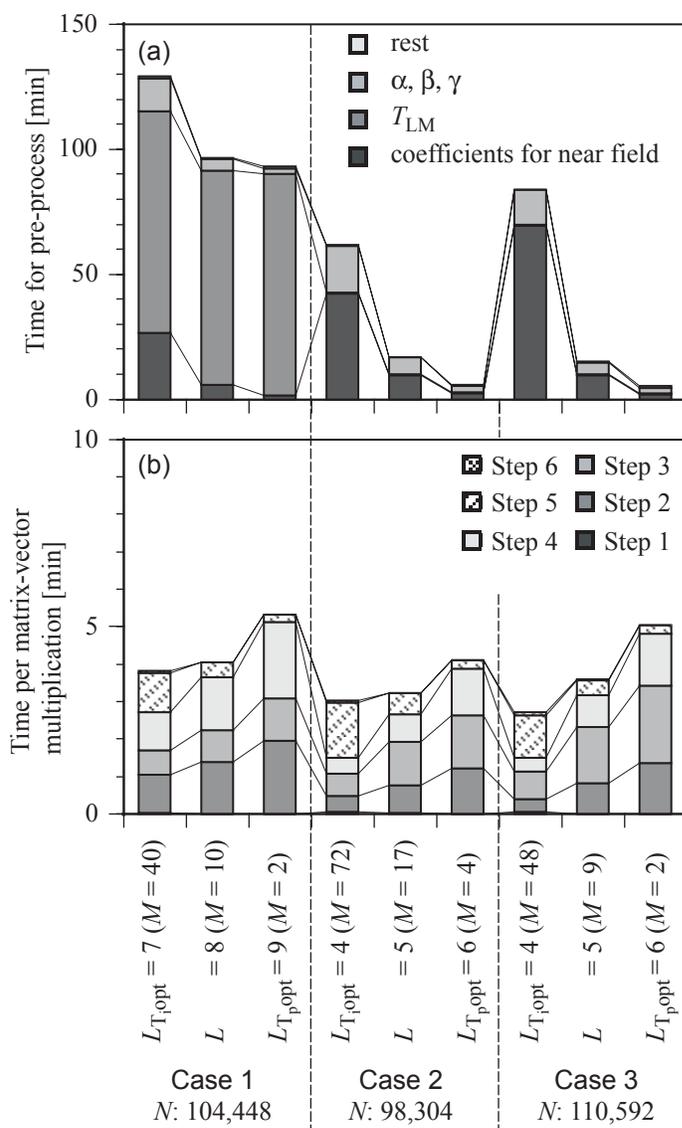


Fig. 5.9: Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM for analyzing three cases of problems at 1000 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

関わる計算量全体の大部分を占めるためである．このことから， T_{LM} に関わる計算量を低減するためには，上位レベルにおけるそれを低減することが最も重要と言える．そのためには Eq.(5.1) からわかるように，上位レベルにおける I'_l ， D_l を低減することが必要となる．

反復演算部 解析に FMBEM を適用した場合の節点数 N と反復演算部の計算時間との関係を Fig.5.5 に示す．但し，計算時間を最小化する階層化レベルにおける値のみ示している．1 次元的な分布であるケース 1 の計算時間が最も大きく，ついでケース 2, 3 と小さく

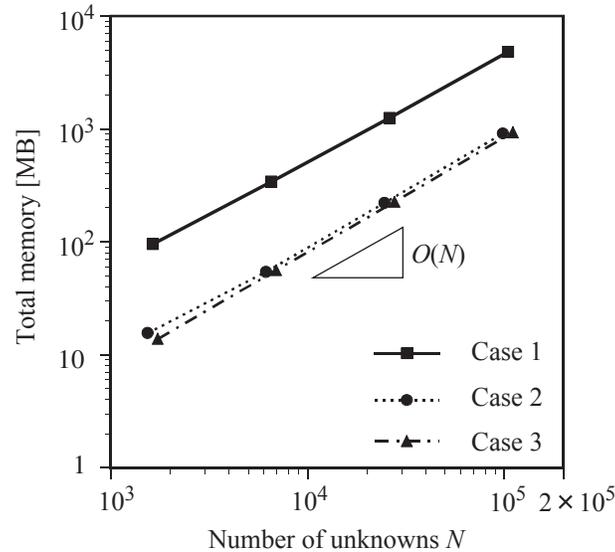


Fig. 5.10: Memory requirements for the FMBEM with the optimum cell level number L_{Mopt} .

なっていることがわかる。しかしながら、概して各ケース間で傾きの差が少ないこと、また節点数が増加するにつれて各ケース間の計算時間の比が小さくなっている傾向が見られる。原因としては、セットアップ部同様ケース 1, 3 において下位レベルのセル内で 1 次元的, 3 次元的な境界形状が成立していないこと、節点数が大きい範囲では下位レベルセルに関わる計算量が相対的に増加し、反復演算部全体として 2 次元的な境界形状の計算量に近づくことが考えられる。このことから、節点数の十分大きい問題においては、境界形状の違いが反復演算部の計算時間に及ぼす影響は比較的小さく、反復演算部の収束が比較的遅い場合には、全計算量に対しても境界形状の違いによる影響は小さいと考えられる。

次に計算時間の詳しい内訳を第 2 章の理論的概算にに対応する形で解析周波数ごとに Fig.5.6(b)~5.9(b) に示す。但し、セットアップ部同様の複数の階層化レベル L を設定している。 $L_{T_{popt}}, L_{T_{iopt}}$ の両レベルにおいて N によらずケース 1 の計算時間が大きいこと、その原因として、ステップ 2, 4 での計算量が他ケースと比べ大きいことが挙げられる。この結果は第 2 章における理論的概算結果からの考察に一致しており、1 次元的な境界形状の問題に対して 2, 3 次元的な分布と同様にまで効率化するためにはステップ 2, 4 に関わる計算量を低減する必要がある、そのためには Eqs.(5.2, 5.4) からわかるように、各レベルにおける M_l, D_l を低減することが重要といえる。

必要記憶容量 解析に FMBEM を適用した場合の節点数と必要記憶容量の関係を Fig.5.10 に示す。但し、必要記憶容量を最適化する階層化レベルにおける値のみ示している。傾きに関してはケース間の差が少なく、計算時間の場合と同様、理論的概算結果 Eq.(2.124) と異なっており、いずれも $O(N)$ 程度である。原因としては、計算量同様ケー

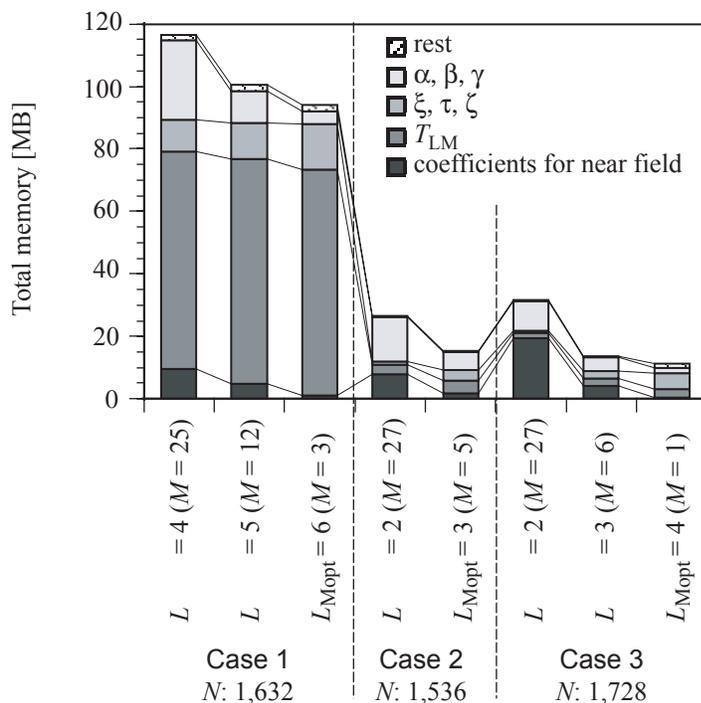


Fig. 5.11: Details of memory requirements for the FMBEM for three cases of problems at 125 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

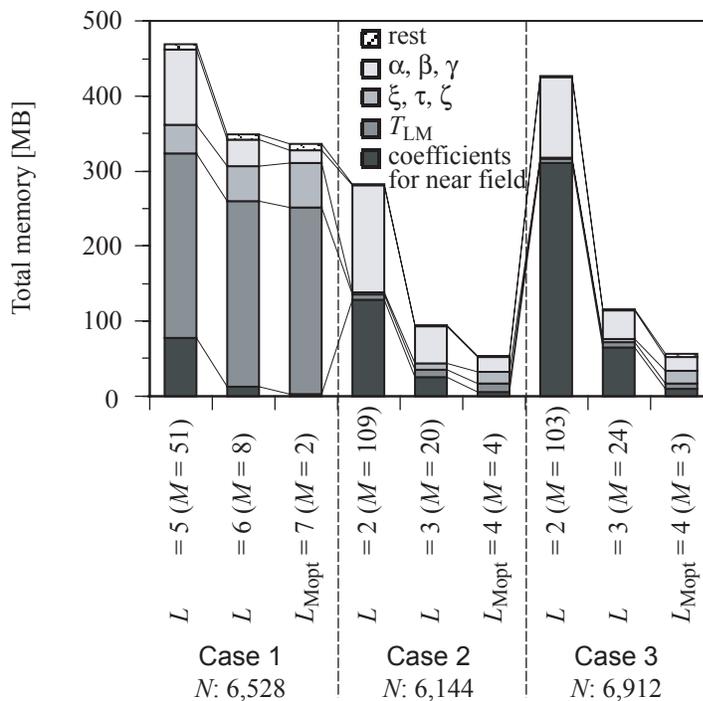


Fig. 5.12: Details of memory requirements for the FMBEM for three cases of problems at 250 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

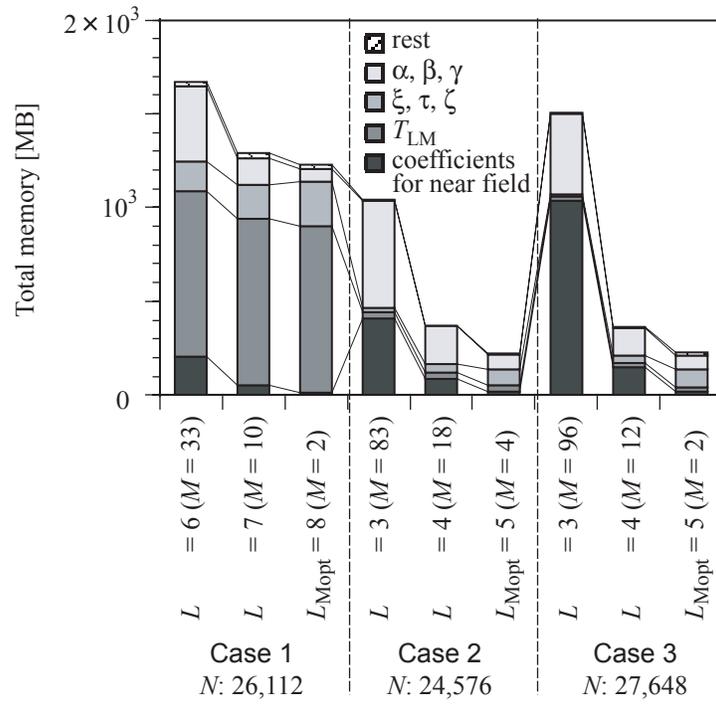


Fig. 5.13: Details of memory requirements for the FMBEM for three cases of problems at 500 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

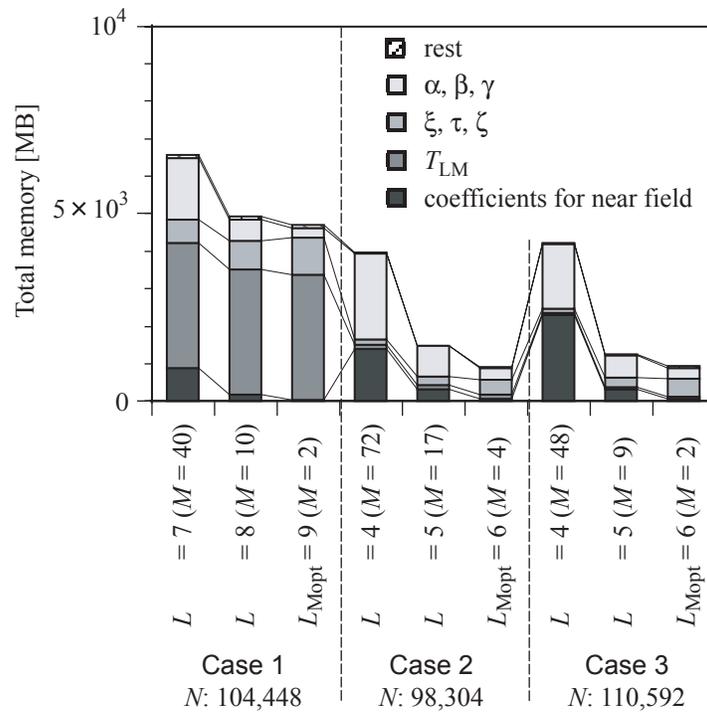


Fig. 5.14: Details of memory requirements for the FMBEM for three cases of problems at 1000 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

ス1, 3において下位レベルのセル内で1次元, 3次元な境界形状が成立していないことが考えられる。一方量的に比較すると, ケース2, 3はほぼ同様の必要記憶容量である一方, 1次元な境界形状であるケース1では他のケースのほぼ5~8倍もの記憶容量が必要となっている。次に必要記憶容量の詳しい内訳を第2章の理論的概算に対応する形で解析周波数ごとに Fig.5.11~5.14 に示す。解析周波数によらず, ケース1においては他のケースと比べて T_{LM} 及び ξ, τ, ζ に関わる必要記憶容量が大きく, 特に T_{LM} に関わる記憶容量は顕著である。この結果は第2章における理論的概算結果からの考察に一致するものであり, 1次元な境界形状の問題に対して効率化するためには T_{LM} 及び ξ, τ, ζ , 特に T_{LM} に関わる必要記憶容量を大幅に低減する必要がある。

また, セットアップ部の計算時間同様, ケース1における T_{LM} に関わる必要記憶容量は階層化レベルによらずほぼ同じ値をとっていることがわかる。これは, レベル L における T_{LM} に関わる必要記憶容量 E_4^L がセルサイズ D_l の2乗に比例しており, セルサイズの大きい上位レベルにおける必要記憶容量が T_{LM} に関わる必要記憶容量全体の大部分を占めるためである。このことから, T_{LM} に関わる必要記憶容量を低減するためには, セットアップ部における計算量同様, 上位レベルにおける必要記憶容量を低減することが重要と言え, そのためには Eq.(5.6) からわかるように, 上位レベルにおける I_l', D_l を低減することが必要となる。

以上の結果をまとめると, 以下のようなになる。

- 1次元な境界形状の問題に対して特別の配慮なく FMBEM 解析を行う場合, 計算量・必要記憶容量共に著しく増加し効率化を損ねる。
- 境界形状によらず同様の効率化を実現するためには, 1次元な境界形状の問題に対して以下の部分を効率化する必要がある。
 - 計算量:
 - * セットアップ部: T_{LM} 算出のための演算部。
 - * 反復演算部: ステップ2, 4に関わる演算部。
 - 必要記憶容量: 外向・内向係数 ξ, τ, ζ 及び T_{LM} に関わる部分。
 このためには, M_l, I_l', D_l を低減する必要がある。
- 計算量, 必要記憶容量ともに, 特に T_{LM} に関わる部分の効率化が最も重要である。

5.2.3 計算効率の理論的概算

前節では, 数値解析によるケーススタディを通して, 1次元な境界形状を持つ解析対象が2, 3次元な形状の場合と比べて計算量, 必要記憶容量共に著しく増加することを

確認した．ここでは，1 次元的な境界形状の問題において，階層セル構造の設定が計算効率に及ぼす影響について理論的概算に基づき考察する．解析対象と階層セル構造の位置関係が異なる 3 ケースを設定し，それぞれの概算結果を比較する．概算の設定条件は第 2 章の理論的概算と同様とする．

階層セル構造の設定に関して

効率化に配慮して階層セル構造の配置を決める場合，主にセルサイズ D_l を低減するものと，セル数 M_l を低減するものが考えられる．これらを含め，Fig.5.15 に示すように，解析対象に対する階層セル構造の配置が異なる 3 ケースを設定する．(a) Conv は特別の配慮なしに配置を決定した例であり，解析対象の中心とルートセルの中心が同一で解析対象の長さ方向とルートセルの辺が平行になる配置である．(b) M-size は主にセルサイズ D_l を低減するものであり，ルートセルの対角線上に解析対象を配置することでルートセルサイズを最小化する配置である．(c) M-num は主にセル数 M_l を低減するものであり，ルートセルの一辺に沿う形で解析対象を配置することで，要素を内包するセル数を各レベルで極力低減する．また，変換係数 T_{LM} 算出のための共有相互作用セル群 T'_l のセル数 I'_l については，Conv では任意形状の問題に対応できる設定として，Fig.5.1 に示すようにレベルによらず $I'_l = 316$ と固定することとする．M-size 及び M-num では解析対象に対して必要最小限の I'_l を各レベルで想定することとする．M-size 及び M-num における共有相互作用セル群 T'_l の例をそれぞれ Fig.5.16, 5.17 に示す．解析対象が 1 次元的な境界形状と見なせる階層化レベルにおいては，M-size の場合 $I'_l = 28$ (2 次元空間の場合 $I'_l = 12$)，M-num の場合 $I'_l = 4$ となる．なお，解析対象は理想的な 1 次元的形状として直線状のものを想定し，最下位レベルのセルに対しても厚みが十分小さいものとする．また，各ケースにおけるレベル l でのセルを内包する球の直径をケースの名称を用いて $D_{(\text{casename})l}$ と表し， $D_{(\text{Conv})l} = D_{(\text{M-num})l} = D_l$ と表すこととする．

計算量の評価

セットアップ部：変換係数 T_{LM} 算出のための演算部 Eq.(5.1) におけるレベル l での変換係数 T_{LM} 算出のための計算量 \overline{C}_3^l を概算する．

Conv $I'_l = 316$ から，以下のように表される．

$$\overline{C}_3^l \sim (kD_{(\text{Conv})l})^3 \cdot 316 = 316 \cdot (kD_l)^3 \quad (5.9)$$

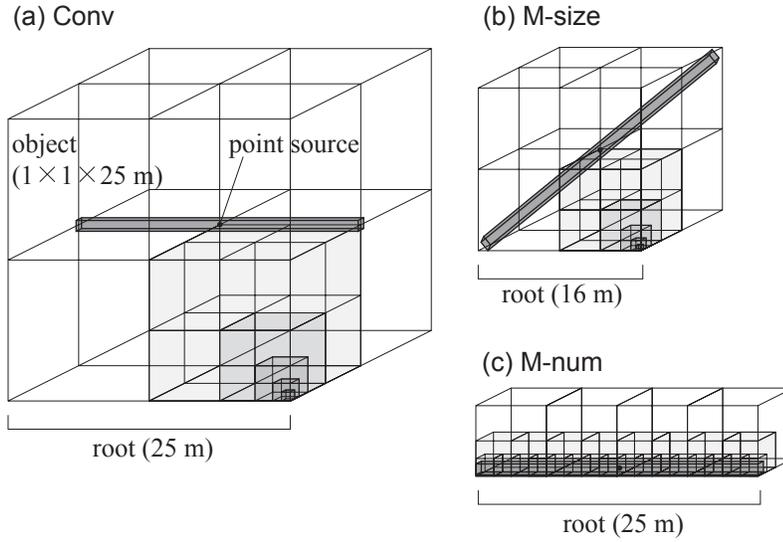


Fig. 5.15: Three arrangements of hierarchical cell structure used in three setting, Conv, M-size, and M-num: (a) conventional arrangement (for Conv), (b) arrangement minimizing the size of the root cell (for M-size), and (c) arrangement minimizing the number of cells M_l (for M-num). Description of point sources and the size of root cells and objects are for numerical study.

M-size $I'_l = 28$, $D_{(M-size)l} = \frac{1}{\sqrt{3}}D_l$ から, 以下のように表される.

$$\overline{C}_3^l \sim (kD_{(M-size)l})^3 \cdot 28 = (k \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}D_l)^3 \cdot 28 \approx 5.39 \cdot (kD_l)^3 \quad (5.10)$$

$I'_l = 316$ の設定が使用された場合は, 計算量低減効果は $D_{(M-size)l}$ の低減のみによることになり, 次式で表される.

$$\overline{C}_3^l \sim (kD_{(M-size)l})^3 \cdot 316 = (k \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}D_l)^3 \cdot 316 \approx 60.8 \cdot (kD_l)^3 \quad (5.11)$$

M-num $I'_l = 4$ から, 以下のように表される.

$$\overline{C}_3^l \sim (kD_{(M-num)l})^3 \cdot 4 = 4 \cdot (kD_l)^3 \quad (5.12)$$

以上の結果から, M-num が最も効率化されることがわかる. 全レベルの総和での比較においては, 各ケースで階層化レベルの深さが異なる可能性があることから, ここでの比較結果が直接的には反映されない. しかしながら, 上位レベルにおける \overline{C}_3^l の割合は下位レベルにおけるそれより著しく大きいことから, 全レベルで \overline{C}_3^l の総和をとった場合でも M-num が最も効率化されると考えられる. 解析対象がある程度の厚みを持つ場合, M-size, M-num においては Eqs.(5.10, 5.12) が全レベルでは成立しないが, T_{LM} 算出のための計算量 Eq.(5.1) 全体に占める割合が大きい上位レベルにおいては成立する. 従って, 解析対象が厚みを持つ場合においても M-num が最も効率化されると考えられる.

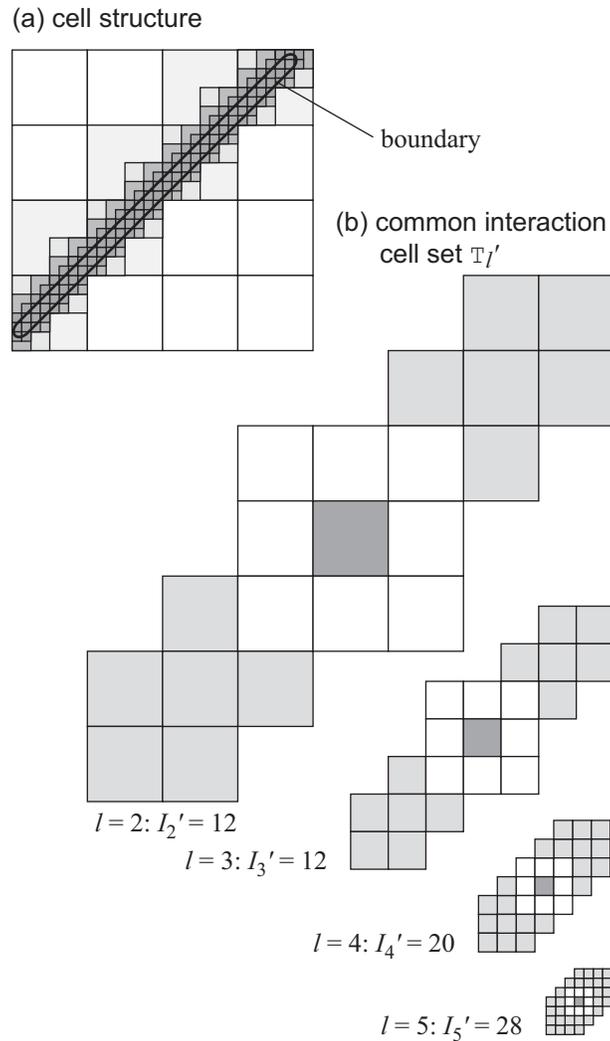


Fig. 5.16: (a) An example of 1D-shaped object and hierarchical cell structure which minimizes the size of cells D_l , and (b) common interaction cell sets T_l' for pre-calculation of T_{LM} at levels (in 2-D).

反復演算部：ステップ 2~4 に関わる演算部 反復演算部のステップ 2~4 に関しては，Eqs.(5.2,5.3,5.4) からわかるように，ステップ 2~4 の全てに $M_l(kD_l)^2$ が共通していることから，これを概算することとする．

Conv $M_l = 4 \cdot 2^l$ から，以下のように表される．

$$M_l(kD_{(\text{Conv})l})^2 \sim 4 \cdot 2^l (kD_l)^2 \quad (5.13)$$

M-size 解析対象が内部にルートセルの対角線を含んだ配置でなく，Fig.5.16(a) に示すようにセル数を最小とするように対角線に隣接してルートセル内に配置されている場合，3

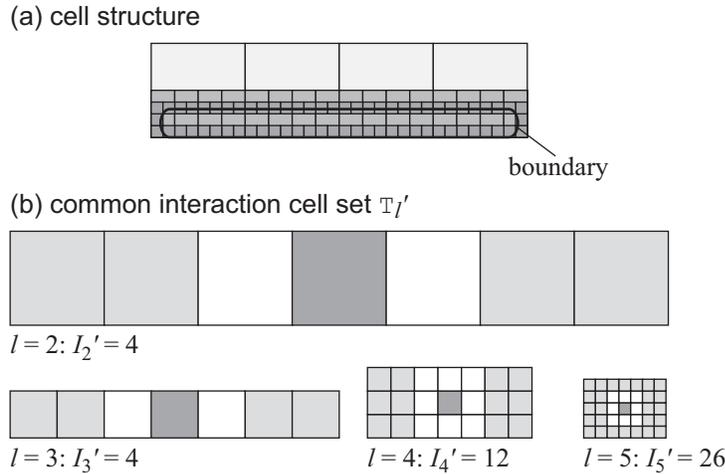


Fig. 5.17: (a) An example of 1D-shaped objects and hierarchical cell structure which minimizes the number of cells M_l , and (b) common interaction cell sets \mathbb{T}_l' for pre-calculation of T_{LM} at levels (in 2-D).

次元空間では $M_l = 3(2^l - 1) + 1$ となることから，以下のように表される．

$$M_l(kD_{(M-size)l})^2 \sim (3(2^l - 1) + 1) \cdot (k \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}D_l)^2 = \left(2^l - \frac{2}{3}\right) \cdot (kD_l)^2 \quad (5.14)$$

M-num $M_l = 2^l$ から，以下のように表される．

$$M_l(kD_{(M-num)l})^2 \sim 2^l \cdot (kD_l)^2 \quad (5.15)$$

以上の結果から，M-size が最も効率化されることがわかる．しかしながら，解析対象がある程度の厚みを持つ場合，M-size においてはレベルによらず M_l または $D_{(M-size)l}$ のいずれかが増加するのに対し，M-num では上位レベルにおいて計算量が変化しないことから，実際の解析においては M-num の方が効率的である可能性がある．また，全レベルの総和での比較においては，各ケースで階層化レベルの深さが異なることから，ここでの比較結果が直接的には反映されない．

必要記憶容量の評価

外向・内向係数 ξ, τ, ζ ・変換係数 T_{LM} のための記憶容量 各レベルにおける外向・内向係数 ξ, τ, ζ のための記憶容量 E_3^l については，Eq.(5.5) からわかるように，上記の反復演算部の概算と同様 $M_l(kD_l)^2$ で決定されるため省略し，ここでは変換係数 T_{LM} のための記憶容量 E_4^l のみ概算する．

Conv $I'_l = 316$ から，以下のように表される．

$$E_4^l \sim (kD_{(\text{Conv})l})^2 \cdot 316 = 316 \cdot (kD_l)^2 \quad (5.16)$$

M-size $I'_l = 28$ から，以下のように表される．

$$E_4^l \sim (kD_{(\text{M-size})l})^2 \cdot 28 = \left(k \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} D_l\right)^2 \cdot 28 \approx 9.33 \cdot (kD_l)^2 \quad (5.17)$$

$I'_l = 316$ の設定が使用された場合は，計算量低減効果は $D_{(\text{M-size})l}$ の低減のみによることになり，次式で表される．

$$E_4^l \sim (kD_{(\text{M-size})l})^2 \cdot 316 = \left(k \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} D_l\right)^2 \cdot 316 \approx 105.3 \cdot (kD_l)^2 \quad (5.18)$$

M-num $I'_l = 4$ から，以下のように表される．

$$E_4^l \sim (kD_{(\text{M-num})l})^2 \cdot 4 = 4 \cdot (kD_l)^2 \quad (5.19)$$

以上の結果から，M-num が E_4^l を最も効率化されることがわかる．全レベルの総和での比較においては，各ケースで階層化レベルの深さが異なることから，ここでの比較結果が直接的には反映されない．しかしながら，上位レベルにおける E_4^l の割合は下位レベルにおけるそれより著しく大きいことから，全レベルで E_4^l の総和をとった場合でも M-num が最も効率化されると考えられる．解析対象がある程度の厚みを持つ場合，M-size，M-num においては Eqs.(5.17, 5.19) が全レベルでは成立しないが， T_{LM} のための記憶容量 Eq.(5.6) 全体に占める割合が大きい上位レベルにおいては成立する．従って，解析対象が厚みを持つ場合においても M-num が最も効率化されると考えられる．

以上の結果から，セットアップ部の計算量，必要記憶容量に関しては M-num の設定が最も効率的であると考えられる．

5.2.4 数値解析による検討

ここでは，数値解析によるケーススタディを通して，前節での理論的概算による考察を検証する．また，解析対象に厚みがある場合の影響について考察する．

解析方法

1 次元的な境界形状の問題として Fig.5.2 におけるケース 1 を解析対象とし，FMBEM 解析を行う．Fig.5.15 に示すように，前節の理論的概算における各配置と対応するように，解析対象と階層セル構造の位置関係が異なる 3 つの配置を用意する．但し M-size に

関しては，理論的概算時と異なり厚みのある対象に対してルートセルを最小化するため，解析対象の内部にルートセルの対角線を含んだ配置としている．セットアップ部における T_{LM} の計算方法については，Conv, M-size では Fig.5.1 に示したように任意の問題に対応できるよう共有相互作用セル群 T'_l のセル数 $I'_l = 316$ とし，M-num では Fig.5.17 に示すように境界形状を考慮して必要最小限の T'_l のみ考慮した．境界は全面剛とし，四角形一定要素にて解析波長の $1/8$ 以下のサイズに離散化する．FMBEM の各種設定については第 4 章の結果に準ずる．なお，以下のグラフでは比較対象としてほぼ同自由度の 2, 3 次元的な境界形状の問題 (Fig.5.2 のケース 2, 3) の解析結果を合わせて表示する．

結果と考察

計算量

セットアップ部 セットアップ部における計算時間の詳しい内訳を解析周波数ごとに Fig.5.18(a)~5.21(a) に示す．但し，セットアップ部，反復演算部の各計算時間を最小化するセル階層化レベル (それぞれ $L_{T_p, opt}$, $L_{T_i, opt}$ とする) を含んだ複数の階層化レベル L を設定している． $L_{T_p, opt}$ 同士で T_{LM} に関わる計算時間を比較すると，M-size に関しては， $I'_l = 316$ の設定を用いているにも関わらずセルサイズ D_l の減少により低減効果が見られること，M-num に関しては I'_l の減少によるさらなる顕著な低減効果が見られることがわかる．また，結果的に M-num においてはセットアップ部の計算時間全体として 2, 3 次元的な境界形状の場合とほぼ同様にまで低減されている．このことから，反復演算部の収束が比較的速い場合には，M-num の設定を採用することで大きな計算時間低減効果が得られると言える．また，反復回数が大きい場合の最適レベル，即ち $L_{T_i, opt}$ 同士で比較した場合も同様の結果となっている．節点数 (自由度) N とセットアップ部の計算時間との関係を Fig.5.22 に示す．但し， $L_{T_p, opt}$ における値のみ示している．M-num の設定の場合は 2, 3 次元的な境界形状の解析における計算時間を表すラインにほぼ重なる結果となることが確認できる．また，M-num の設定の場合は T_{LM} に関わる計算時間の割合が小さいことから，他の設定に比べて若干傾きが緩くはなっているものの，2, 3 次元的な分布の問題と比べるとわずかに急であることがわかる．従って，さらなる大規模な問題においては 2, 3 次元的な境界形状の問題よりも非効率となる可能性があるが，一般に大規模な問題になるほど反復回数が増加し，反復演算部の計算時間の割合が高くなることから，実際の大規模解析にあたっては総計算量として大きな差にはなりにくいと考えられる．

反復演算部 反復演算部における計算時間の詳しい内訳を解析周波数ごとに Fig.5.18(b)~5.21(b) に示す．ケース 1 では $L_{T_p, opt}$, $L_{T_i, opt}$ の両レベルにおいて M-size が最も計算時間が大きい．これは厚みの影響により M_l が増加していること，解析対象がルートセル

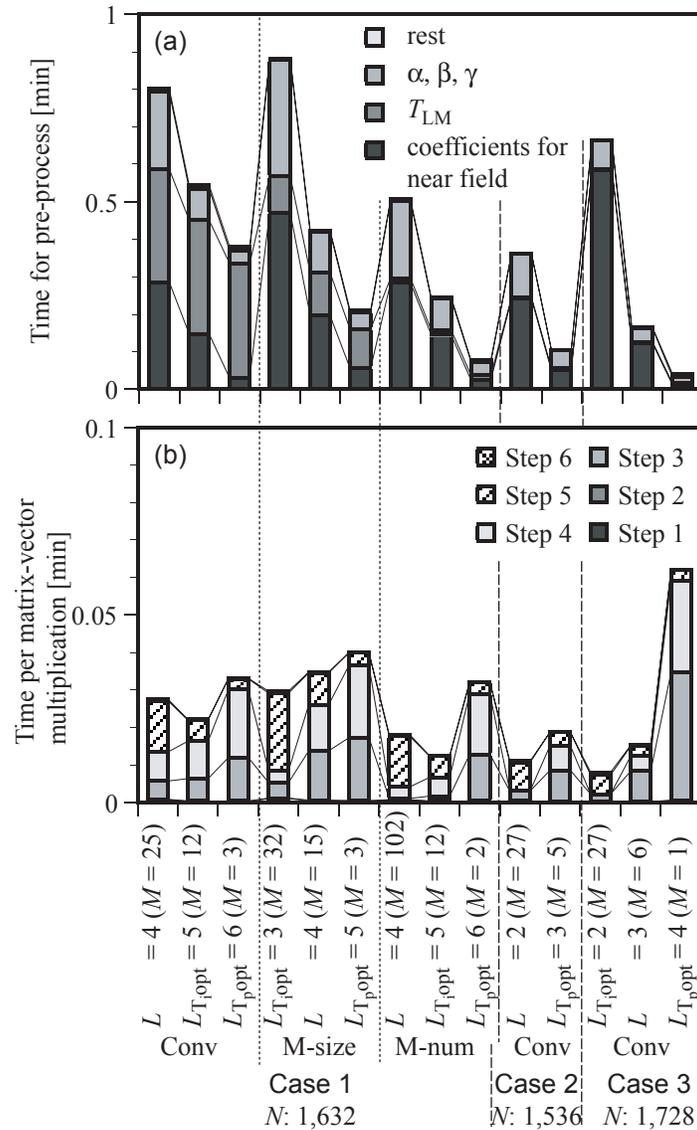


Fig. 5.18: Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 125 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

の対角線位置に配置されていることにより各セルの相互作用セル数が他の設定に比べ大きくなっていることが原因と考えられる。このことから、理論的概算と異なり、実際に厚みのある解析対象に対しては M-size の設定は反復演算部においても効果的でないといえる。一方 M-num においてはステップ 2~4 の計算時間が減少しており、結果として全計算時間がケース 2, 3 の場合と同程度にまで低減している。節点数 (自由度) N と反復演算部の計算時間との関係を Fig.5.23 に示す。但し、 $L_{T_1,opt}$ における値のみ示している。M-num の設定でケース 1 を解析した場合は N によらずケース 2 と同様の計算時間となっ

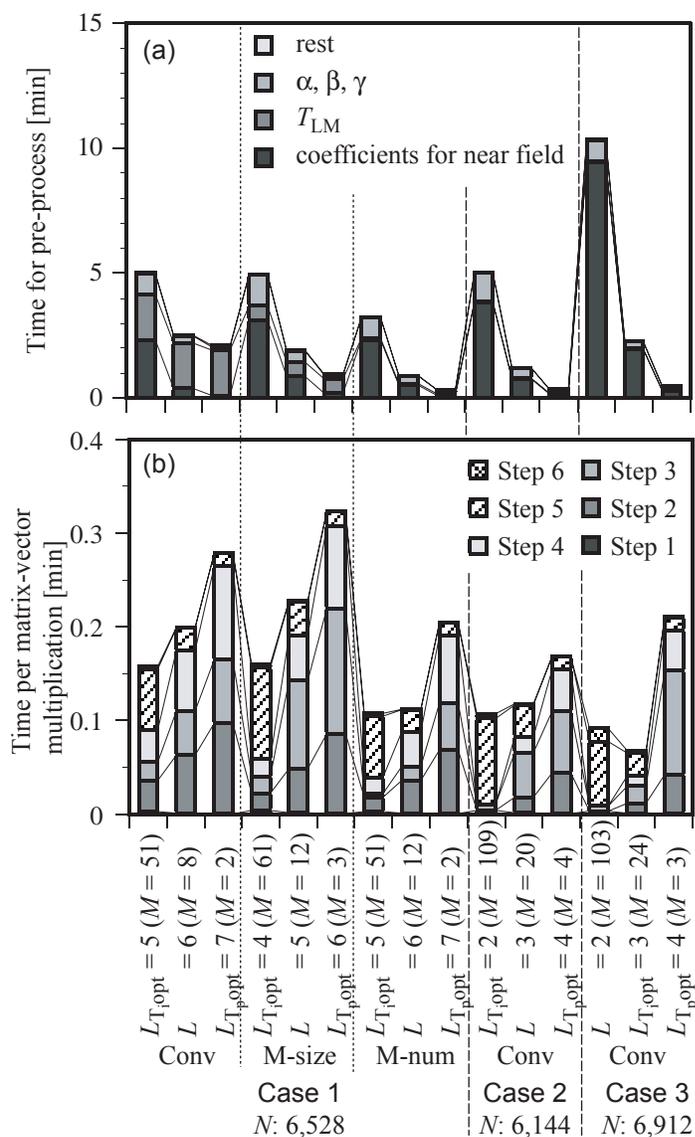


Fig. 5.19: Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 250 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

ており， N の大きい範囲ではケース 3 の計算時間にまで近づいている．更に大きい N の範囲では，セルの階層化が深くなり，ケース 1, 3 においてもセル内で境界が 2 次元のとみなせるセルが増加することから，境界形状（ケースの違い）が計算時間に及ぼす違いは更に減少するものと考えられる．

必要記憶容量 必要記憶容量の詳しい内訳を解析周波数ごとに Fig.5.24 ~ 5.27 に示す．但し，必要記憶容量を最小化するセル階層化レベル $L_{M,opt}$ を含んだ複数の階層化レベル

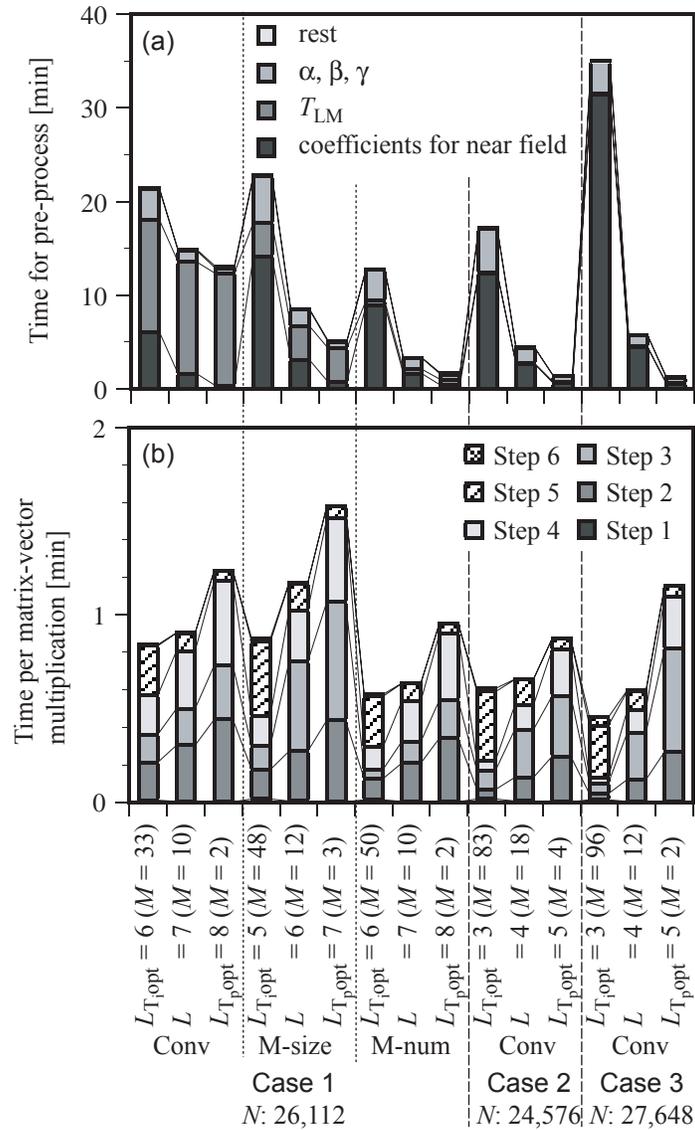


Fig. 5.20: Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 500 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

L を設定している．M-size に関しては， $I'_l = 316$ の設定を用いているにも関わらずセルサイズ D_l の減少により低減効果が見られること，M-num に関しては I'_l の減少によるさらなる顕著な低減効果が見られることがわかる．また，結果的に M-num においては全必要記憶容量が L_{Mopt} では 2, 3 次元的な境界形状の場合とほぼ同様にまで，その他の L ではそれ以上に低減されている．節点数（自由度） N と必要記憶容量との関係を Fig.5.28 に示す．但し， L_{Mopt} における値のみ示している．傾きに関してはケース間，セル構造の設定による差が少なく，いずれも $O(N)$ 程度である．原因としては，計算量同様ケース 1，

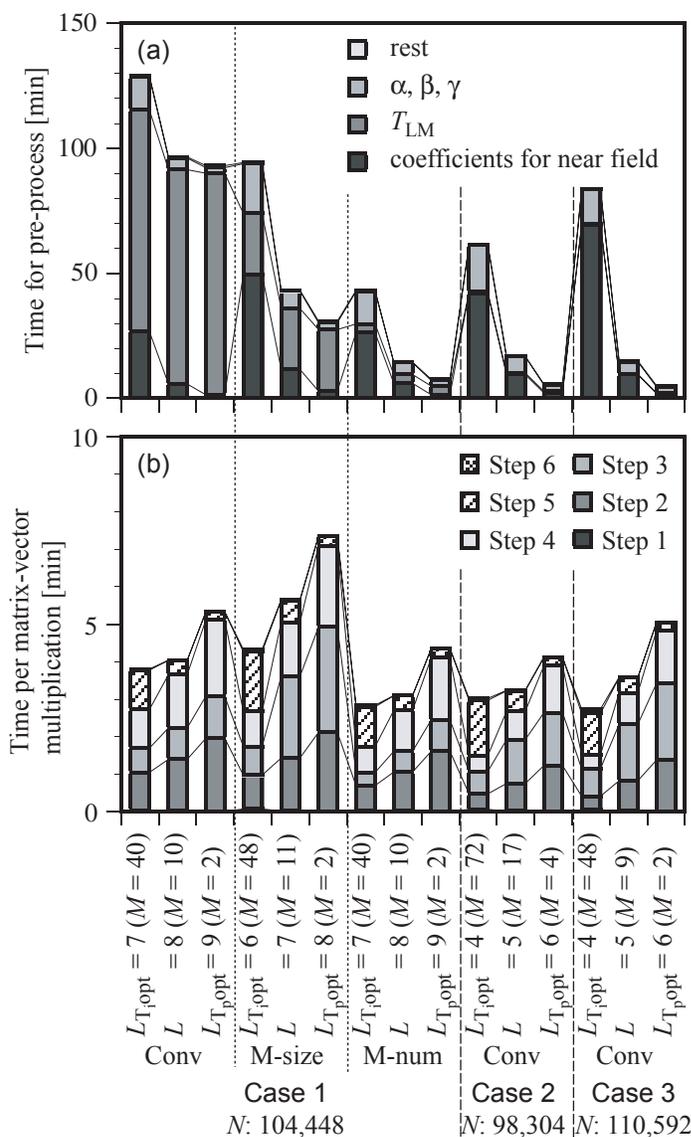


Fig. 5.21: Details of computational time (a) for the pre-process and (b) per matrix-vector multiplication of the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 1000 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

3において下位レベルのセル内で1次元的, 3次元的な境界形状が成立していないことが考えられる。一方量的に比較すると, M-numの設定でケース1を解析した場合はケース2, 3とほぼ同様の必要記憶容量となっている。以上の結果から, M-numの設定が厚みのある1次元的境界形状の問題においても必要記憶容量を十分低減すること, その結果, 2, 3次元的形状の問題の場合と同様の容量とできることが示された。

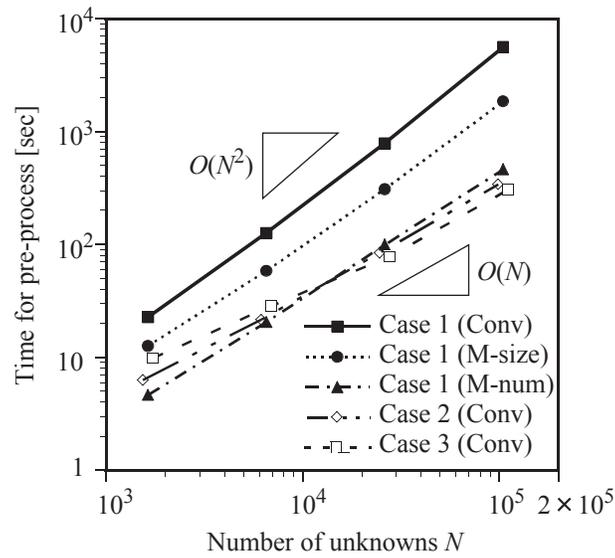


Fig. 5.22: Computational time for pre-process of the FMBEM with the optimum cell level number $L_{T_p, \text{opt}}$.

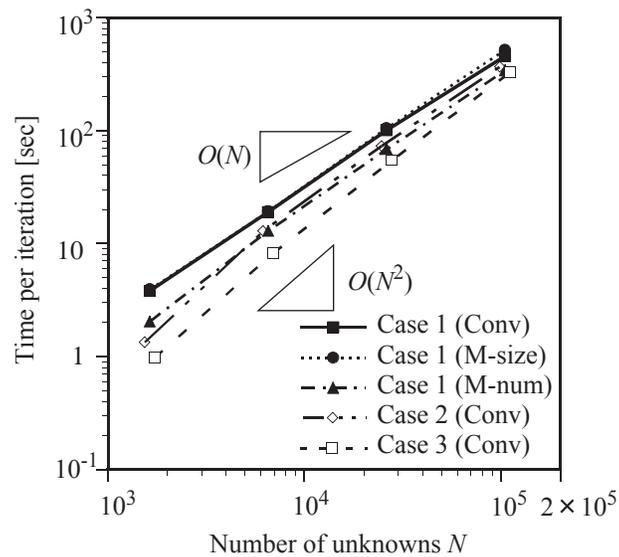


Fig. 5.23: Computational time per iteration for the FMBEM with the optimum cell level number $L_{T_i, \text{opt}}$.

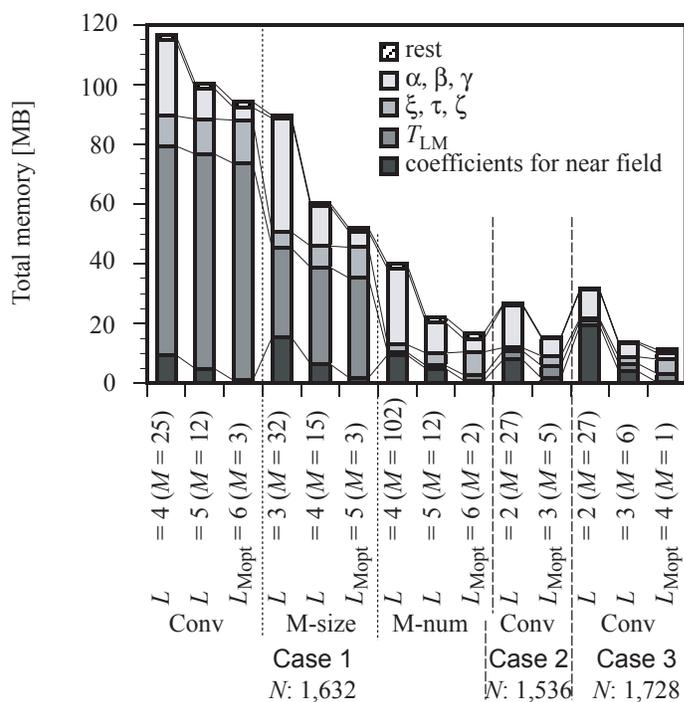


Fig. 5.24: Details of memory requirements for the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 125 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

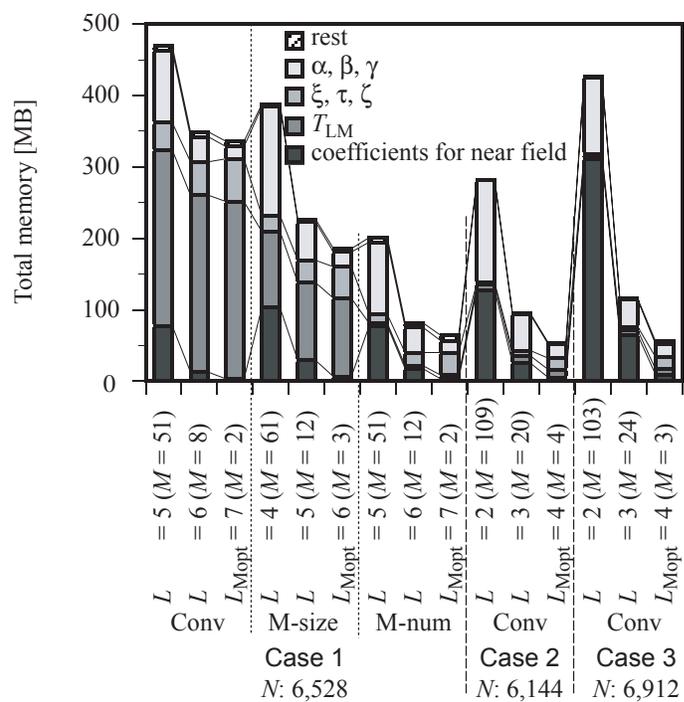


Fig. 5.25: Details of memory requirements for the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 250 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

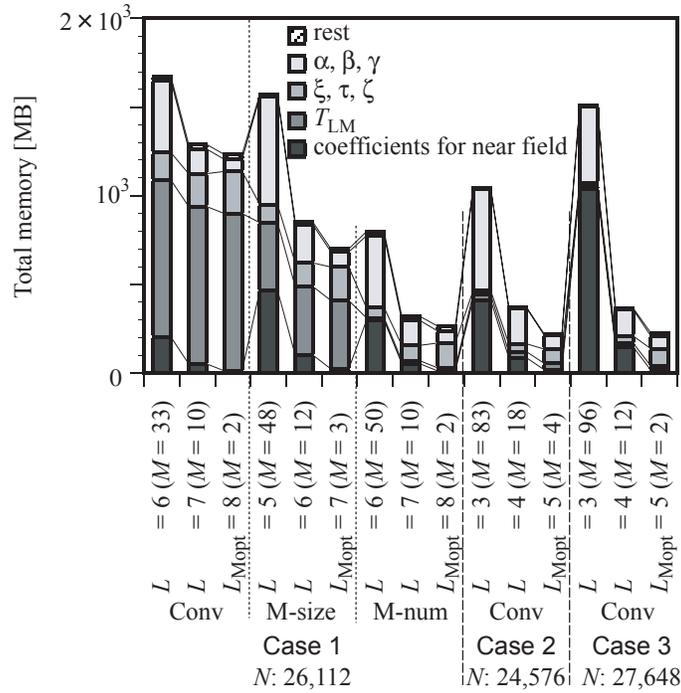


Fig. 5.26: Details of memory requirements for the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 500 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

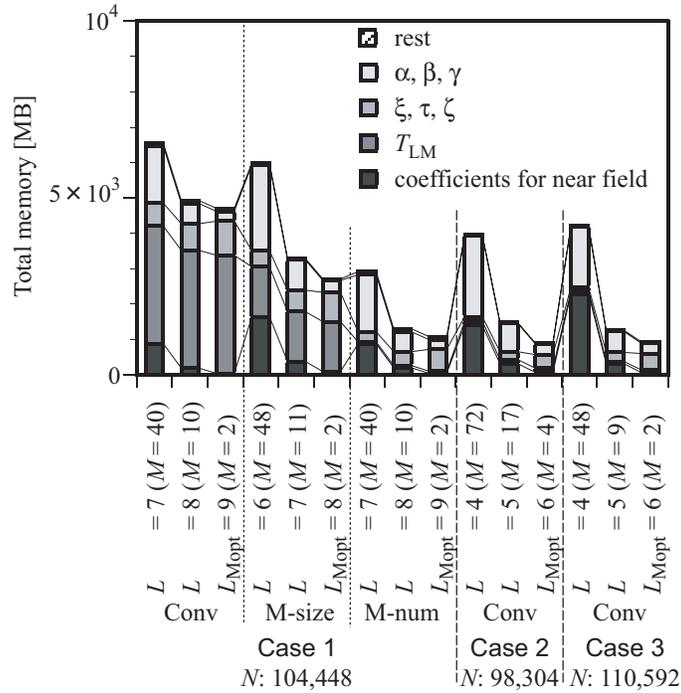


Fig. 5.27: Details of memory requirements for the FMBEM with three types of hierarchical cell structure at 1000 Hz. N is degree of freedom (DOF). M is the average number of nodes in a cell at the lowest level L .

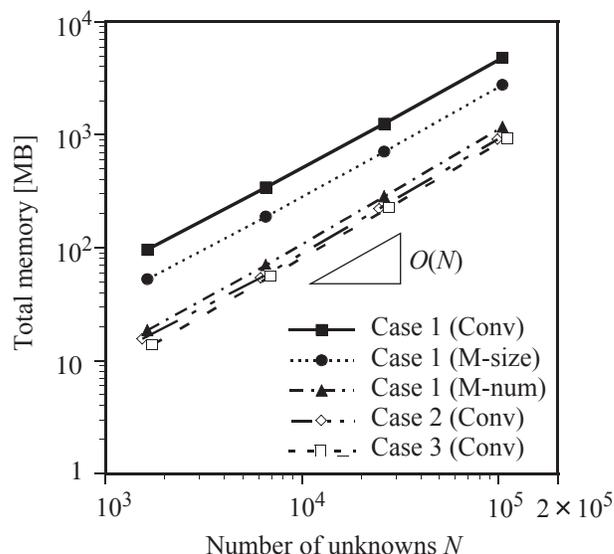


Fig. 5.28: Memory requirements for the FMBEM with the optimum cell level number L_{Mopt} .

5.2.5 階層セル構造の配置方針

ここでは上記の理論的概算，数値解析による検討で最も効率的であった M-num の設定を実現するためのセル構造の配置方針を提案する．ここで提案する方針は任意の問題に対して常に最適であるとは限らないが，階層セル構造の設定が計算効率に大きく影響する 1 次元的な境界形状の問題に対しては十分効率的な配置となること，また，2, 3 次元の形状の問題に対してはセル構造の設定が計算効率にあまり影響しないことを考えると十分なものといえる．一般に個々の問題に対して完全に最適な設定を実現するためには非常に複雑なアルゴリズムや付加的な計算量・必要記憶容量が必要であるが，本方法は完全な最適化を実現しない反面単純な考え方に基づいている．Fig.5.29 に配置の手順に対応した本方針の概念図を示す．手順は以下のとおりである．

- (i) 解析対象の長さが最長となる方向 d_1 を見つけ，その方向 d_1 での解析対象の長さ w_1 を求める．
- (ii) d_1 に直交する平面内で解析対象の長さが最長となる方向 d_2 を見つけ，その方向 d_2 での解析対象の長さ w_2 を求める．
- (iii) d_1, d_2 に直交する方向 d_3 での解析対象の長さ w_3 を求める．
- (iv) 解析対象全体を内包する $w_1 \times w_2 \times w_3$ の直方体を想定し，1 辺 w_1 のルートセルを持つ階層セル構造の内部に直方体とセルの辺が平行となるよう，かつ辺，面，頂点をできるだけ共有するように直方体を配置する．

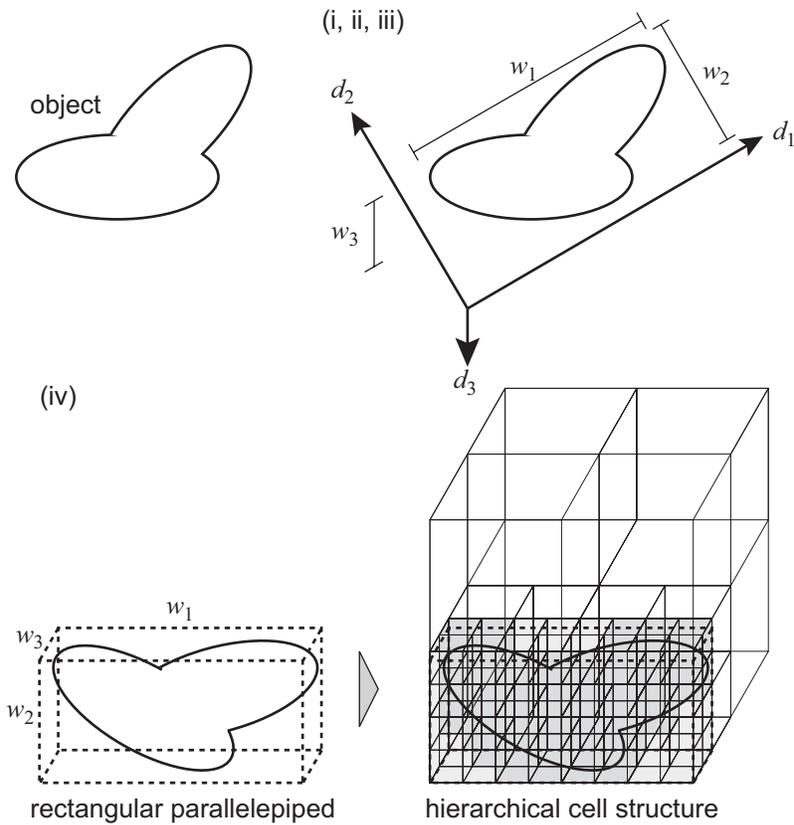


Fig. 5.29: Diagram of procedures (i) to (iv) to determine an appropriate position of hierarchical cell structure.

5.2.6 実問題の解析による有効性の検証

1次元的な境界形状とみなせる実問題への適用例として遮音壁のある音場の解析を行い、上述した階層セル構造の設定の有効性を検証する。

解析方法

無限大の剛な地表面上の剛な有限遮音壁（厚さ 0.1m）と点音源，受音面からなる解析モデルの断面図と平面図をそれぞれ Fig.5.30(a, b) に示す．無限大の遮音壁と見なせるよう、受音面から壁の側端部までの距離を壁高さに対して十分確保し、側方からの回折波の影響が少なくなるよう配慮した．これにより理論近似解との比較による精度の検証が可能となる．その他の計算条件については Table 5.1 に示すとおりである．

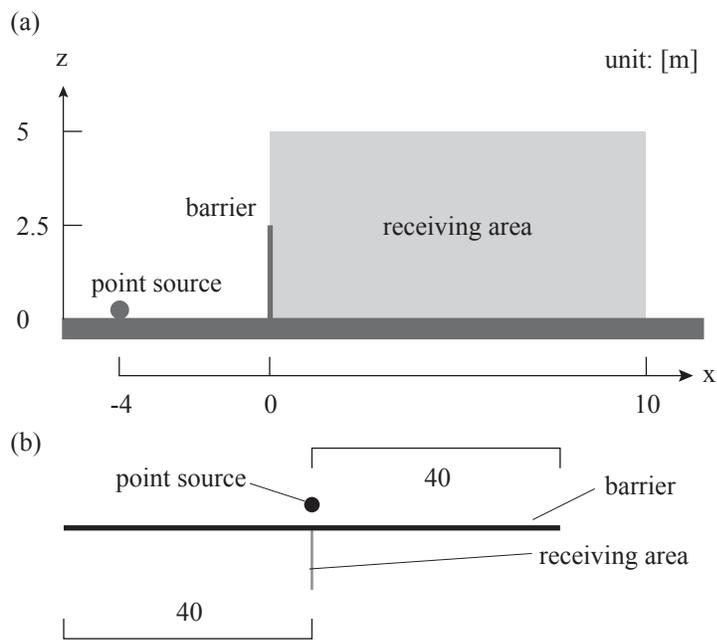


Fig. 5.30: Geometry of a rigid straight barrier, a point source, a receiving area, and an infinite rigid ground: (a) site cross-section, and (b) site plan.

Table 5.1: Computational efficiency for analyzing sound fields with a rigid barrier and a point source on an infinite rigid ground, using the FMBEM with conventional setting and with M-num setting.

Frequency	Type of FMBEM	N	L	Iteration	Time [min]	Memory [MB]
500	Conv	63,448	8	12	274	11,224
500	M-num	63,448	8	12	68	2,041
1,000	M-num	253,792	9	14	363	8,230

結果と考察

計算精度： Conv の設定を用いた FMBEM，M-num の設定を用いた FMBEM，及び理論近似解による受音エリアにおける挿入損失分布の計算結果を解析周波数ごとに Fig.5.32, 5.33 に示す．但し，理論近似解は半無限障壁に関する Macdonald の厳密解 [74, 75] を用い，Fig.5.31 に示すような 2 つのパスを考慮して算出した．階層セル構造の設定の異なる FMBEM 同士では分布の視覚的な違いは認められない．また，理論近似解とも解析周波数によらず良い対応を示している．FMBEM の両設定間の受音エリア上での音圧分布の違い

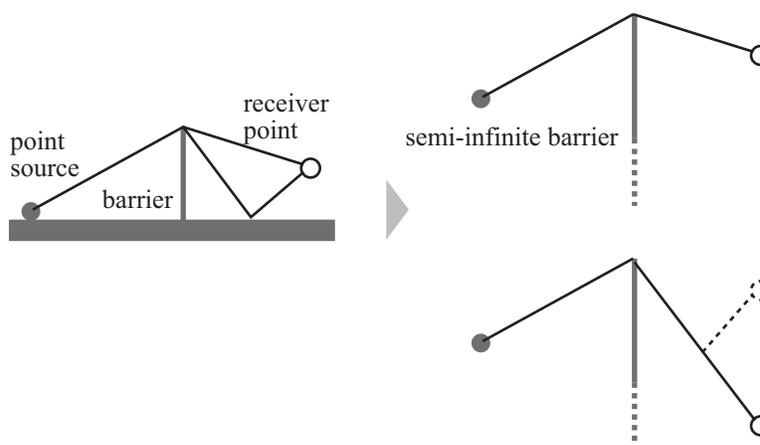


Fig. 5.31: replacement of an infinite rigid ground and a barrier with a semi-infinite barrier.

Table 5.2: Differences between results using the FMBEM with conventional setting and with M-num setting, averaged over all points on the receiving area. ε_{ad} is defined as Eq. (5.20).

Frequency	N	L	$10 \log_{10} \varepsilon_{\text{ad}}$ [dB]
500	63,448	8	-32.3

いを Table 5.2 に示す．但し，節点位置の空間サンプリングによる影響を避けるため，評価量として次式を用いることとする．

$$\varepsilon_{\text{ad}} = \frac{\sum_n ||p_{\text{con}}(\mathbf{r}_n)|^2 - |p_{\text{ad}}(\mathbf{r}_n)|^2|}{\sum_n |p_{\text{con}}(\mathbf{r}_n)|^2} \quad (5.20)$$

但し， $p_{\text{con}}(\mathbf{r}_n)$ ， $p_{\text{ad}}(\mathbf{r}_n)$ ：それぞれ従来の FMBEM，M-num の設定に基づく FMBEM による受音点 \mathbf{r}_n での音圧．

設定の違いによる精度への影響が非常に微小であることが確認できる．

計算効率：計算量・必要記憶容量を計算条件と合わせて Table 5.1 に示す．500Hz の場合，Conv に比べ adapt では計算時間が 1/4 以下にまで，必要記憶容量が 1/5 以下にまで低減されており，M-num の設定が実問題の解析において有効であることが検証されたといえる．

5.3 セル階層化レベルの設定に関する検討

本節では計算効率の理論的概算及び FMBEM による解析結果をもとに，計算量及び必要記憶容量を最小化するセル階層化レベルの設定について検討し，具体的な設定方法を提案する．

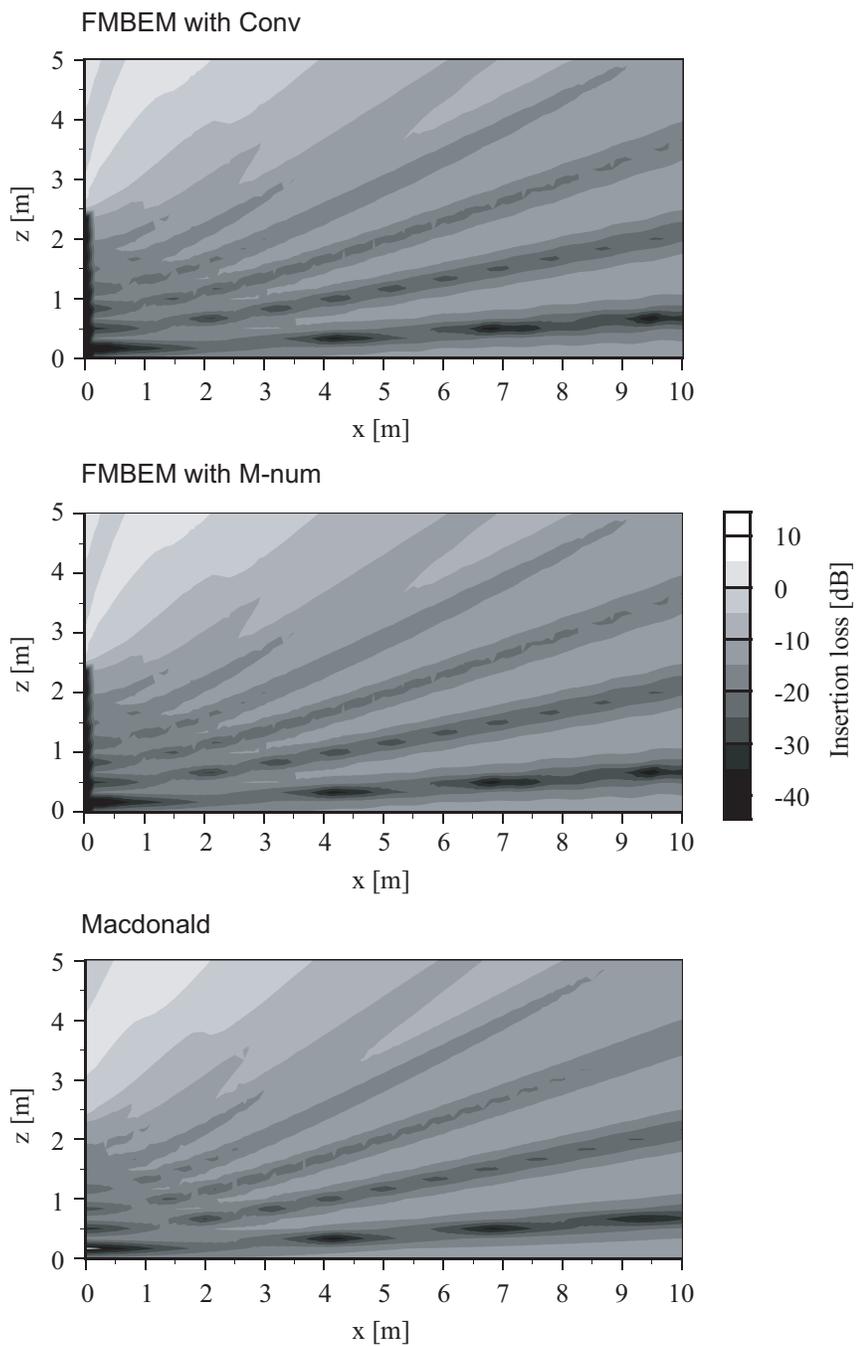


Fig. 5.32: Distribution of insertion loss in the receiving area at 500 Hz, using the FMBEM with conventional setting and with M-num setting, and using Macdonald approximation.

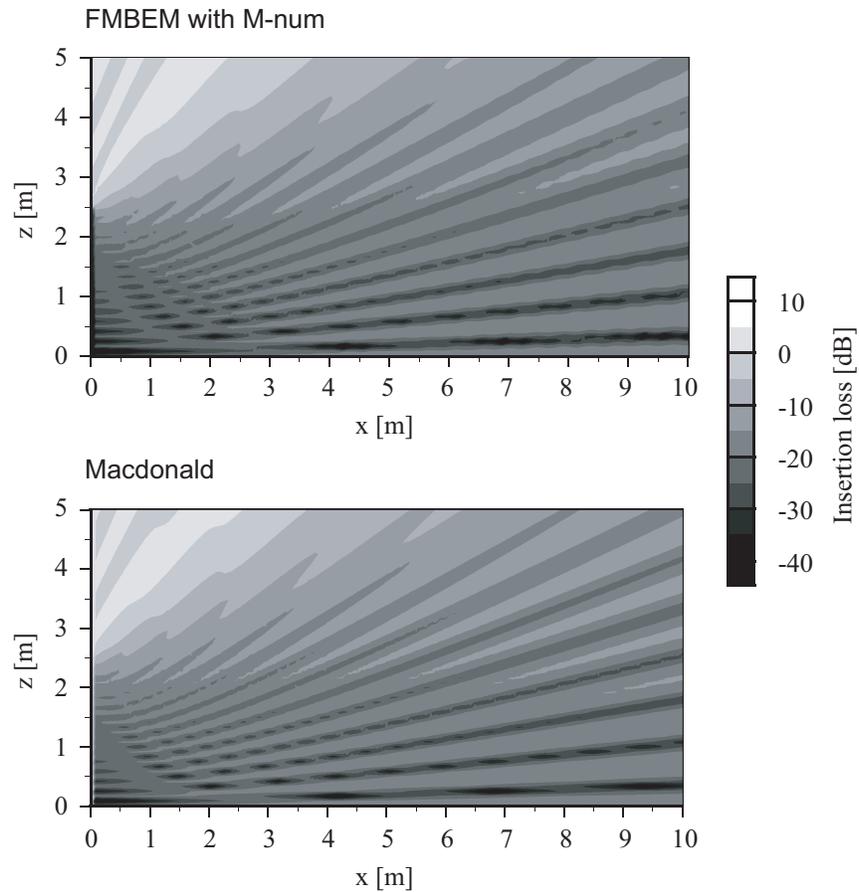


Fig. 5.33: Distribution of insertion loss in the receiving area at 1000 Hz, using the FMBEM with M-num setting, and using Macdonald approximation.

5.3.1 計算効率の理論的概算による考察

ここでは第2章第6節における計算効率の理論的概算をもとに，計算効率を最適化する階層化レベルについて考察する．第2章第6節と同様，Fig.2.11に示すような，節点分布が異なる典型的な3問題を扱う．また，概算から最終的に得られた式 Eqs.(2.116, 2.123, 2.124) からわかるように，計算機及びプログラムに依存する係数を除いては，計算量は境界面上の節点数（自由度） N ，最下位レベルセル内平均節点数 M ，反復回数 T に，必要記憶容量は N ， M に依存するのみであり，このうちセル階層化レベルにより値を変化させることができるのは M のみである．従って，ここでは特に M に着目した考察を行う．

計算量

タイプ 1 タイプ 1 の場合の FMBEM の全計算量は Eqs.(2.116, 2.123) から次式で表される .

$$C_{t1} \sim \bar{a}_3 N^3 + T(a_2 + a_3 + a_4) N^2 + (\bar{a}_1 + T(a_1 + a_5)) M^2 N + (\bar{a}_6 + T(a_6 - (a'_2 + a'_3 + a'_4))) MN \quad (5.21)$$

C_{t1} が最小となる M は ,

$$\frac{\partial C_{t1}}{\partial M} \sim 0 \quad (5.22)$$

より次式で表される .

$$M \sim \frac{T(a'_2 + a'_3 + a'_4 - a_6) - \bar{a}_6}{2T(a_1 + a_5) + 2\bar{a}_1} \quad (5.23)$$

反復回数が N に非依存で安定な場合 , M は N によらない定数となることがわかる . M は T についての増加関数であるが , 反復回数が無限大の場合には

$$M \sim \frac{a'_2 + a'_3 + a'_4 - a_6}{2(a_1 + a_5)} \quad (5.24)$$

に収束する .

タイプ 2 タイプ 2 の場合の FMBEM の全計算量は Eqs.(2.116, 2.123) から次式で表される .

$$C_{t2} \sim \bar{b}_3 N^{\frac{3}{2}} + T(b_2 + b_3 + b_4) N \log \frac{N}{M} + ((\bar{b}_1 + \bar{b}_6) + T(b_1 + b_5 + b_6)) MN - T(b'_2 + b'_3 + b'_4) N \quad (5.25)$$

C_{t2} が最小となる M は , Eq.(5.22) より次式で表される .

$$M \sim \frac{T(b_2 + b_3 + b_4)}{(\bar{b}_1 + \bar{b}_6) + T(b_1 + b_5 + b_6)} \quad (5.26)$$

反復回数が N に非依存で安定な場合 , M は N によらない定数となることがわかる . M は T についての増加関数であるが , 反復回数が無限大の場合には

$$M \sim \frac{b_2 + b_3 + b_4}{b_1 + b_5 + b_6} \quad (5.27)$$

に収束する .

タイプ3 タイプ3の場合の FMBEM の全計算量は Eqs.(2.116, 2.123) から次式で表される .

$$C_{t3} \sim (\bar{c}_6 + Tc_6)MN + (\bar{c}_1 + T(c_1 + c_5)) M^{\frac{2}{3}}N + \bar{c}_3N \\ + T(c_2 + c_3 + c_4)M^{-\frac{1}{3}}N - T(c'_2 + c'_3 + c'_4)N^{\frac{2}{3}} \quad (5.28)$$

C_{t3} が最小となる M は , Eq.(5.22) より次式を満たす .

$$T \sim \frac{3\bar{a}_6M^{\frac{4}{3}} + 2\bar{a}_1M}{(a_2 + a_3 + a_4) - (3a_6M^{\frac{4}{3}} + 2(a_1 + a_5)M)} \quad (5.29)$$

反復回数が N に非依存で安定な場合 , M は N によらない定数となる . また , $T > 0$ より $3a_6M^{\frac{4}{3}} + 2(a_1 + a_5)M < a_2 + a_3 + a_4$ であり , この範囲で M は T についての増加関数である . 反復回数が無限大の場合には

$$3a_6M^{\frac{4}{3}} + 2(a_1 + a_5)M \sim a_2 + a_3 + a_4 \quad (5.30)$$

を満たす M に収束する .

以上の概算結果から , 境界形状 (節点分布) によらず , 反復回数が安定していれば M は N によらない定数となること , 反復回数が増加すると計算量を最小化する M も増加するが , 反復回数が無限大の場合はある値に収束することがわかる . また , 計算量を最小化する M の値は境界形状により異なる可能性があることがわかる . 従って , 反復回数が M に及ぼす影響 , 及び境界形状が M に及ぼす影響を把握しておけば , M を調べることで計算時間をおよそ最小化する階層化レベルの決定が可能となると考えられる .

必要記憶容量

タイプ1 タイプ1の場合の FMBEM の全必要記憶容量は Eq.(2.124) から次式で表される .

$$E_{t1} \sim (f_3 + f_4)N^2 + (f_2M^2 + (f_5 - f'_3)M + f_1)N \quad (5.31)$$

E_{t1} が最小となる M は ,

$$\frac{\partial E_{t1}}{\partial M} \sim 0 \quad (5.32)$$

より次式で表される .

$$M \sim \frac{f'_3 - f_5}{2f_2} \quad (5.33)$$

M は N によらない定数となることがわかる .

タイプ 2 タイプ 2 の場合の FMBEM の全必要記憶容量は Eq.(2.124) から次式で表される .

$$E_{t2} \sim g_3 N \log \frac{N}{M} + ((g_2 + g_5)M + g_1 + g_4 - g'_3) N \quad (5.34)$$

E_{t2} が最小となる M は , Eq.(5.32) より次式で表される .

$$M \sim \frac{g_3}{g_2 + g_5} \quad (5.35)$$

M は N によらない定数となることがわかる .

タイプ 3 タイプ 3 の場合の FMBEM の全必要記憶容量は Eq.(2.124) から次式で表される .

$$E_{t3} \sim \left(h_5 M + h_2 M^{\frac{2}{3}} + h_1 + h_3 M^{-\frac{1}{3}} \right) N + (h_4 - h'_3) N^{\frac{2}{3}} \quad (5.36)$$

E_{t3} が最小となる M は , Eq.(5.32) より次式を満たす .

$$3h_5 M^{\frac{4}{3}} + 2h_2 M - h_3 = 0 \quad (5.37)$$

これを満たす正の M は 1 つであり , N によらない定数となる .

以上の概算結果から , 境界形状 (節点分布) によらず M は N によらない定数となることがわかる . また , 必要記憶容量を最小化する M の値は境界形状により異なる可能性があることがわかる . 従って , 境界形状が M に及ぼす影響を把握しておけば , M を調べることで必要記憶容量をおよそ最小化する階層化レベルの決定が可能となると考えられる .

5.3.2 数値解析による考察

ここでは上記概算に対応する典型的な節点分布の問題として Fig.5.2 に示す 3 ケースを用い , これらの FMBEM による解析結果をもとに , 計算量及び必要記憶容量と最下位レベルセル内平均節点数 M との関係を考察する . 特に反復回数 , 境界形状が計算時間を最小化する M に及ぼす影響 , 及び境界形状が必要記憶容量を最小化する M に及ぼす影響を数値解析により把握し , 最終的に , 具体的なセル階層化レベルの設定方法を提案する . 但し , ケース 1 については階層セル構造の設定として効果的であった上記の M-num の設定を採用している .

計算量

最下位レベルセル内平均節点数 M と全計算時間の関係を Fig.5.34 に示す . 但し , (a) セットアップ部 + 反復 10 回終了時までの時間 , (b) 反復演算部の反復 1 回あたりの時間

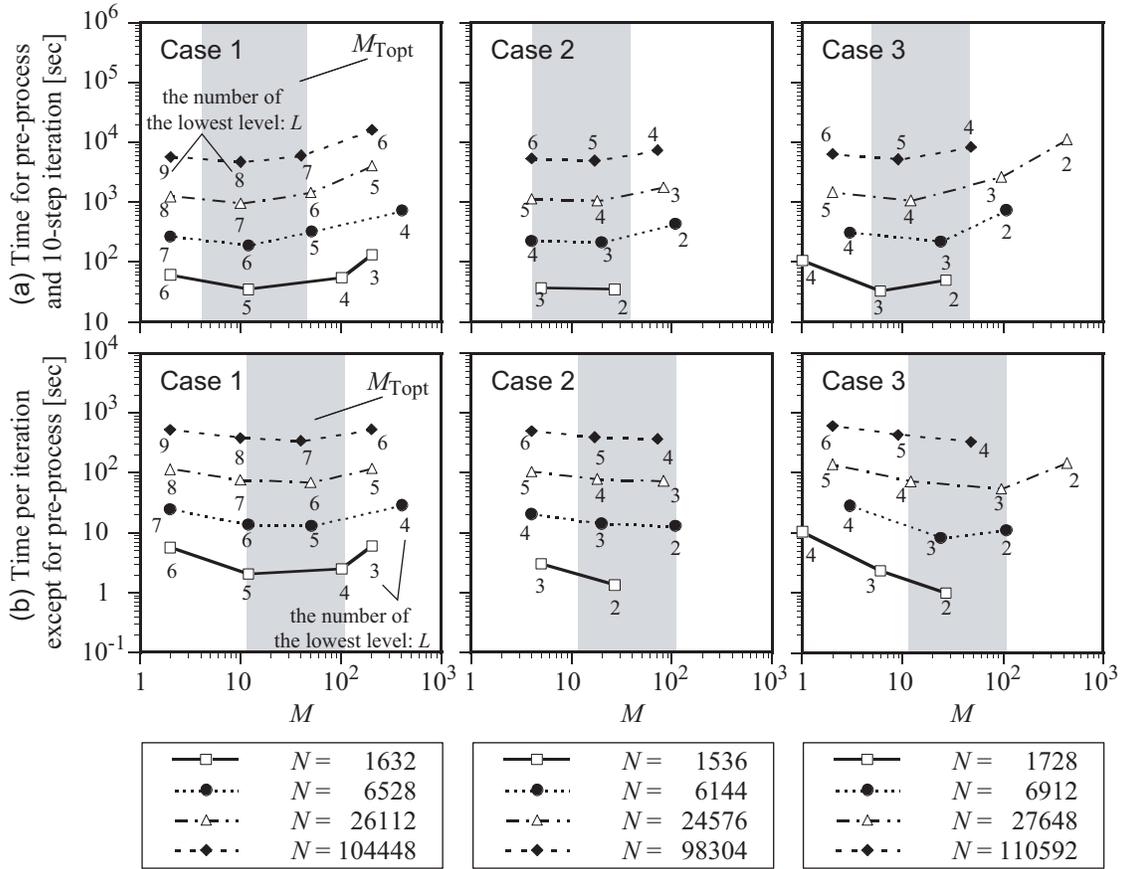


Fig. 5.34: Relation between computational time for the FMBEM and the average number M of nodes in a cell at the lowest level. N is degree of freedom (DOF). Gray areas roughly indicate the ranges of M for optimizing computational time (M_{Topt}).

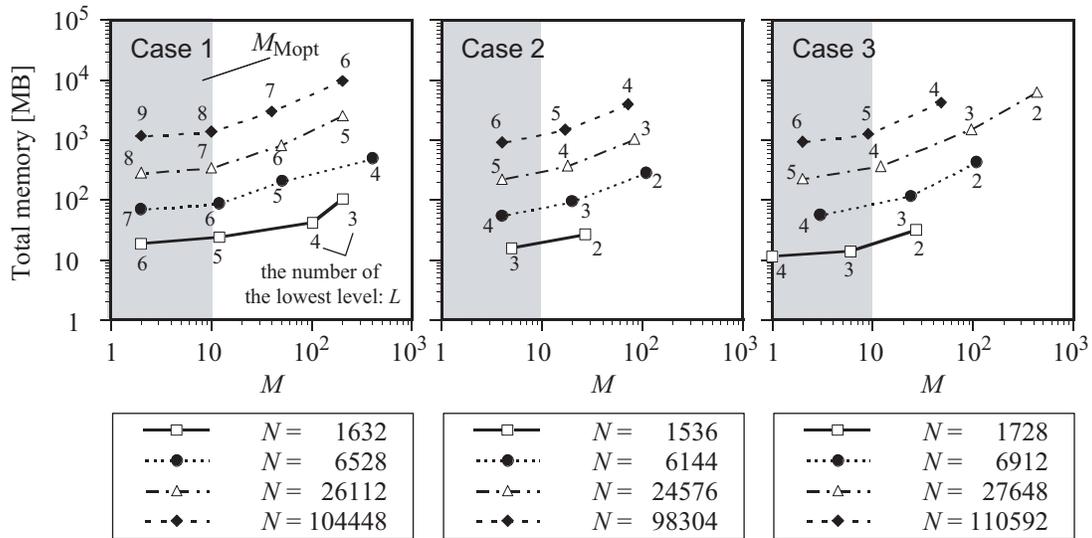


Fig. 5.35: Relation between memory requirements for the FMBEM and the average number M of nodes in a cell at the lowest level. N is degree of freedom (DOF). Gray areas roughly indicate the ranges of M for optimizing memory requirements (M_{Mopt}).

である．また，灰色の部分は計算時間を最小化する M （以下， M_{Topt} ）のおよその範囲を示している．(a)における M_{Topt} は反復演算部の収束が比較的速い場合の M_{Topt} として捉えることができる．また，(b) は収束が限りなく遅く，セットアップ部の計算時間の比重が反復演算部に対し限りなく小さい場合の M_{Topt} と理論的に一致する．従って，(a)と(b)の比較により反復回数が M_{Topt} に及ぼす影響を概ね把握することができる． M_{Topt} の範囲は反復回数一定下では N によらずほぼ一定であり，上述の概算結果と一致している．また，ケース間による差も微小であることから， M_{Topt} に関して境界形状を問題にする必要性は薄いといえる．反復回数の影響により M_{Topt} の範囲は変化するが，これは概ね Fig.5.34(a)～(b) に示す範囲内に収まる．これを計算時間を最小化する階層化レベル L_{Topt} へ及ぼす影響として見ると，反復回数が及ぼす影響は全ケースで最大でも L_{Topt} を1つ変化させる程度に収まっていることがわかる．以上の傾向，及び得られたデータから，境界形状，問題の自由度，収束性状に依存しない L_{Topt} 選定の基準として，

$$10 \leq M_{\text{Topt}} \leq 40 \quad (5.38)$$

を得ることができる．十分階層化された下位セル内では節点分布が2次元的であると考えられることから，最下位レベルが1つ増加することに M はおよそ $1/4$ となる．このことを考慮して範囲を設定している．厳密には計算機やプログラミングにより M_{Topt} の範囲は変化的なことから，それぞれの計算機環境にて M_{Topt} を確認しておくことが望ましい．

必要記憶容量

最下位レベルセル内平均節点数 M と全必要記憶容量の関係を Fig.5.35 に示す．また，灰色の部分は必要記憶容量を最小化する M （以下， M_{Mopt} ）のおよその範囲を示している． M_{Mopt} の範囲は N によらずほぼ一定であり，上述の概算結果と一致している．また，ケース間による差も微小であることから， M_{Mopt} に関して境界形状を問題にする必要性は薄いといえる．計算時間の場合と同様に考えると，境界形状，問題の自由度，収束性状に依存しない L_{Mopt} 選定の基準として，

$$2 \leq M_{\text{Mopt}} \leq 8 \quad (5.39)$$

を得ることができる．しかしながら，この M_{Mopt} の値は M_{Topt} より小さい値となっており，実際の解析にあたっては計算時間，必要記憶容量の最小化の優先度により階層化レベルを決定する必要がある．

5.4 対称形音場の解析における効率化手法

対称面が 1 面のみである対称形音場を解析する場合，従来の BEM では音場の基本解に対称面に対する鏡像からの寄与を含めておくことで，計算する境界を対称形の半領域とすることができる [71, 72]．これにより，境界全体に BEM を適用する場合に比べ扱う要素数が半減することから，計算量については得られる連立方程式を直接解法で解く場合 $1/8$ ，反復解法で解く場合 $1/4$ とすることができ，必要記憶容量については解法に関わらず $1/4$ とすることができる．一方 FMBEM では BEM と同様の基本解の単純な扱いは不可能であるが，階層セル構造を適切にとりセル間の諸係数の関係に留意することにより，対称形音場の解析を効率化できる可能性がある．ここでは，対称形の音場を FMBEM で解く際の計算量・必要記憶容量の低減手法として，階層セル構造を音場の対称性と合致するように配置し，対称となる領域間でのセルの諸係数の関係に留意することにより，セル計算を対称形の半領域のみに限定する方法を示す．この方法により，対称面が 1 面のみである対称形音場を解析する場合，計算量・必要記憶容量ともに通常の FMBEM で解析した場合のおよそ $1/2$ となる．また，本手法は，対称面が複数ある場合でもそれらが互いに直交していれば適用可能であり，最大 3 つの対称面が存在する音場まで拡張可能である．この場合，対称面の数を n とすると，計算量・必要記憶容量ともに通常の FMBEM で解析した場合のおよそ $1/2^n$ となる．はじめに解析アルゴリズムを構築し，計算効率の低減効果について理論的に考察する．次に本手法による解析結果を通常の FMBEM の場合と比較し，精度及び効率化を検証する．

5.4.1 解析アルゴリズムの構築

以下に示す解析アルゴリズムは，基本的に第 2 章にて構築した解析アルゴリズムの流れに準ずるものとする．即ち，FMBEM の主たる演算はセットアップ部及び全 6 ステップからなる反復演算部で構成され，各ステップの演算内容も同様とする．また，以降では対称面が 1 面の場合について記述する．

影響評価の方法

対称形音場における境界と階層セル構造の一例を Fig. 5.36 に示す．階層セル構造は境界の対称面でセル同士が対称になるよう配置する．なお，以下では対称形の半領域の 1 つを単位計算領域，もう一方の領域を鏡像領域と呼ぶこととする．下位レベルのセルは対称形の単位計算領域のみで生成する (Fig. 5.36 では上部半領域のみとなる)．Fig. 5.37 に示

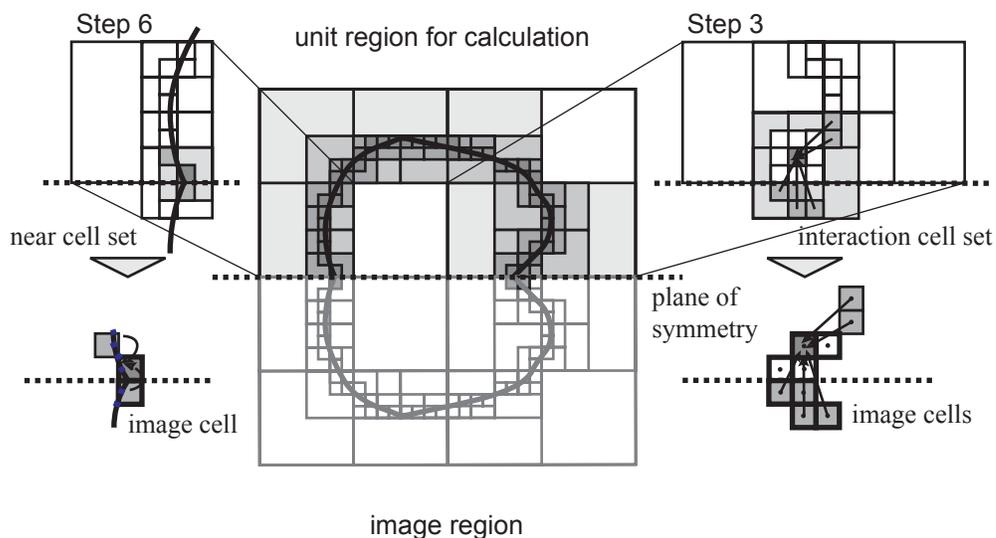


Fig. 5.36: Diagram of steps 3 and 6 of the FMBEM for a plane-symmetric sound field.

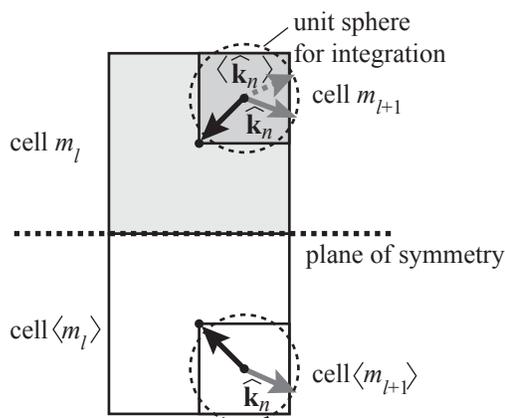


Fig. 5.37: Relationship among a cell m_l , m_{l+1} , a quadrature point $\hat{\mathbf{k}}_n^l$, those mirror images $\langle m_l \rangle$, $\langle m_{l+1} \rangle$ and $\langle \hat{\mathbf{k}}_n^l \rangle$ in a plane-symmetric sound field.

すように，互いに対称となるセル間では，対称となる積分点同士で外向・内向係数が同一となる．即ち，あるセル m_l と対称なセル $\langle m_l \rangle$ の単位球面積分積分点 $\hat{\mathbf{k}}_n^l$ における外向・内向係数 $\xi_{\langle m_l \rangle}(\hat{\mathbf{k}}_n^l)$ に関して以下の関係が成り立つ．

$$\xi_{\langle m_l \rangle}(\hat{\mathbf{k}}_n^l) = \xi_{m_l}(\langle \hat{\mathbf{k}}_n^l \rangle) \quad (5.40)$$

但し， $\langle x \rangle$: x の対称面に対する鏡像．

従って，あるセル（または要素）からその上位のセル（または要素を内包する最下位レベルセル）へと影響を集積するのみの過程（ステップ 1, 2），またはあるセルからその下位のセル（またはセル内要素）へと影響を分配するのみの過程（ステップ 4, 5）においては，生成された単位計算領域のセルのみにして通常の FMBEM に準ずる計算を行っておけ

ば, Eq.(5.40) を用いて鏡像領域におけるセルの係数の値も参照できることとなる。一方, 同一の階層化レベルでの相互作用セルからの影響評価 (ステップ 3), 最下位レベルでの近傍セルからの BEM による影響評価 (ステップ 6) においては, Fig. 5.36 に示すようにセルが対称面付近にある場合に鏡像領域にあるセルからの影響を考慮する必要がある。即ち, ステップ 3 においては単位計算領域内のあるセルの相互作用セル群の一部が鏡像領域にある場合, Eq. (5.40) を利用して鏡像セルからの寄与を算出し, ステップ 6 においては単位計算領域内のあるセルの近傍セル群の一部が鏡像領域にある場合, 鏡像領域内の近傍セルを想定してその内部要素からの寄与を算出することとなる。

数値計算過程

ここでは, BF・NDF・両者の線形結合型 (Burton-Miller 法) の場合のそれぞれについて, 対称形となる音場に効率的に FMBEM を適用するための各行列ベクトル積の具体的な数値計算過程を, 第 2 章において示した MLFMA の各ステップに沿って示す。

BF における計算過程 BF のマトリクス方程式 Eq.(2.24) における $(\mathbf{E} + \mathbf{C} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{p}$ 及び $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ の行列ベクトル積に関して計算過程を示す。前者は繰り返し複数回, 後者は 1 回の計算となる。但し, ステップ 1, 2, 4, 5 に関しては単位計算領域のセルのみに適用する点を除いてはそれぞれ通常の FMBEM (BF) の場合と同様であり, Eqs.(2.91, 2.92, 2.94, 2.95) により算出可能なため省略する。

ステップ 3: 各レベル ($l = 2, 3, \dots, L$) において相互作用セル群の外向係数からセルの内向係数成分 τ_{m_l} を算出する。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tau_{m_l}^p(\hat{\mathbf{k}}_n^l) \\ \tau_{m_l}^v(\hat{\mathbf{k}}_n^l) \end{bmatrix} &= \sum_{m'_l \in \mathcal{T}_{m_l}} T_{\lambda_{m_l} \lambda_{m'_l}}^{N_c^l}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^l) \begin{bmatrix} \xi_{m'_l}^p(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^l) \\ \xi_{m'_l}^v(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^l) \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{\langle m'_l \rangle \in \mathcal{T}_{m_l}} T_{\lambda_{m_l} \langle \lambda_{m'_l} \rangle}^{N_c^l}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^l) \begin{bmatrix} \xi_{m'_l}^p(\langle \hat{\mathbf{k}}_{n'}^l \rangle) \\ \xi_{m'_l}^v(\langle \hat{\mathbf{k}}_{n'}^l \rangle) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.41)$$

右辺第 2 項は鏡像セルからの寄与を表しており, 自身の親セルが対称面に接する場合のみ計算することとなる。

ステップ 6: 最下位レベル L の近傍セル群内の要素群による節点への寄与成分 $\phi_{N,i}$ を算

出する .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi_{N,i}^p \\ \phi_{N,i}^v \end{bmatrix} &= \sum_{m'_L \in N_{m_L}} \sum_{j \in G_{m'_L}} \begin{bmatrix} (E_{ij} + C_{ij} + B_{ij})p_j \\ A_{ij}v_j \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{\langle m'_L \rangle \in N_{m_L}} \sum_{j \in G_{m'_L}} \begin{bmatrix} (E_{i\langle j \rangle} + C_{i\langle j \rangle} + B_{i\langle j \rangle})p_j \\ A_{i\langle j \rangle}v_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.42)$$

右辺第 2 項は鏡像セルからの寄与を表しており , 自身のセルが対称面に接する場合のみ計算することとなる .

NDF における計算過程 NDF のマトリクス方程式 Eq.(2.40) における $(\mathbf{E}_N + \mathbf{C}_N + \mathbf{B}_N) \cdot \mathbf{p}$ 及び $(\mathbf{F}_N + \mathbf{A}_N) \cdot \mathbf{v}$ の行列ベクトル積に関して , Eq.(2.87) に基づいた計算過程を示す . ステップ 1 , 2 , 4 , 5 に関しては , 単位計算領域のセルのみに適用する点を除いてはそれぞれ通常の FMBEM (NDF) の場合と同様 Eqs.(2.91, 2.92, 2.94, 2.101) により算出でき , ステップ 3 に関しては対称形音場のための効率化 FMBEM (BF) の場合と同様 Eq.(5.41) により算出できるため省略する .

ステップ 6 : 最下位レベルの近傍セル群内の要素群による節点への寄与成分 $\phi_{N,i}$ を算出する .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi_{N,i}^p \\ \phi_{N,i}^v \end{bmatrix} &= \sum_{m'_L \in N_{m_L}} \sum_{j \in G_{m'_L}} \begin{bmatrix} (E_{Nij} + C_{Nij} + B_{Nij})p_j \\ (F_{Nij} + A_{Nij})v_j \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{\langle m'_L \rangle \in N_{m_L}} \sum_{j \in G_{m'_L}} \begin{bmatrix} (E_{Ni\langle j \rangle} + C_{Ni\langle j \rangle} + B_{Ni\langle j \rangle})p_j \\ (F_{Ni\langle j \rangle} + A_{Ni\langle j \rangle})v_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Burton-Miller 法における計算過程 Burton-Miller 法のマトリクス方程式 Eq.(2.53) における $(\mathbf{L} + \mathbf{M} + \mathbf{N}) \cdot \mathbf{p}$ 及び $(\mathbf{K} + \alpha \mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}$ の行列ベクトル積に関して , Eq.(2.88) に基づいた計算過程を示す . ステップ 1 , 2 , 4 , 5 に関しては , 単位計算領域のセルのみに適用する点を除いてはそれぞれ通常の FMBEM (Burton-Miller 法) の場合と同様 Eqs.(2.91, 2.92, 2.94, 2.105) により算出でき , ステップ 3 に関しては対称形音場のための効率化 FMBEM (BF , NDF) の場合と同様 Eq.(5.41) により算出できるため省略する .

ステップ 6 : 最下位レベルの近傍セル群内の要素群による節点への寄与成分 $\phi_{N,i}$ を算出する .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi_{N,i}^p \\ \phi_{N,i}^v \end{bmatrix} &= \sum_{m'_L \in N_{m_L}} \sum_{j \in G_{m'_L}} \begin{bmatrix} (L_{ij} + M_{ij} + N_{ij})p_j \\ (K_{ij} + \alpha F_{Nij})v_j \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{\langle m'_L \rangle \in N_{m_L}} \sum_{j \in G_{m'_L}} \begin{bmatrix} (L_{i\langle j \rangle} + M_{i\langle j \rangle} + N_{i\langle j \rangle})p_j \\ (K_{i\langle j \rangle} + \alpha F_{i\langle j \rangle})v_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.44)$$

5.4.2 計算低減効果の理論的概算

計算量

計算のための節点数・セル数が $1/2$ となることから，セットアップ部では相互作用セル群からの寄与変換係数 T_{LM} を算出するための計算量 Eq.(5.1) を除き通常の FMBEM の $1/2$ ，反復演算部ではステップ 1~6 全ての過程で $1/2$ となる．従って， T_{LM} 算出のための計算量が全体に占める割合が大きい場合，即ち 1 次元的な節点分布の場合で節点分布を考慮した階層セル構造の設定を用いなかった場合や，反復回数が少なく，セットアップ部の計算量の割合が大きくなる場合は本手法による効率化の効果は減少する．

必要記憶容量

計算量と同様， T_{LM} のための必要記憶容量 Eq.(5.6) を除き全て $1/2$ となる．従って， T_{LM} のための必要記憶容量が全体に占める割合が大きい場合，即ち 1 次元的な節点分布の場合で境界形状を考慮した階層セル構造の設定を用いなかった場合は，本手法による効率化の効果は減少する．

5.4.3 有効性の検証

本手法による効率化を数値解析により検証する．節点分布の異なる 2 種類の解析対象を想定し，相互作用セル群からの寄与変換係数 T_{LM} のための計算量・必要記憶容量の違いが効率化に及ぼす影響についても調べる．いずれも境界要素は四角形一定要素を用いる．反復解法に前処理なしの BiCGStab を用い，各種設定パラメータを第 4 章に，セル階層化レベルを Eq.(5.38) により設定する．

立方体解析

解析方法 一辺 $d[m]$ の剛な立方体とその中心に位置する点音源からなる解析モデルを Fig. 5.38 に示す．内部音場の解析とする．境界要素のサイズを解析波長の $1/8$ 以下とする．対称形を考慮した解析では対称面は 1 面のみとする．その他の計算条件については Table 5.3 に示す．

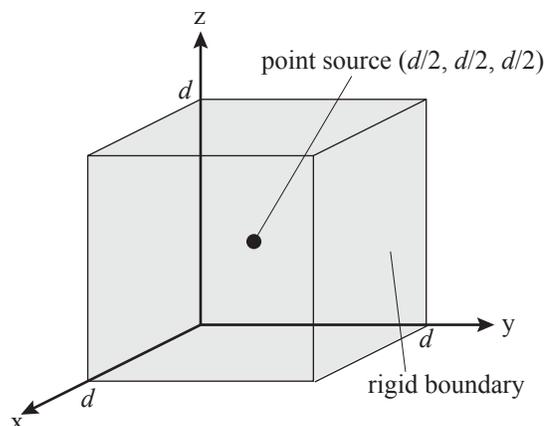


Fig. 5.38: Geometry of an analysis model. A point source is located at the center of a cube. All boundaries are rigid.

Table 5.3: Computational efficiency for analyzing sound fields in a rigid cube d m wide, with a point source at the center, using conventional and symmetrical FMBEM. N is degree of freedom (DOF), and L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

kd	Type of FMBEM	N	L	Iteration	Time [sec]	Memory [MB]
9.14	conventional	1,536	2	5	28	26.6
9.14	symmetrical	768	2	5	14	14.4
73.12	conventional	98,304	5	59	24,235	1,486.8
73.12	symmetrical	49,152	5	58	11,848	799.6

結果と考察

計算精度 通常の FMBEM と本効率化手法を適用した FMBEM による立方体床面上の音圧レベル分布の計算結果を解析周波数ごとに Fig. 5.39, 5.40 に示す。分布の視覚的な違いは全く認められない。両者の境界節点上での音圧分布の違いを Table 5.4 に示す。但し、節点位置の空間サンプリングによる影響を避けるため、評価量として次式を用いることとする。

$$\varepsilon_{\text{sym}} = \frac{\sum_n \left| |p_{\text{con}}(\mathbf{r}_n)|^2 - |p_{\text{sym}}(\mathbf{r}_n)|^2 \right|}{\sum_n |p_{\text{con}}(\mathbf{r}_n)|^2} \quad (5.45)$$

但し、 $p_{\text{con}}(\mathbf{r}_n)$, $p_{\text{sym}}(\mathbf{r}_n)$: それぞれ従来の FMBEM, 対称形音場のための FMBEM による節点位置 \mathbf{r}_n での音圧。

問題の自由度によらず、手法間の違いによる精度への影響が非常に微小であり、特に自由度の小さい問題に関しては顕著なことがわかる。わずかではあるが手法間で差が現れた原

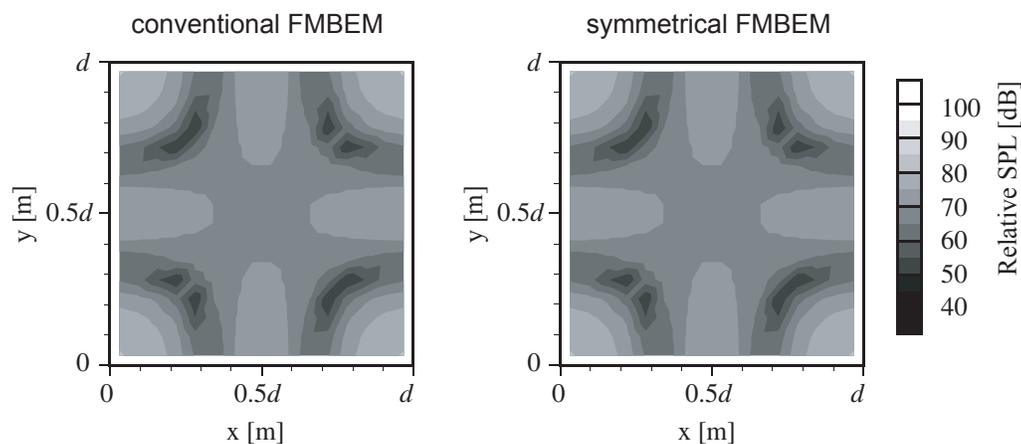


Fig. 5.39: Distribution of sound pressure level on the floor, obtained with conventional and symmetrical FMBEM, at $kd = 9.14$.

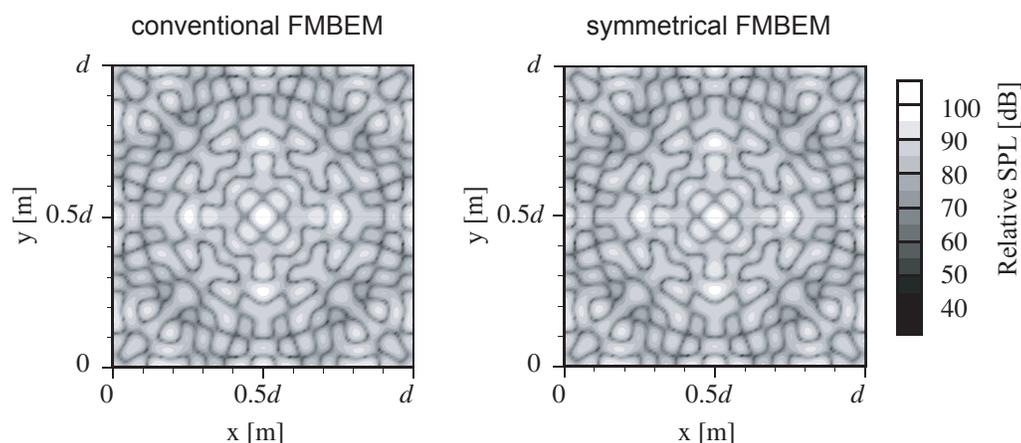


Fig. 5.40: Distribution of sound pressure level on the floor, obtained with conventional and symmetrical FMBEM, at $kd = 73.12$.

因としては、扱う対象が同じでも丸め誤差などの数値的誤差の蓄積を含めると両手法間では解くべき連立方程式が異なること、これを反復解法によりある収束判定値のもとに解く場合に、収束判定値の範囲内で得られる結果に差が出るのが考えられる。対称形のための FMBEM は原理的には通常の FMBEM に比べて精度劣化する要因はないことから、ここで見られるわずかな差に関しては上記の理由が妥当と思われる。

計算量 計算量・必要記憶容量を計算条件と合わせて Table 5.3 に示す。計算量に関しては、問題の規模によらず、通常の FMBEM (conventional) に比べて本効率化手法 (symmetrical) では約半分まで低減されている。

必要記憶容量 問題の規模によらず、通常の FMBEM (conventional) に比べて本効率化手法 (symmetrical) では約半分まで低減されている。

Table 5.4: Differences between results with conventional and symmetrical FMBEM, averaged over all nodes on boundaries of the cube. ε_{sym} is defined as Eq. (5.45). N is degree of freedom (DOF), and L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

kd	N		L	$10 \log_{10} \varepsilon_{\text{sym}}$ [dB]
	conventional	symmetrical		
9.14	1,536	768	2	-127.6
73.12	98,304	49,152	5	-34.1

Table 5.5: Computational efficiency for analyzing sound fields with a rigid barrier and a point source on an rigid ground, using conventional and symmetrical FMBEM. N is degree of freedom (DOF), and L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

Frequency	Type of FMBEM	N	L	Iteration	Time [min]	Memory [MB]
500	conventional	63,448	8	12	274	11,224
500	symmetrical	31,724	8	12	249	9,945

遮音壁解析

解析方法 Fig.5.30(a, b) に示す，無限大の剛な地表面上の剛な有限遮音壁（厚さ 0.1m）と点音源，受音面からなるモデルを解析する．計算条件については前々節の遮音壁解析に準ずる．但し，対称形を考慮した解析における対称面は無限大剛床のみとする．また，解析対象と階層セル構造の位置関係については，ルートセルの中心と解析対象の中心が等しくなるように配置し，セルの辺と遮音壁の辺が一致するような配置とする． T_{LM} の算出にあたっては本章前半で提案した計算量・必要記憶容量低減のための方法を用いず，Fig.5.1 に示すようなセルの位置関係を考慮して， $I'_i = 316$ を採用している．即ち，Fig.5.15 の Conv と同様の設定となる．

結果と考察

計算精度 通常の FMBEM と本効率化手法を適用した FMBEM による，受音エリアにおける挿入損失分布の計算結果を Fig. 5.41 に示す．また，両手法間の受音エリア上での音圧分布の違いを Eq.(5.45) を評価量として Table 5.6 に示す．但し，ここでは挿入損失ではなく，音圧そのものを用いて ε_{sym} を算出した．立方体の場合と同様，手法間の違いによる精度への影響が非常に微小であることがわかる．

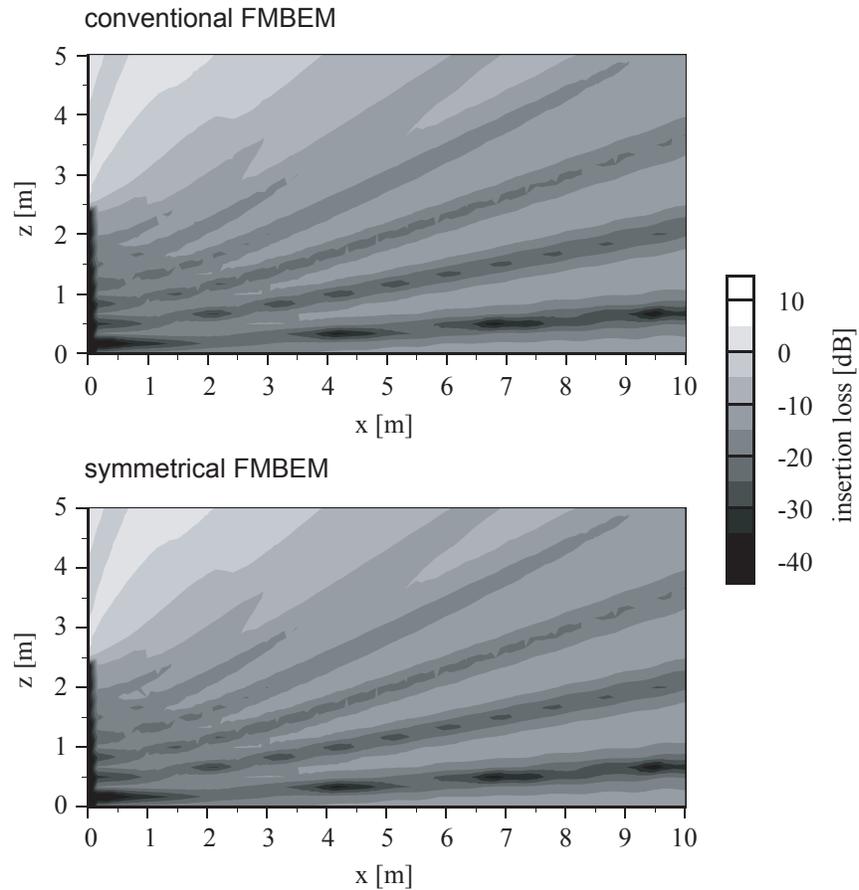


Fig. 5.41: Distribution of insertion loss in the receiving area at 500 Hz, using conventional and symmetrical FMBEM.

Table 5.6: Differences between results with conventional and symmetrical FMBEM, averaged over all points on the receiving area. ε_{sym} is defined as Eq. (5.45). N is degree of freedom (DOF), and L is the lowest level number of hierarchical cell structure.

Frequency	N		L	$10 \log_{10} \varepsilon_{\text{sym}}$ [dB]
	conventional	symmetrical		
500	63,448	31,724	8	-97.0

計算量 計算時間・必要記憶容量を計算条件と合わせて Table 5.5 に示す．通常の FMBEM (conventional) の計算時間に比べて本効率化手法 (symmetrical) ではその 9/10 程度となっており，遮音壁のような 1 次元的な境界形状の場合には本手法による効率化が微小であることがわかる．しかしながら，本章前半にて述べたように境界形状を考慮して階層セル構造を設定すれば， T_{LM} の算出のための計算量を大幅に低減できることから，1 次元的な境界形状の場合にも本手法による効率化は十分得られるものと考えられる．

必要記憶容量 計算量同様，通常の FMBEM (conventional) に比べて本効率化手法 (symmetrical) では 9/10 程度の必要記憶容量となっており，遮音壁のような 1 次元的な節点分布の場合には本手法による効率化が微小であることがわかる．しかしながら，計算量同様，境界形状を考慮して階層セル構造を設定することで効率化は十分改善されるものと考えられる．

5.5 まとめ

本章では，FMBEM の持つ性能を最大限引き出す上で重要となる階層セル構造の適切な設定に関して検討した．

はじめに，境界形状を考慮した階層セル構造の効率的な設定に関して検討した．主に解析対象に対する階層セル構造の配置，及び FMA で計算負荷が高いとされる相互作用セルからの影響評価に関する演算部に着目した．階層セル構造の設定に特別に配慮しない場合，1 次元的な境界形状に対して FMBEM による効率化が損ねられることを数値解析結果から示した後，理論的概算及び数値解析によるケーススタディを通して複数の設定を比較検討し，各レベルにてセル数を低減しレベル毎で共通に用いる相互作用セル数を最小限とする設定が最も有効なことを示した．数値解析結果により，1 次元的な境界形状の問題においても本設定を用いることで 2，3 次元的な形状の場合と同程度の効率化が可能となることを示した．また，任意の問題に対してこの設定を概ね実現するための階層セル構造の配置方針を提案した．

次に FMBEM の計算効率を最適化するセル階層化レベルの設定法について検討した．最下位レベルセル内平均節点数に着目し，理論的考察から，計算量及び必要記憶容量を最適化する最下位レベルセル内平均節点数が問題の節点数によらずそれぞれ一定となることを示し，最下位レベルセル内平均節点数を調べておくことで問題ごとに最適階層化レベルの算出が可能であることを示した．これを踏まえ，FMBEM による数値解析を通して，境界形状と反復回数が最適階層化レベルに及ぼす影響について検討した．計算量・必要記憶容量を最適化する最下位レベルセル内平均節点数に境界形状及び反復回数が及ぼす影響が微小なことを示した後，最適階層化レベルを求めるための最下位レベルセル内平均節点数の具体的な範囲を計算量及び必要記憶容量のそれぞれについて示した．計算量と必要記憶容量を最小化する最下位レベルセル内平均節点数は異なることから，FMBEM 解析にあたっては両者の優先度を決定した上でセル階層化レベルを決定する必要がある．

最後に，階層セル構造の応用的な利用法として，音場解析においてしばしば扱われる，対称形となる音場に対する効率化手法を構築した．対称面 1 面に対して計算量及び必要記憶容量をおよそ半減する効率化アルゴリズムを構築した後，数値解析により計算精度並びに計算効率を検証した．

第 6 章

反復解法の収束性に関する検討

6.1 はじめに

FMBEM では反復解法の適用を前提としており，反復解の収束状況が計算時間に直接関係する．反復解法の収束性に関しては，正定値エルミート行列に対する CG 法のように，理論的に収束が保証されているものもあるが，BEM や FMBEM で得られるような非エルミート行列を持つ連立方程式の反復解法に関しては，解法と収束性の関係は不明確な部分が非常に多く，与えられた問題の性質に大きく依存すると言われている [76, 77, 78]．従って，問題の性質と各解法の適性を，解法実行にあたっての適切な設定を含めて把握することが実用上重要となる．

本章では，反復解法の収束に関して，FMBEM による音響問題の解析に限定した上で，反復解法の種類，定式化，解析対象の形状及び境界条件，問題の自由度の影響について検討し，具体的な知見を得る．また，反復解法の収束改善のための様々な方法について，その効果を検討する．最終的に，個々の音響問題の解析に適した反復解法の選定と，収束改善のための適切な設定を行うための知見を得ることを目的とする．検討は数値実験にて行い，内部問題，外部問題のそれぞれについて，単純形状，複雑形状の問題に分けて検討する．

6.2 反復解法に関して

反復解法は大きく定常反復解法と非定常反復解法に分けられるが，大規模解析においては後者が用いられる．ここでは本章で用いる非定常反復解法であり，現在大規模連立 1 次方程式の解法としてしばしば用いられる Krylov 部分空間反復解法の内容について述べた後 [76, 77]，具体的な反復解法の各手法についてその特徴を述べる．また，反復解法の収

束改善のための方法について述べる．

6.2.1 Krylov 部分空間反復解法

連立 1 次方程式

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (6.1)$$

を反復解法で解く際の初期近似解を \mathbf{x}_0 , 初期残差 \mathbf{r}_0 を

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 \quad (6.2)$$

と表す．このとき，Krylov 列 $\{\mathbf{A}^i \cdot \mathbf{r}_0\}_{i \geq 0}$ によって張られた Krylov 部分空間

$$K_n(\mathbf{A}; \mathbf{r}_0) = \text{Span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{r}_0\} \quad (6.3)$$

から，次の条件を満たすように反復解 \mathbf{x}_n を生成する方法を Krylov 部分空間反復解法と呼ぶ．

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}_n, \quad \mathbf{z}_n \in K_n(\mathbf{A}; \mathbf{r}_0) \quad (6.4)$$

上式を空間条件 (Krylov subspace condition) と呼ぶ．このとき反復近似解に対応する残差 \mathbf{r}_n は次のように表される．

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_n = \mathbf{r}_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}_n \in K_{n+1}(\mathbf{A}; \mathbf{r}_0) \quad (6.5)$$

近似解を決定するため，さらに次のような最小条件 (minimal residual condition)

$$\mathbf{r}_n = \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}_0 + K_n(\mathbf{A}; \mathbf{r}_0)} \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\| \quad (6.6)$$

あるいは次のような Galerkin 型の直交条件 (orthogonal residual condition) を課す．

$$\mathbf{w}^H \cdot \mathbf{r}_n = 0, \quad \mathbf{w} \in K_n(\mathbf{A}; \mathbf{r}_0) \quad (6.7)$$

但し， \mathbf{w}^H は \mathbf{w} の転置共役を表す．

\mathbf{A} がエルミート行列の場合，僅か 3 項の漸化式を基に \mathbf{A} と \mathbf{r}_0 から Krylov 部分空間 $K_n(\mathbf{A}; \mathbf{r}_0)$ における正規直交系を生成することができる．これを Lanczos 原理と呼ぶ．Lanczos 原理を基にした反復解法は，反復回数が増加しても反復 1 回あたりの計算量，必要記憶容量が変化しない利点を持つ．Lanczos 原理と Eq.(6.6) または Eq.(6.7) を用いて導出される CG 法 (Conjugate Gradient method) [79] は，エルミート行列を係数に持つ連立 1 次方程式の効果的な解法として知られている．一方 \mathbf{A} が BEM で得られるような非エルミート行列の場合，短い漸化式では正規直交系を生成することはできず，正規直交系を生成するための反復計算の過程に現れた全ての直交基底を保持し，次の反復計算に用いる必要がある．これを Arnoldi 原理と呼ぶ．従って，非エルミート行列を係数に持つ連立 1

次方程式を解くためには、反復の度に計算量及び必要記憶容量の増加する Arnoldi 原理を用いた解法か、または Eq.(6.6) の最小条件、Eq.(6.7) の直交条件を用いず、Lanczos 原理に次に示す双直交条件 (bi-orthogonal residual condition) を組み合わせて導出した解法を用いることとなる。

$$\mathbf{w}^H \cdot \mathbf{r}_n = 0, \quad \mathbf{w} \in K_n(\mathbf{A}^H; \mathbf{r}_0^*) \quad (6.8)$$

但し、 \mathbf{r}_n^* はシャドウ残差であり、 $\mathbf{r}_0^{*H} \cdot \mathbf{r}_0 \neq 0$ を満たす。

前者の代表的なものとしては GMRES 法 (Generalized Minimal RESidual method) [80] が知られており、直交条件を保持しているため非常に頑健な手法である。しかしながら、上述の計算量・必要記憶容量増加の問題を解決するために restart 版の GMRES(l) がしばしば用いられ、restart する時点によっては収束性が低下するか、場合によっては収束しないことがある。restart の扱いが難しいことから、本研究では扱わないこととする。一方後者は BiCG 系統の反復解法と呼ばれることがあり、いずれも BiCG 法 (Bi-Conjugate Gradient method) [81, 82] の算法が基になって考案された手法群である。本研究ではこのグループのうち、FMBEM に適用可能なものを扱うこととする。即ち、転置行列の必要な BiCG, QMR などは扱わない。

6.2.2 反復解法の種類

ここでは本章で使用する反復解法の種類と特徴について述べる。

CGS

Conjugate Gradient Squared (CGS) は Sonneveld により提案された [83]。一般的に BiCG の約 2 倍の速さで収束あるいは発散する。大規模な問題では丸め誤差の影響を強く受け、収束性状はしばしば全く不規則となり、残差ノルムが停滞または発散することもある [66]。初期近似解が真の解と非常に近ければ発散する傾向がある [76]。

BiCGStab

Biconjugate Gradient Stabilized (BiCGStab) は Van der Vorst により提案された [66]。CGS とほぼ同じ収束の速さを保ちつつ、CGS の不規則な収束パターンを避ける手法である。BiCG と GMRES(1) の積と見なすことができる算法であり、GMRES(1) の反復過程が停留すると Krylov 部分空間を構成できず破綻する場合がある。

BiCGStab2

BiCGStab2 は Gutknecht により提案された [84] . この解法は BiCG と GMRES(2) の積と見なせる算法であり , BiCGStab に比べて , 行列の固有値が複素数である場合に収束が良くなるとされている . なお , 本手法を一般化した Sleijpen and Fokkema による BiCGStab(l) [85] は , GMRES(l) の多項式を利用しており収束性は向上するものの , GMRES(l) と同様 , 反復回数の増加に伴い計算量及び必要記憶容量が増加する手法である . 通常は Restart 版を用いることでこの問題を回避するが , 適切な Restart の設定は難しいため , 本章では BiCGStab2 のみ扱うこととする .

GPBiCG

Generalized Product type of BiConjugate Gradient (GPBiCG) は Zhang により提案された [86] . CGS , BiCGStab , BiCGStab2 など , BiCG 系統の反復解法の導出を一般化したところから生まれた解法である . 行列の固有値が複素数のときに効果的とされる .

なお , 一般には各々の解法により 1 回の反復あたりの演算量が異なるが , 本章で検討する上記の解法については , 演算内で大部分を占める行列ベクトル積の演算回数がいずれも 1 反復あたり 2 回と同じであることから , 以降の検討では計算効率の評価を反復回数により行うものとする .

6.2.3 収束改善について

ここでは , 本章でその効果を検討する 3 種の収束改善法について述べる .

前処理

連立方程式を反復解法で解く場合 , 連立方程式 Eq.(6.1) に前処理と呼ばれる技術を施し , 収束のより速い方程式に変換してから反復解法を適用することが一般的である . 前処理行列 M を元の行列 A を近似するよう以下のように与え ,

$$M = M_1 M_2 \approx A \quad (6.9)$$

解くべき方程式を以下のように変換する .

$$M_1^{-1} A M_2^{-H} (M_2^H x) = M_1^{-1} b \quad (6.10)$$

前処理行列については、構築及び適用のコストを抑えつつ、優れた収束改善効果をあげることのできるものが理想となる。前処理行列には様々なものが提案されているが、本論文で扱うような非エルミート行列のための前処理は、エルミート行列のための前処理の応用的な側面が強く、扱うのに注意が必要である [78]。本章では対角化前処理行列 [76] を用いることとする。これは係数行列の対角成分のみで構成されるものであり、付加的な計算量、記憶容量が不要、並列化特性が高いなどの利点がある。また、熱問題・弾性問題の BEM に関して CGS, BiCGStab, GMRES に有効であるとの報告がある [87]。Marburg *et al.* は音響問題の BEM に関して対角化前処理の効果が薄いことを報告しているが [88]、そこでは一様なインピーダンスの問題に対象が限定されたものとなっている。一方、不完全 LU 分解等、係数行列の不完全分解に基づく前処理については、密行列に対しては分解過程、適用におけるコストが多いため BEM・FMBEM に対し適当とは言えず、また FMBEM では行列を直接算出しないことから適用が困難といえる。

初期シャドウ残差の扱い

Eq.(6.8) からわかるように、BiCG 系統の反復解法はその算法の中に 2 つの残差ベクトル r_n と r_n^* を持っている。初期残差 r_0 は初期近似解 x_0 が与えられれば自動的に決定されるのに対し、初期シャドウ残差 r_0^* は $r_0^{*H} \cdot r_0 \neq 0$ が満たされればよく、与え方に任意性が残っている。この初期シャドウ残差の設定に関して、藤野ら [89] は初期残差に一様乱数を与えることにより収束性に著しい改善効果が見られること、特に CGS 法の収束改善の度合いが最も著しいことを数値実験により明らかにしている。本章では、その中でも最も効果の高かった r_0 と r_0^* の組み合わせである、 $r_0 = b$ (即ち $x_0 = 0$)、 $r_0^* =$ 擬似乱数、とした場合を収束改善法の 1 つとして用いることとする。

周波数応答関数上の隣接解

周波数応答関数を求める場合、周波数軸上で 1 ステップ手前の解が既知となり、その解は次の解析周波数における解にある程度近い値であることが予想される。本章では、真の解に近い値を初期近似解として与えた場合に収束性が向上すると仮定し、初期近似解として周波数応答関数における周波数軸上の隣接解を用いることを試みる。

6.3 収束判定に関する検討

反復解法による連立方程式の計算にあたっては、反復計算を終了するための収束判定基準を適切に定める必要がある。ここではしばしば用いられる様々な収束判定基準のうちか

ら本研究で用いる基準を選定し、これを前提として、数値解析を通して本研究で用いる収束判定のための定数（収束判定値）について検討する。

6.3.1 収束判定基準の選定

連立方程式の反復解法に使用する収束判定基準はいくつか考えられる。理想的には前進誤差、即ち反復解 x_i と厳密解 x の差 $e_i = x_i - x$ を直接評価すべきであるが、これは困難であるため、通常は後退誤差による評価がよく行われる。これにより前進誤差の範囲の見積りを行うことができる。

後退誤差とは、連立一次方程式

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (6.11)$$

において計算された反復近似解 x_i を、以下の式

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}) \cdot x_i = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \quad (6.12)$$

で表される摂動問題の真の解と捉え、このときの $\delta\mathbf{A}$, $\delta\mathbf{b}$ を誤差と見なすものである。後退誤差は残差ベクトル $\mathbf{r}_i = \mathbf{A} \cdot x_i - \mathbf{b}$ と関連づけることが可能なため、収束判定基準として \mathbf{r}_i を制御したものを採用することが多い。また、

$$e_i = x_i - x = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} \cdot x_i - \mathbf{b}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}_i \quad (6.13)$$

より、

$$\|e_i\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{r}_i\| \quad (6.14)$$

が得られることから、後退誤差、あるいは残差ベクトル \mathbf{r}_i による収束判定基準は前進誤差の範囲の見積り（上限）を与えることに相当する。具体的な収束判定基準としては次のようなものが挙げられる [76]。

$$\|\mathbf{r}_i\| \leq \varepsilon \cdot \|x_i\| / \|\mathbf{A}^{-1}\| \quad (6.15)$$

$$\|\mathbf{r}_i\| \leq \varepsilon \cdot (\|\mathbf{A}\| \cdot \|x_i\| + \|\mathbf{b}\|) \quad (6.16)$$

$$\|\mathbf{r}_i\| \leq \varepsilon \cdot \|\mathbf{b}\| \quad (6.17)$$

$$\|\mathbf{r}_i\| \leq \varepsilon \cdot \|\mathbf{r}_0\| \quad (6.18)$$

但し、 ε : 収束判定値、 $\|x\|$: x のノルム。

Eqs.(6.15, 6.16, 6.17, 6.18) に対応する前進誤差の範囲はそれぞれ以下ようになる。

$$\|e_i\| \leq \varepsilon \cdot \|x_i\| \quad (6.19)$$

$$\|e_i\| \leq \varepsilon \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot (\|\mathbf{A}\| \cdot \|x_i\| + \|\mathbf{b}\|) \quad (6.20)$$

$$\|e_i\| \leq \varepsilon \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \quad (6.21)$$

$$\|e_i\| \leq \varepsilon \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|r_0\| \quad (6.22)$$

誤差評価の点からは Eq.(6.15) が望ましい。なぜなら，Eq.(6.19) に示すように反復近似解 x_i に求める相対精度が ε と特定され，前進誤差による評価が可能となるためである。一方計算効率の点からは，Eq.(6.15) 及び Eq.(6.16) ではそれぞれ行列ノルム $\|A^{-1}\|$ 及び $\|A\|$ が必要となることから，行列を直接算出しない FMBEM においてはこれらのノルムを妥当な近似値で代用する場合でも値の算出のために計算コストが増大する可能性があり，適用が難しいと言える。一方 Eq.(6.17) 及び Eq.(6.18) は行列ノルムの計算が不必要であり，簡便に設定可能な基準である。これらはしばしば利用される基準であるが，Eq.(6.18) は基準が初期解 x_0 に強く依存する欠点があり，初期解によっては反復が十分でないうちに停止してしまう場合がある [76]。また，しばしば用いられる初期解 $x_0 = 0$ を与えた場合 $r_0 = b$ となり，基準 Eq.(6.17) に一致する。

以上の考察を踏まえ，計算コスト，簡便さ及び初期解に対する安定度の点から，本研究では収束判定基準として Eq.(6.17) を採用するものとする。

用いるベクトルノルムについてはいくつか考えられるが，本論文においては以下のように定義される 2 ノルム (Euclid ノルム) を採用する。但し， n はベクトル空間の次元である。

$$\|x\| = \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.23)$$

6.3.2 収束判定値の設定に関する検討

反復解法の適用にあたっては，収束判定基準を選定した上で，これに対して適切な収束判定値 ε を設定する必要がある。ここでは，前節で選定した収束判定基準 Eq.(6.17) を前提とし，FMBEM による数値解析を通して，精度・効率の観点から収束判定値 ε について検討する。

解析手法

一辺 1m の立方体とその中央に位置する点音源からなる解析モデルを Fig.6.1 に示す。境界条件は全面剛とし，内部問題の解析を行う。この音場は音波の干渉により音圧が微小となる点を有することから，音圧レベル差が顕著になりやすい点を含んだ音場と考えられる。収束判定値を十分小さく取った場合として $\varepsilon = 10^{-12}$ を採用し，この場合の解析結果を基準として， ε を変化させた場合の誤差評価を行う。境界要素は四角形一定要素とし，要素サイズを解析波長の 1/8 以下とする。反復解法については前処理なしの BiCGStab を用い，初期設定として，音圧ベクトルの初期近似解を $x_0 = 0$ ，初期シャドウ残差を

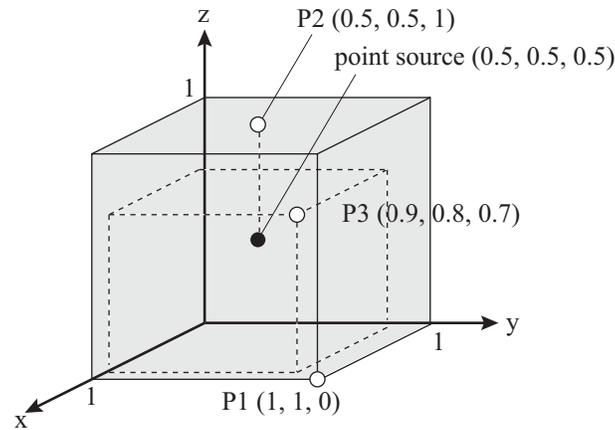


Fig. 6.1: Geometry of an analysis model. A point source is located at the center of a cube.

$\mathbf{r}_0^* = \mathbf{r}_0$ と与えることとする．FMBEM の設定については，各種設定パラメータを第 4 章に，セル階層化レベルを第 5 章に準じて設定するものとする．解析にあたっての各種条件をまとめて Table 6.1 に示す．

Table 6.1: Conditions for analyses of sound fields in a cube. N is degree of freedom, L is the lowest level number of hierarchical cell structure, and M is the average number of nodes in a cell at the lowest level.

N	Frequency [Hz]	Element width [m]	L	M
1536	500	0.06250	2	27
6144	1000	0.03125	3	20
24576	2000	0.01563	4	18
98304	4000	0.00781	5	17

結果と考察

収束判定値を $\varepsilon = 10^{-12}, 10^{-6}, 10^{-3}$ と設定した場合の FMBEM による立方体床面の音圧レベル分布の計算結果を解析周波数ごとに Fig.6.2(a), 6.3(a) に示す． ε の違いによる分布の視覚的な違いは全く認められない． $\varepsilon = 10^{-12}$ の場合と他の場合との音圧レベル差の絶対値の分布を Fig.6.2(b), 6.3(b) に示す． $\varepsilon = 10^{-6}$ の場合はレベル差の最大値は問題の自由度 (DOF) によらず 10^{-3} dB と十分小さな値となっている．一方 $\varepsilon = 10^{-3}$ の場合は，DOF が大きい場合に音圧分布のディップ付近においてレベル差が現れているものの，最大でも人間の音の強さの弁別閾程度の 1dB であることがわかる．本解析結果は 1 例で

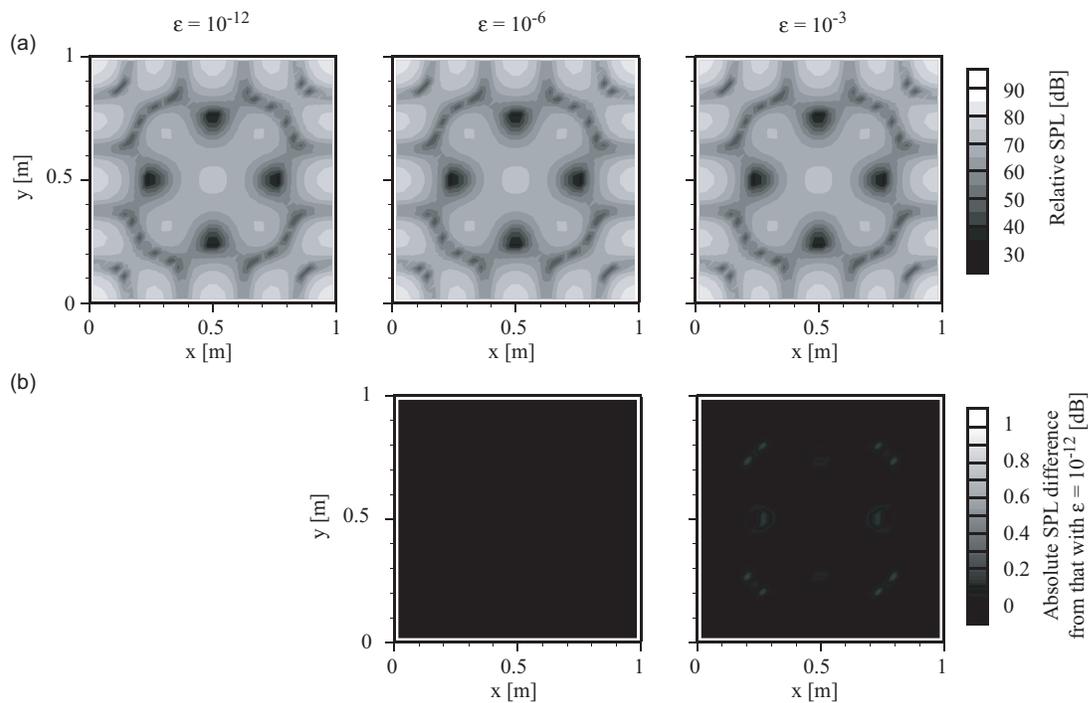


Fig. 6.2: (a) Distribution of sound pressure level on the floor at 1000 Hz, using the FMBEM with unpreconditioned BiCGStab, and (b) absolute SPL difference due to the difference of ϵ . DOF is 6144.

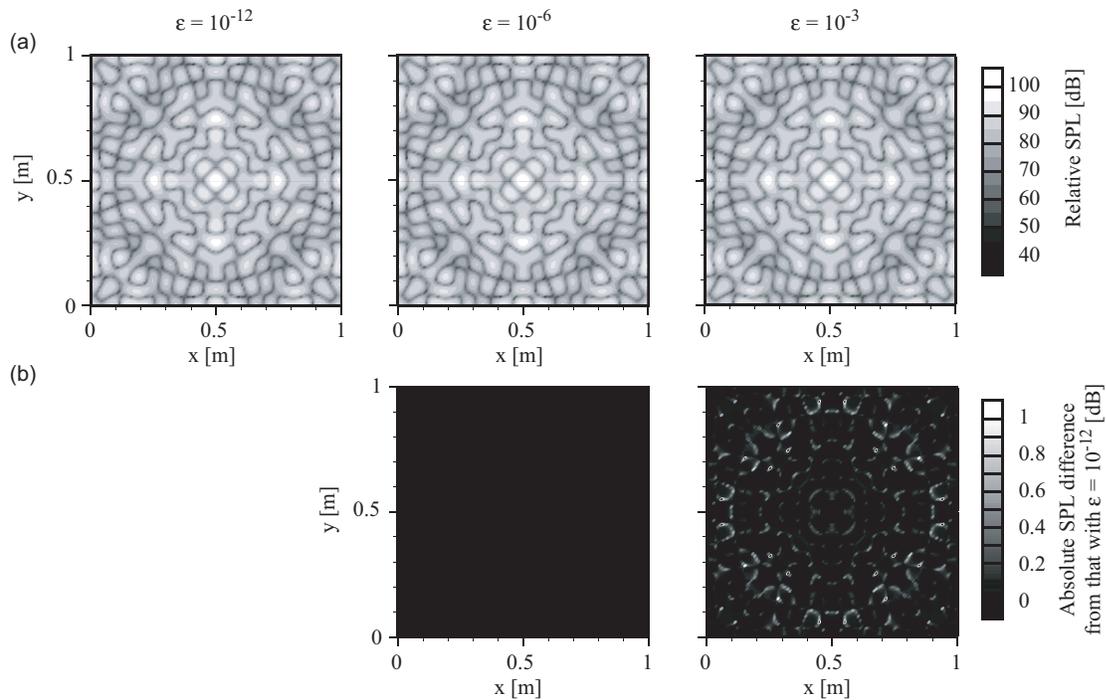


Fig. 6.3: (a) Distribution of sound pressure level on the floor at 4000 Hz, using the FMBEM with unpreconditioned BiCGStab, and (b) absolute SPL difference due to the difference of ϵ . DOF is 98304.

Table 6.2: Effect of ε on differences from results of the FMBEM with $\varepsilon = 10^{-12}$. Unpreconditioned BiCGStab is used for the FMBEM in BF. N is degree of freedom, and $\varepsilon_{\varepsilon m}$ is defined as Eq.(6.24).

N	Frequency [Hz]	iteration		$10 \log_{10} \varepsilon_{\varepsilon m}$ [dB]	
		$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-6}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-6}$
1536	500	5	7	-38.91	-85.26
6144	1000	11	20	-34.21	-64.51
24576	2000	29	65	-26.85	-57.42
98304	4000	58	104	-23.46	-63.47

しかたが、ディップ付近ではレベル差にしたときに差が生じやすいこと、その他の点ではいずれも 1dB を大きく下回っていることを合わせて考慮すると、収束判定値として $\varepsilon = 10^{-3}$ 程度で実用上十分である場合が多いと考えられる。

次に定量的な評価として、 $\varepsilon = 10^{-12}$ の場合と他の場合との境界節点上での音圧分布の違いを比較したものを Table 6.2 に示す。但し、節点位置での空間サンプリングによる値の変動を回避した評価量として次式を用いる。

$$\varepsilon_{\varepsilon m} = \frac{\sum_n ||p_{\varepsilon 12}(\mathbf{r}_n)|^2 - |p_{\varepsilon m}(\mathbf{r}_n)|^2|}{\sum_n |p_{\varepsilon 12}(\mathbf{r}_n)|^2} \quad (6.24)$$

但し、 $p_{\varepsilon 12}(\mathbf{r}_n)$ 、 $p_{\varepsilon m}(\mathbf{r}_n)$ ：それぞれ節点位置 \mathbf{r}_n での $\varepsilon = 10^{-12}$ の場合の音圧、 $\varepsilon = 10^{-m}$ の場合の音圧。

Eq.(6.24) には全節点がいわれている。また、合わせて対応する反復回数も示す。 $\varepsilon = 10^{-6}$ の場合は $\varepsilon = 10^{-3}$ の場合の倍程度の dB 値となっており十分収束しているが、一方反復回数も倍程度必要としていることがわかる。収束判定値を設定するときは計算効率とのトレードオフを十分考慮した上で決定する必要がある。

本論文では、特に断らない限り収束判定値として $\varepsilon = 10^{-3}$ を採用することとする。しかしながら、本章ではより詳細な検討のため、多くの箇所では $\varepsilon = 10^{-6}$ を採用している。

6.4 内部問題における検討

ここでは理論解と比較可能な単純形状の問題として立方体内部音場を、実音場に対応した複雑形状の問題として小ホール内部音場を取り上げる。境界条件、定式化、問題の自由度 (DOF)、反復解法の種類による影響の他、前者においては特に内部固有周波数と収束性の関係を、後者においては特に境界形状のエッジ、要素サイズのばらつきの影響について考察する。また、上述した収束改善法の効果について調べる。なお以降では、特に断らな

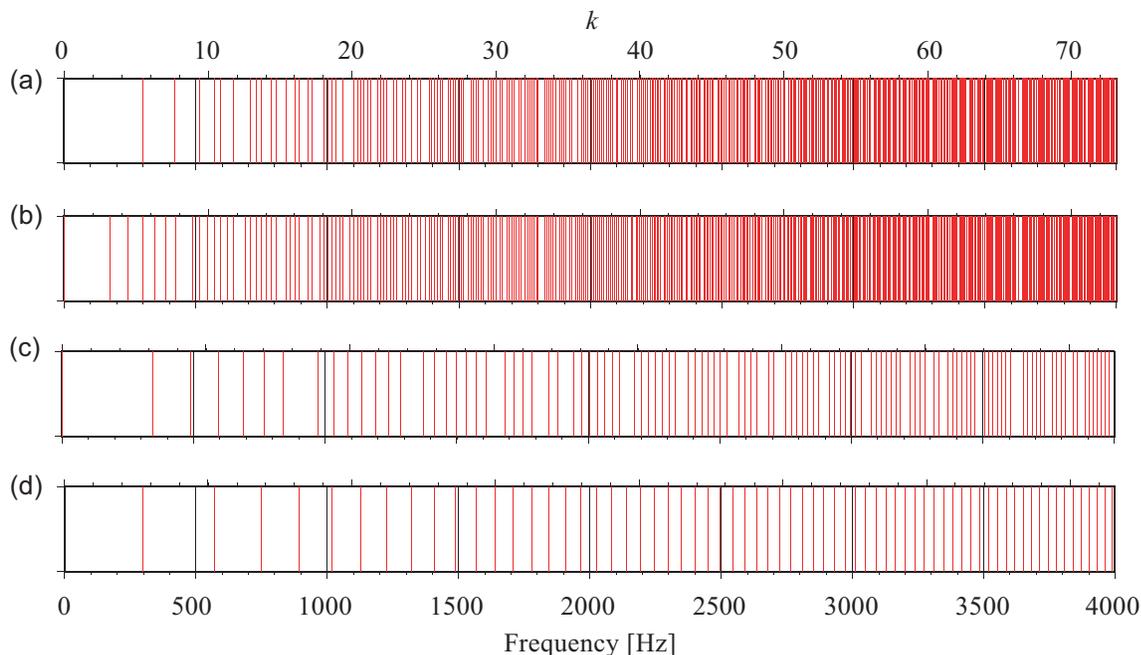


Fig. 6.4: Eigenfrequencies of a cube with 1 m width: (a) for inner Dirichlet problems, (b) for inner Neumann problems, (c) for normal modes of even numbers, and (d) for normal modes of odd numbers.

い場合は、反復解法において従来よく用いられる初期設定として、音圧ベクトルの初期近似解を $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ 、初期シャドウ残差を $\mathbf{r}_0^* = \mathbf{r}_0$ と与えることとする。FMBEM の設定については、各種設定パラメータを第 4 章に、セル階層化レベルを第 5 章に準じて設定する。

6.4.1 立方体解析

解析手法

1 辺 1 m の立方体とその中央に位置する点音源からなる解析モデルを Fig.6.1 に示す。また、この立方体内部の固有周波数分布を、内部 Dirichlet 問題、内部 Neumann 問題、偶数モードのみ、奇数モードのみの場合についてそれぞれ Fig.6.4(a, b, c, d) に示す。点音源が立方体中央にあることから、本問題では Fig.6.4(c) に示す偶数モードのみが励起される。境界条件として、吸音率 a が 0, 0.5, 1 となるインピーダンスを実数で一様に与えたもの、及び $0 \leq a \leq 1$ を満たす複素インピーダンスを擬似乱数によりランダムに与えたもの（以下、ランダム複素インピーダンス）を設定し、内部問題の解析を行う。特に断らない場合を除き、境界要素のサイズは解析波長との関係で決定するものとし、1 辺が解析波長の $1/8$ 以下となる四角形一定要素を用いる。全要素の形状及び面積は同一とする。

結果と考察

Table 6.3: Differences between results using the mode summation and those using the FMBEM with unpreconditioned iterative solvers. ε_{ite} is defined as Eq.(6.25).

DOF	Frequency [Hz]	Formulation	$10 \log_{10} \varepsilon_{\text{ite}}$ [dB]			
			CGS	BiCGStab	BiCGStab2	GPBiCG
1536	500	BF	-10.95	-10.95	-10.95	-10.95
		NDF	-15.64	-15.64	-15.64	-15.64
6144	1000	BF	-16.26	-16.26	-16.26	-16.26
		NDF	-	-16.85	-16.85	-16.85
24576	2000	BF	-	-8.24	-8.24	-8.24
		NDF	-	-15.88	-15.88	-15.88
98304	4000	BF	-16.95	-16.95	-16.95	-16.95
		NDF	-	-17.85	-17.85	-17.85

計算精度 剛な境界条件の場合の，モード展開法による理論解からの誤差（音圧振幅の相対誤差（上）と位相の誤差（下））を受音点ごとにそれぞれ Fig.6.5, 6.6, 6.7 に示す．反復解法には前処理なしの BiCGStab を用い，モード展開法については，3次元の各軸に対するモード数を解析周波数によらずいずれも 210 としている．DOF は解析周波数によらず一定値 6144 とし，最小の解析波長の 1/5 以下となっている．また，図の上部に励起される振動モードの固有周波数を示す．受音点によらず，内部の固有周波数付近で理論解との差が顕著なこと，その他の周波数においては概ね対応が良いこと，BF と NDF でよく対応していることが確認できる．次に反復解法の違いが精度に及ぼす影響を見るため，剛な境界条件の場合のモード展開法による理論解と FMBEM による反復解の境界節点上での音圧分布の違いを Table 6.3 に示す．但し，評価量として次式を用いることとする．

$$\varepsilon_{\text{ite}} = \frac{\sum_n ||p_{\text{th}}(\mathbf{r}_n)|^2 - |p_{\text{ite}}(\mathbf{r}_n)|^2|}{\sum_n |p_{\text{th}}(\mathbf{r}_n)|^2} \quad (6.25)$$

但し， $p_{\text{th}}(\mathbf{r}_n)$ ， $p_{\text{ite}}(\mathbf{r}_n)$ ：それぞれ節点位置 \mathbf{r}_n での理論解音圧，FMBEM による反復解音圧．

ここでは十分収束した場合でも発生するような，丸め誤差等の数値誤差に起因する手法間の精度の差を調べるため，十分小さな収束判定値として $\varepsilon = 10^{-6}$ を用いている．CGS で

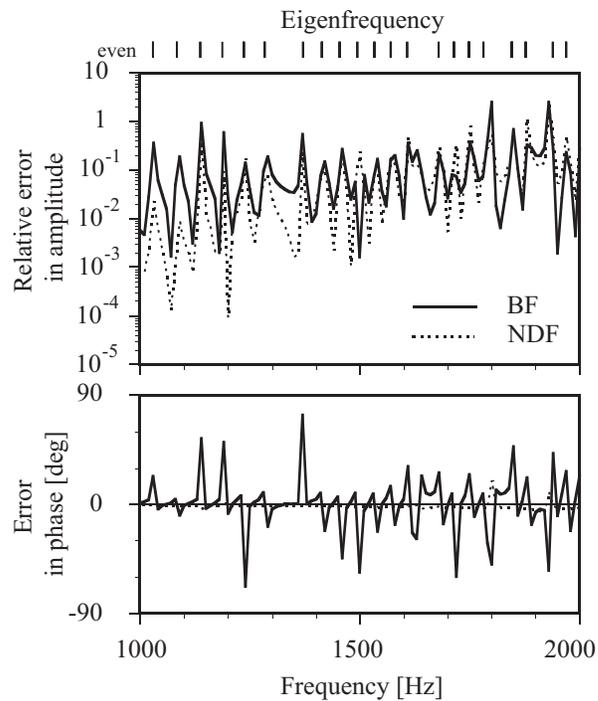


Fig. 6.5: Difference between results with the mode summation and those with the FMBEM in BF and NDF using unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$. The receiver point is P1 (1.0, 1.0, 0).

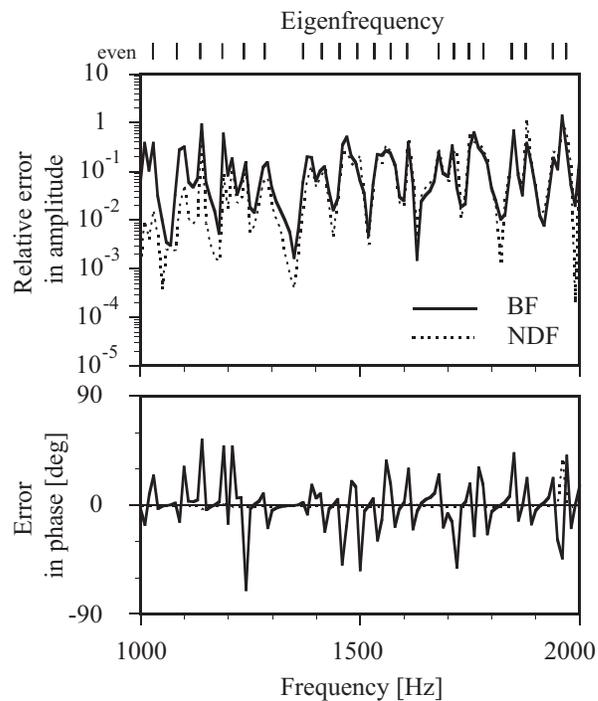


Fig. 6.6: Difference between results with the mode summation and those with the FMBEM in BF and NDF using unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$. The receiver point is P2 (0.5, 0.5, 1).

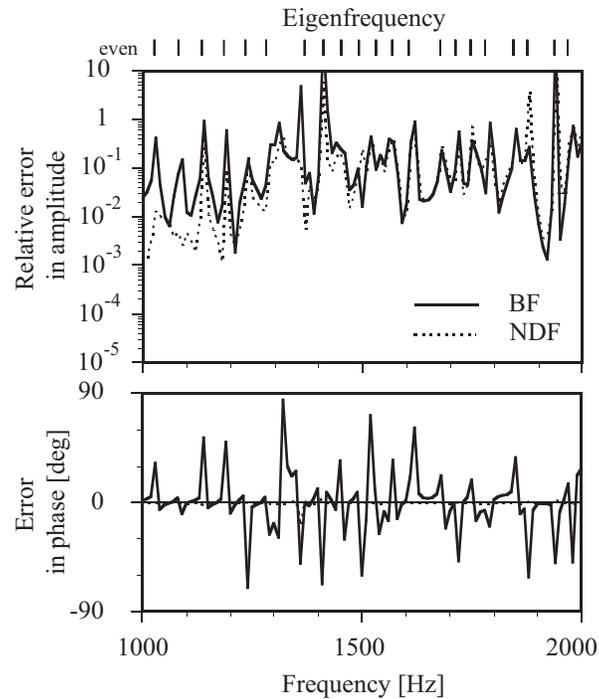


Fig. 6.7: Difference between results with the mode summation and those with the FMBEM in BF and NDF using unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$. The receiver point is P3 (0.9, 0.8, 0.7).

は丸め誤差の影響により収束しない場合があり、特に NDF で多く見られることがわかる。一方収束したものについては、本計算例の範囲では CGS も含め解法の違いによる差は見られない。また、上述した各種の収束改善法を施した場合の解についても同様であった。以上のことから、以下では専ら収束性状の評価のみにて反復解法と問題の適性を検討することとする。

収束性

周波数応答関数による検討 前処理なしの BiCGStab を用いた場合の反復回数を BF, NDF ごとに Fig.6.8 に示す。但し、DOF は解析周波数によらず一定値 6144 とし、最小の解析波長の $1/5$ 以下となっている。また、図の上部に固有周波数とそこで縮退しているモードの数を示す。いずれの定式化においても、吸音率の低下に伴い反復回数が増加することがわかる。特に NDF においてはこれが顕著であり、吸音率が $a = 1$ の場合を除き、いずれも BF の反復回数を上回っている。また、吸音率の低下に伴い、周波数及び定式化間による違いが顕著となっている。固有周波数付近の挙動については、境界が剛な場合に反復回数が増加すること、縮退が起きている場合は顕著となること、NDF の場合にはこれらの傾向がさらに顕著となることを見てとれ、吸音境界の場合は影響は微小であることがわかる。また、剛境界の場合のみ、周波数の増加に伴って反復回数が増加する傾向が見

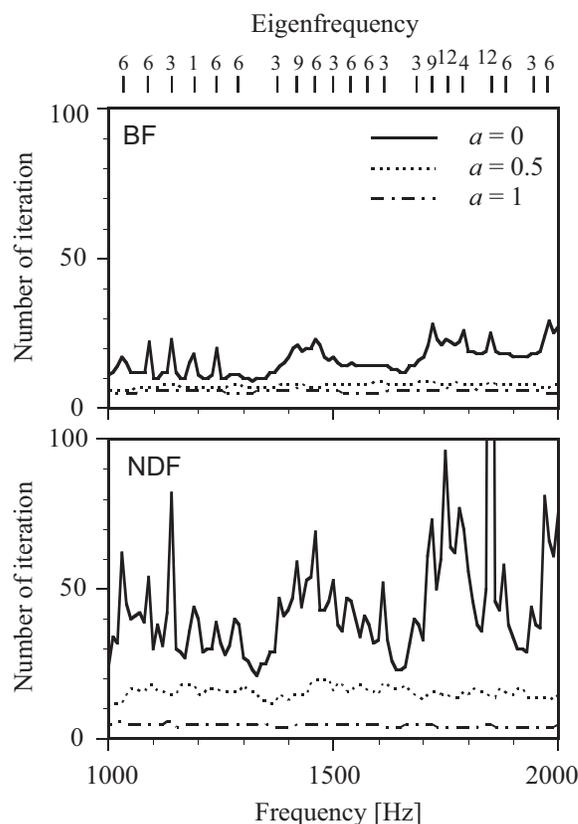


Fig. 6.8: The number of iteration for analyzing sound fields in a cube under three boundary conditions, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$.

られる．ここでは DOF は解析周波数によらず一定のため，反復回数の増加は解析問題の物理的性状に起因するものといえる．具体的には固有周波数の周波数軸上での密度の影響と考えられる．

残差ノルムによる検討 反復解法の種類による影響を見るため，境界条件を剛として，前処理なしの CGS，BiCGStab，BiCGStab2，GPBiCG の各解法を用いた場合の反復残差の推移を解析周波数ごとに Fig.6.9～6.12 に示す．CGS においては，解析周波数によらず収束が非常に不規則であり，NDF の場合に発散する傾向があることがわかる．また，BF においても収束しかけた後に発散することがあるなど (Fig.6.11) 不安定である．一方その他の 3 解法においてはいずれもよく似た傾向を示しており，解析周波数によらず NDF の方が収束までの反復回数が大きく，BF の 2 倍程度かあるいはそれ以上となっていることがわかる．これら 3 者の中では BiCGStab2 及び GPBiCG の収束が BiCGStab にやや勝っている．DOF と収束性の関係を見ると，解法によらず DOF・解析周波数の増加により反復回数は増加する傾向にあるが，DOF の 4 倍ごとの増加に対して収束までの反復回数はより増加が緩やかである．ここで反復回数の増加の原因を究明するため，前処理なしの

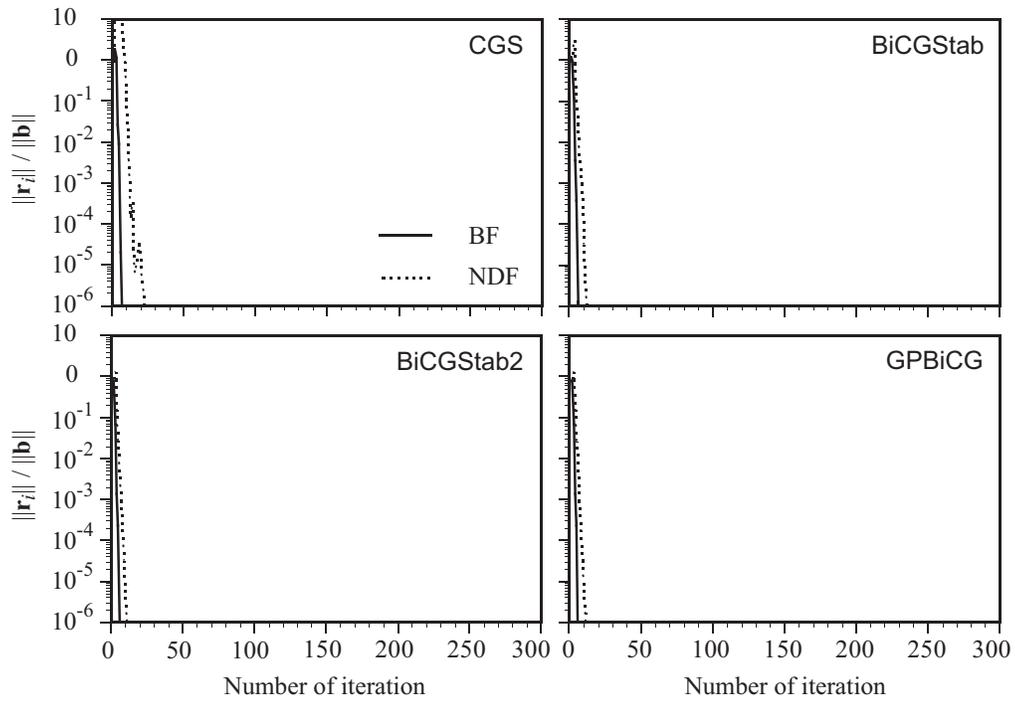


Fig. 6.9: Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 500Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 1536.

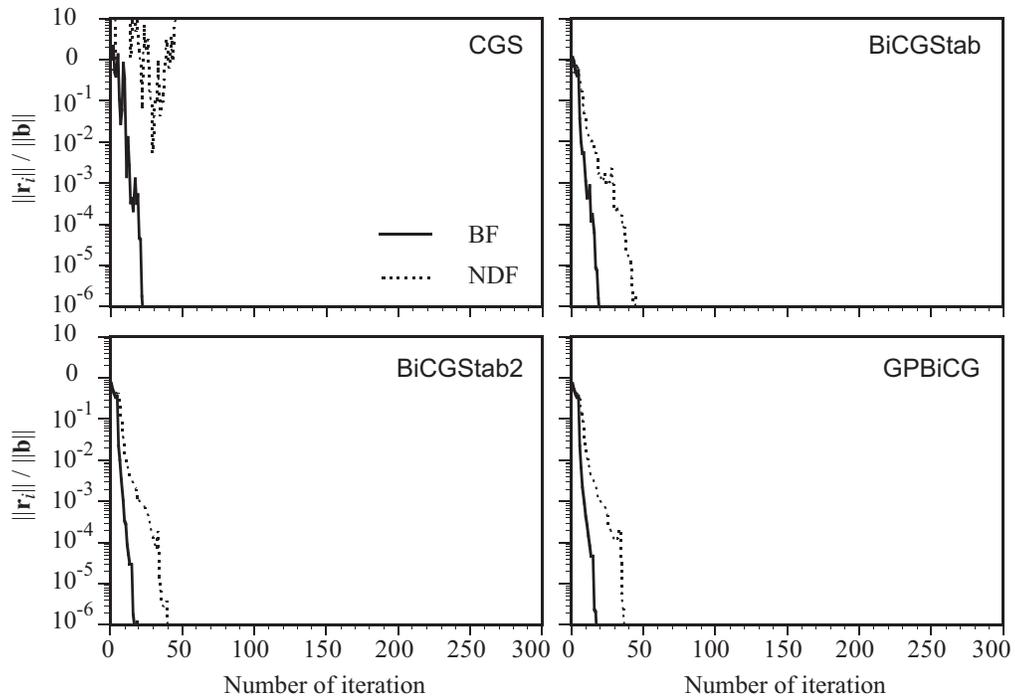


Fig. 6.10: Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 1000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 6144.

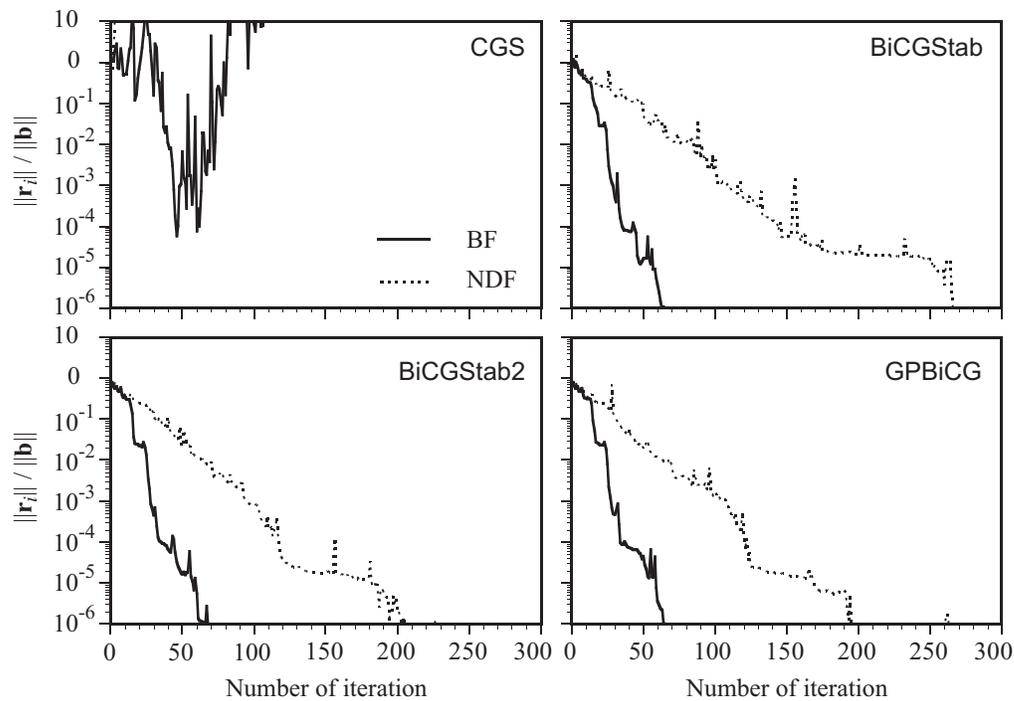


Fig. 6.11: Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 2000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576.

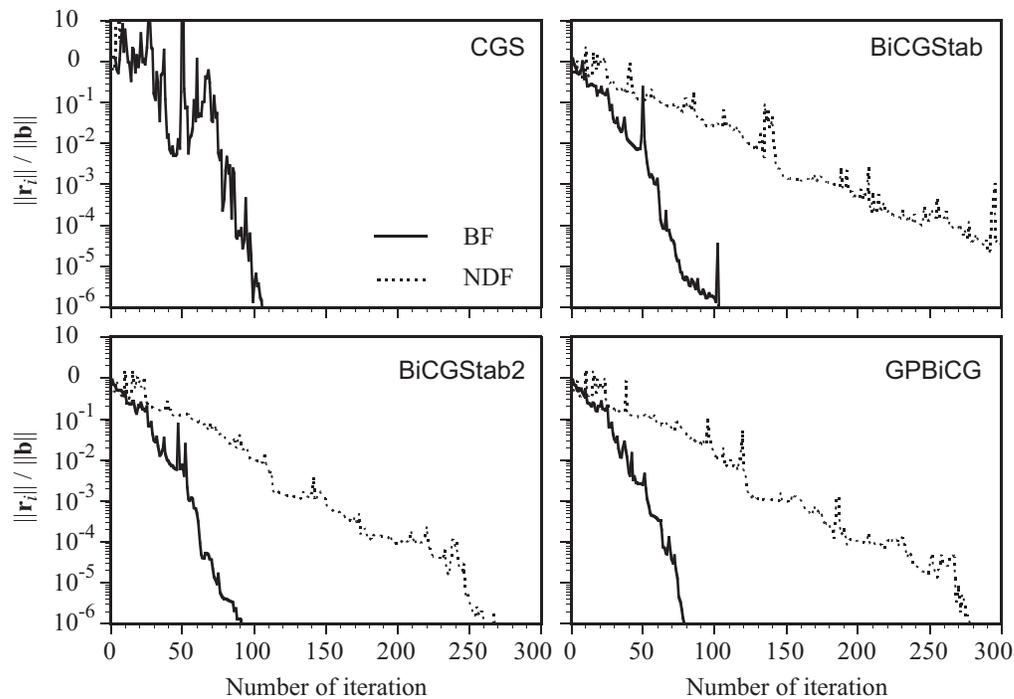


Fig. 6.12: Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 4000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 98304.

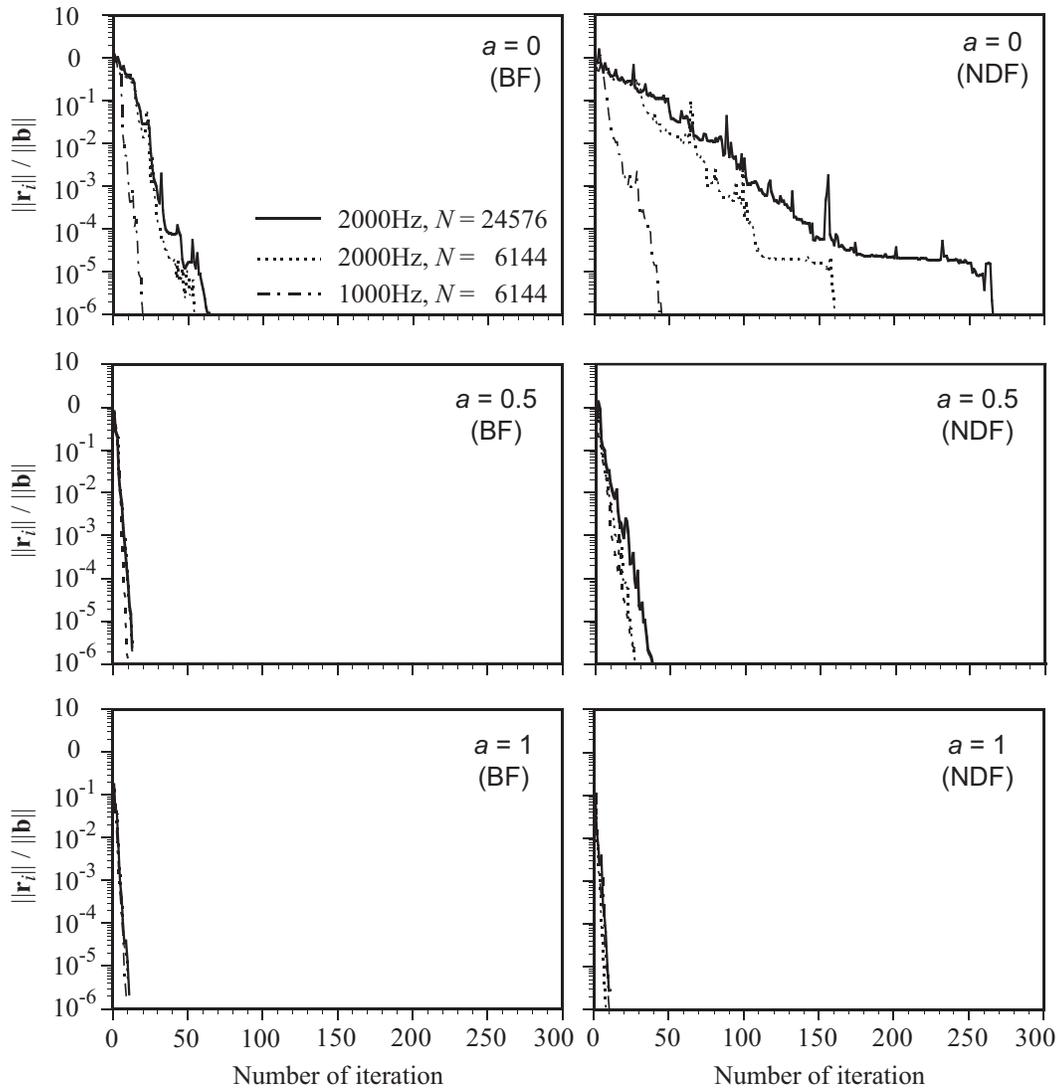


Fig. 6.13: The effects of DOF and analysis frequencies on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned BiCGStab.

BiCGStab を用いて、解析周波数が等しく DOF が異なる場合と DOF が等しく解析周波数が異なる場合の反復残差の推移を比較したものを Fig.6.13 に示す。境界面の吸音率が 1 の場合、DOF、解析周波数、定式化によらず同様の収束性を示している。一方剛境界においては、定式化間で収束性状が異なると同時に、同じ定式化においても収束性状の差が現れている。同じ DOF 同士では 2000Hz の方が 1000Hz に比べ収束が遅いが、これは Fig.6.4(c), 6.8 からわかるように、2000Hz の方がより固有周波数近傍であり、近傍の固有周波数分布の密度が大きいために原因となっていると考えられる。また、同じ解析周波数の場合では DOF の小さい方が収束が速くなっている。これらのことから、一般に DOF

自体が反復回数を増加させるとは限らないこと，解析周波数近傍の固有周波数分布や境界条件といった，解析問題の物理的性状が収束に影響を及ぼすこと，解析問題の物理的性状が収束の点で好ましくない場合は DOF の小さい方が収束が速いことがわかる．

次に各反復解法における境界条件の影響を調べるため，2000Hz において境界条件を変化させた場合の反復残差の推移を反復解法及び定式化ごとに Fig.6.14 に示す．CGS の収束が不規則なことを除いては，各解法ともよく似た傾向を示しており，吸音率の増加に伴い反復回数が大きく減少すること，NDF の方が BF に比べ反復回数が増加していること，吸音率 $\alpha = 1$ では手法，定式化によらずほぼ同様に速い収束を見せることがわかる．

収束改善の効果 ここでは上記検討で収束の遅かった剛境界の場合について，収束改善法の効果を検討する．

対角化前処理: 反復解法に BiCGStab を用いた場合に対角化前処理が反復回数に及ぼす影響を Fig.6.15 に示す．定式化によらず前処理の影響はほとんど見られない．これは本計算例のように要素形状が同一で，かつ全境界に一樣なインピーダンスを持つ場合，係数行列の対角項が全て同一の値となることから，対角化前処理による影響が係数行列の全項を定数倍するのみとなるためと考えられる．反復回数の増加に伴いわずかに差が現れるが，これは丸め誤差等の数値誤差の蓄積によるものと考えられる．次に収束性が悪化する境界条件の極端な例としてランダム複素インピーダンスを設定した場合に，対角化前処理が反復回数に及ぼす影響を反復解法ごとに Fig.6.16 に示す．前処理なしの場合は反復解法及び定式化によらず著しく収束が遅い一方，対角化前処理を施すことによりいずれの場合も顕著な収束改善効果が見られることがわかる．このことから，境界条件が全面一樣でない場合は，対角化前処理が有効に働く可能性があるといえる．

初期シャドウ残差 = 擬似乱数: 初期シャドウ残差を擬似乱数とする設定が反復回数に及ぼす影響を反復解法及び解析周波数ごとに Fig.6.17 ~ 6.20 に示す．BiCGStab，BiCGStab2，GPBiCG においては，BF，NDF によらず収束改善効果は見られず，逆にわずかに悪化している場合が見られる．対照的に，従来の設定 ($r_0^* = r_0$) の場合には他の解法に比べ顕著に収束性が悪かった CGS においては，BF，NDF 共に著しい収束改善効果が見られ， $r_0^* = r_0$ の設定の場合には発散していた問題においても収束するなど，大きく収束性が改善している．また，2000Hz，4000Hz における NDF の場合など，問題によっては他の解法に比べて収束が速くなっている．このことから，少なくともエッジの少ない単純形状の問題に対しては，CGS を用いる場合でも初期シャドウ残差 = 擬似乱数の設定を併用することで他の手法同様の収束効果を期待できると考えられる．

初期近似解 = 周波数軸上隣接解: 初期近似解を周波数軸上の隣接解とする設定が反復回数に及ぼす影響を反復解法ごとに Fig.6.21 に示す．但し，CGS においては顕著な収束改善効果のあった「初期シャドウ残差 = 擬似乱数」の設定を併用している．また，ここでの隣接解はそれぞれ同じ反復解法で収束判定値 $\varepsilon = 10^{-6}$ を用いて算出した 1999Hz での反復

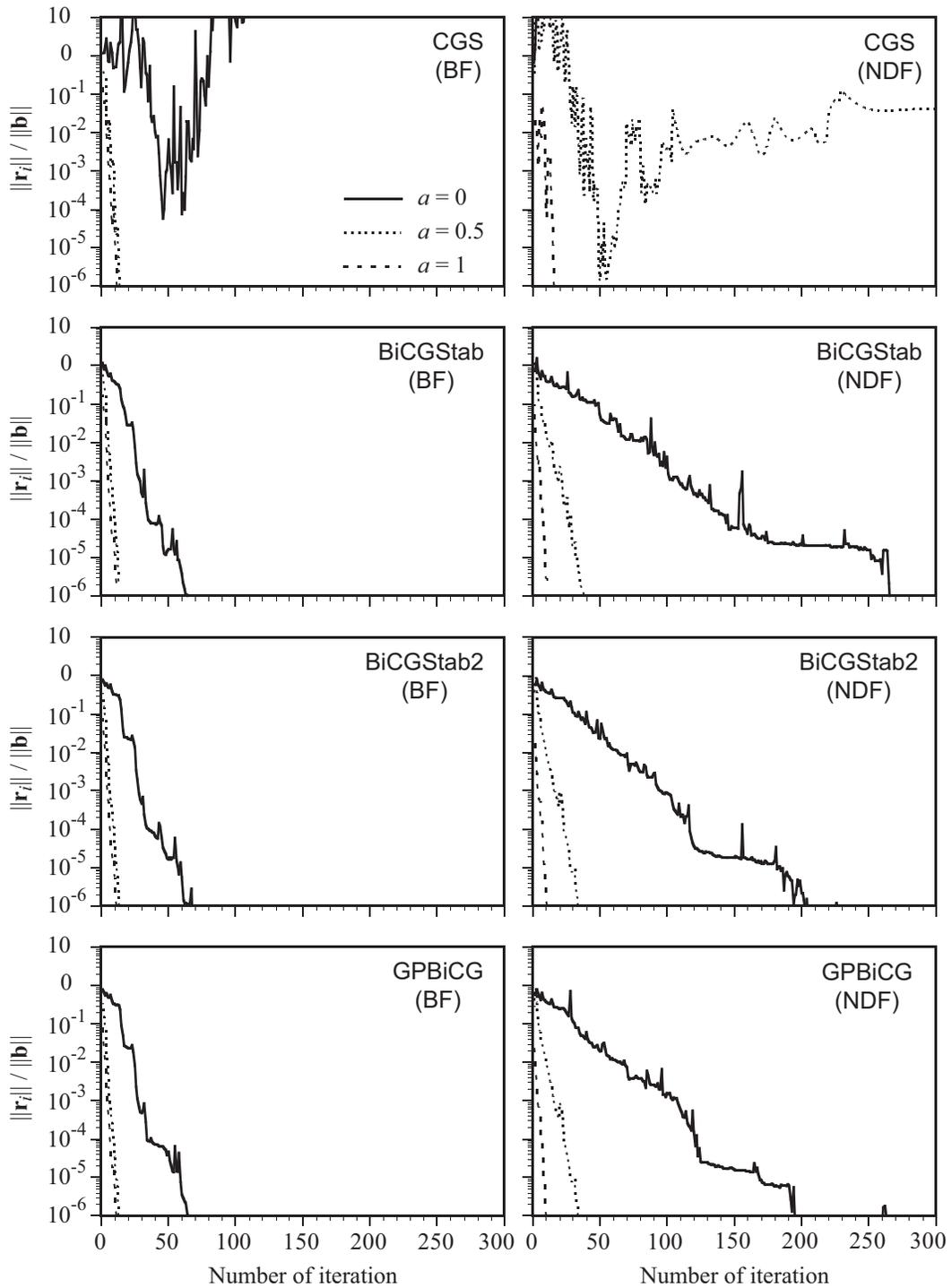


Fig. 6.14: The effect of boundary conditions on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube at 2000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576.

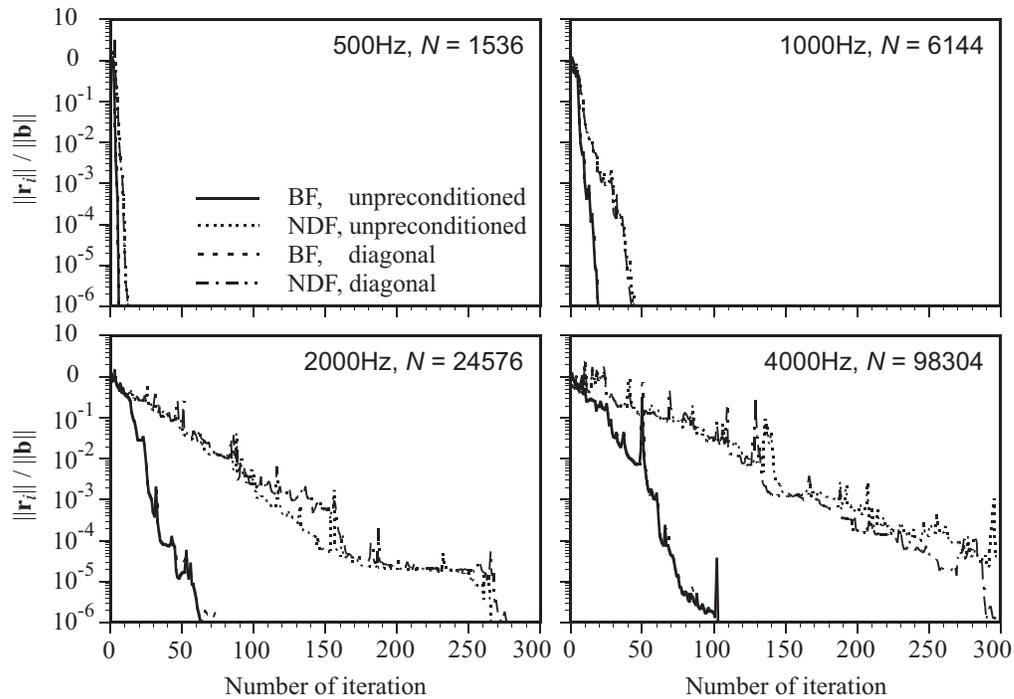


Fig. 6.15: The effect of diagonal preconditioning on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary, using the FMBEM in BF and NDF with BiCGStab.

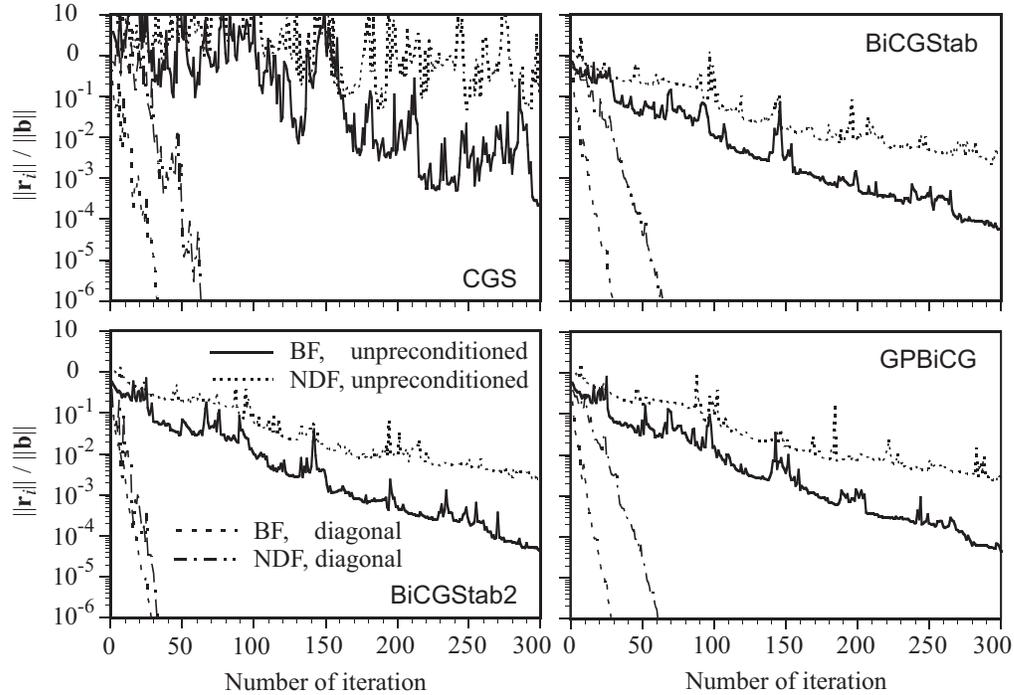


Fig. 6.16: The effect of diagonal preconditioning on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with boundary of random complex impedance at 2000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576.

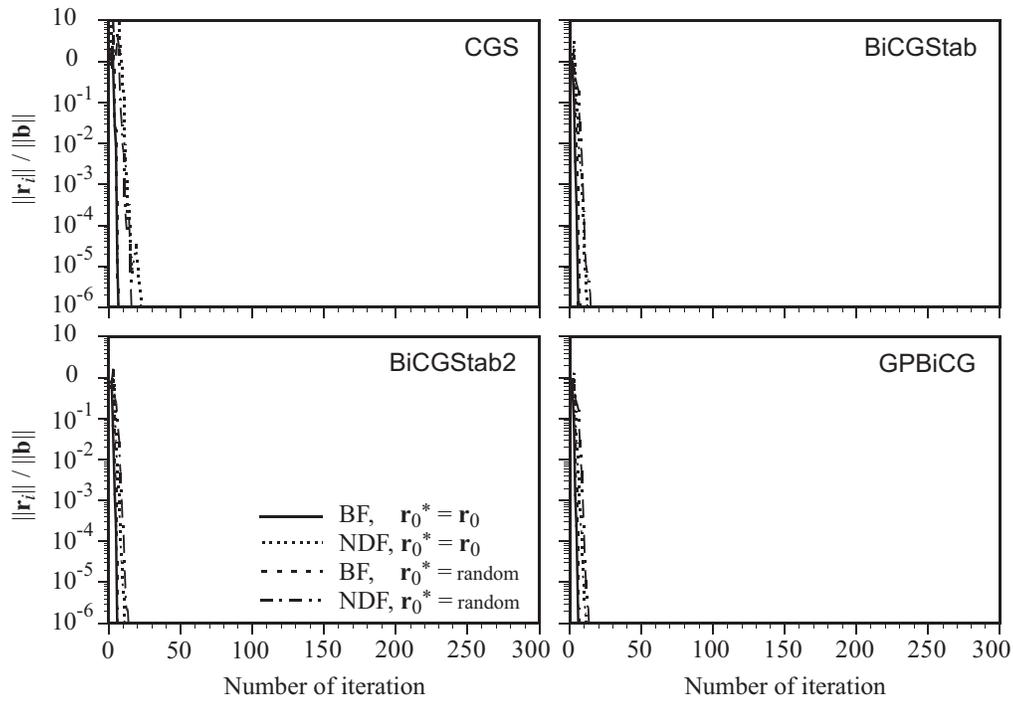


Fig. 6.17: The effect of r_0^* on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 500Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 1536.

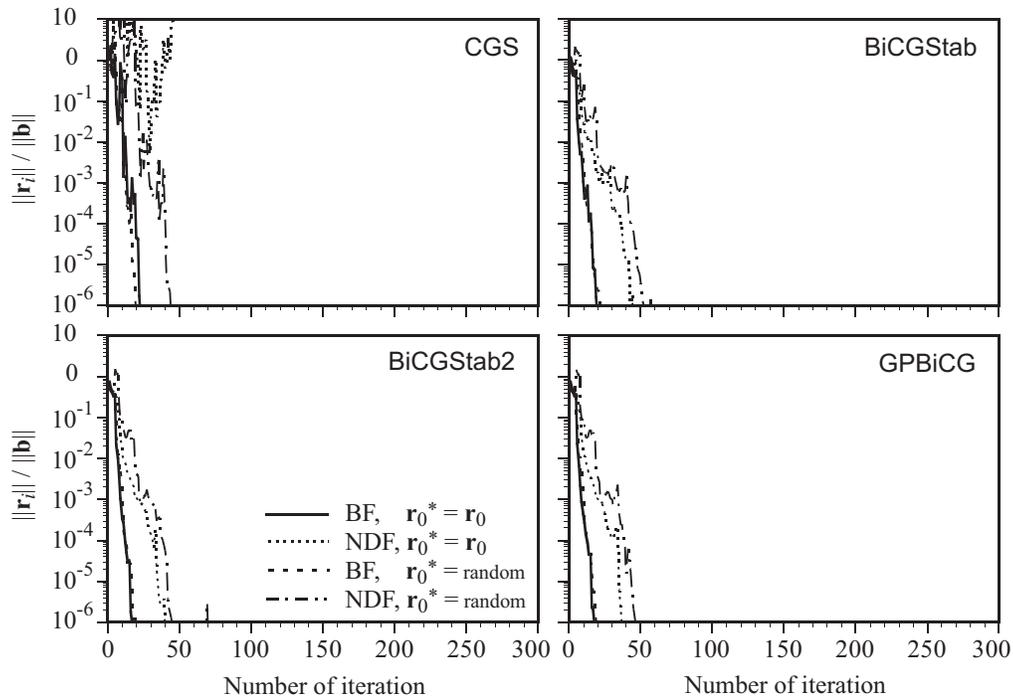


Fig. 6.18: The effect of r_0^* on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 1000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 6144.

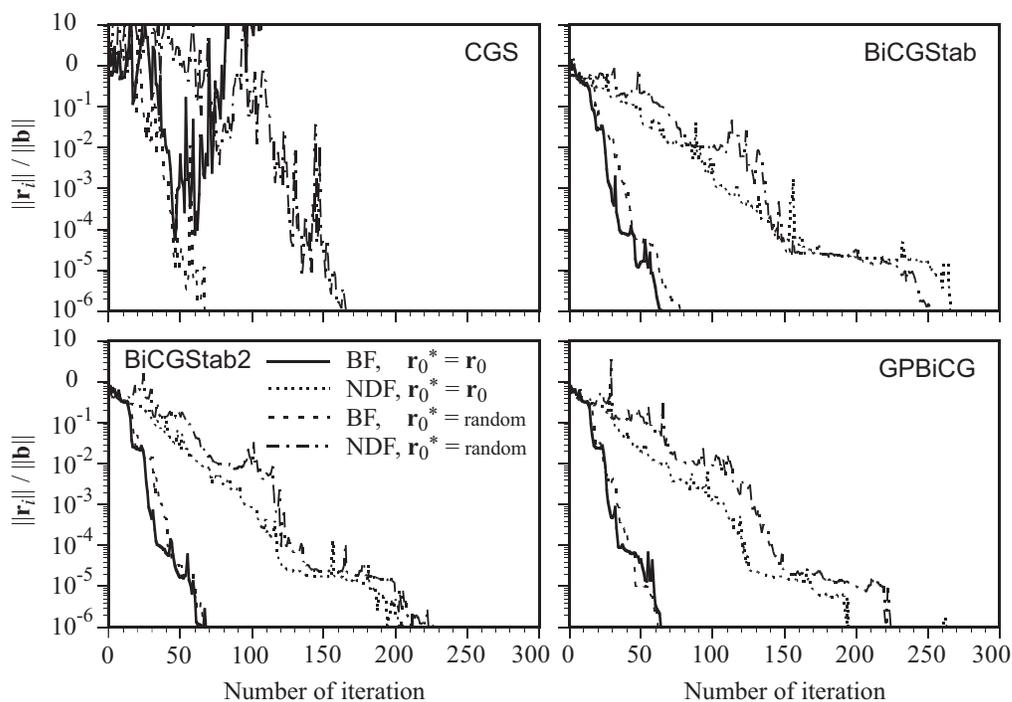


Fig. 6.19: The effect of r_0^* on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 2000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576.

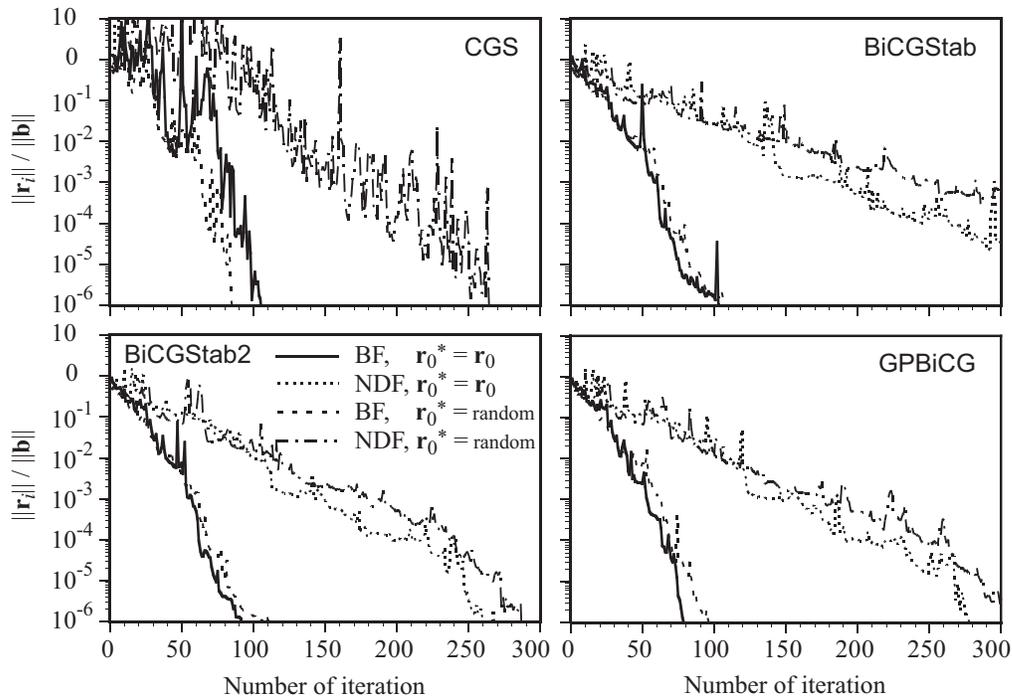


Fig. 6.20: The effect of r_0^* on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 4000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 98304.

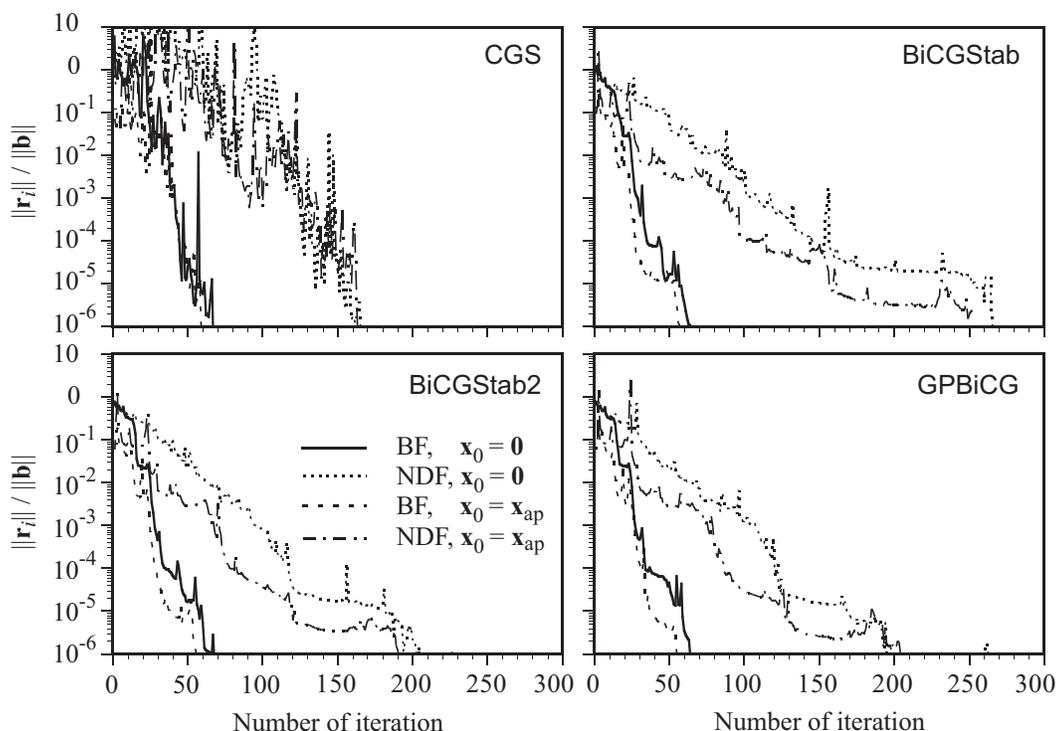


Fig. 6.21: The effect of x_0 on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 2000Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576. x_{ap} is an iterative solution at 1999Hz.

解である。BiCGStab, BiCGStab2, GPBiCG においては, BF, NDF 共にある程度の収束改善効果が見られる。残差の推移の傾向は初期近似解によらず似通っており, 残差ノルムがほぼ一定の値に停留し始める反復回数や, 再度減少が始まる反復回数などが共通している。ここでの収束改善は, 通常の設定(初期近似解 $x_0 = \mathbf{0}$)に対して初期残差が小さいことに起因しており, 概ね残差の小さい側へ平行移動したような傾向を示している。一方 CGS では, 上記と同様の傾向を示すものの, 残差の激しい振動のため, 収束改善したとは一概に言えない。

以上の立方体解析の結果を整理すると, 以下のようになる。

- 境界条件に関して：

- 境界面が一様なインピーダンスの場合, 反復解法によらず吸音率の増加に伴い収束が速くなる。
- 境界面の吸音率が 1 の場合, 定式化, 解法の種類, 解析周波数, DOF の影響は微小である。

- 定式化に関して：
 - BFの方がNDFに比べ収束が速い。
- 反復解法の種類に関して：
 - BiCGStab, BiCGStab2, GPBiCGはほぼ同様の傾向を示し, 中ではBiCGStabがやや収束が遅い。
 - CGSはNDFにおいて発散するなど不安定であり, 有効な収束改善法を適用しない場合は使用すべきでない。
- 固有周波数との関係：
 - 境界が剛な場合, 固有周波数付近で反復回数が増加する。縮退が起きている場合や固有周波数分布の密度が大きい場合は更に顕著となる。
 - NDFにおいては反復回数の増加がより顕著である。
- DOFとの関係：
 - DOFの増加が反復回数を増加させるとは限らない。
 - 解析問題の物理的性状が収束の点で好ましくない場合はDOFが小さい方が収束が速い。
- 収束改善の効果：
 - 対角化前処理は境界が一様インピーダンスを持つ場合は効果がない。
 - 初期シャドウ残差に擬似乱数を用いると, CGSにおいて著しい収束改善効果がある。
 - 初期近似解に周波数軸上の隣接解を用いることで収束改善が期待できる。

6.4.2 小ホール解析

解析手法

小ホールと点音源からなる解析モデル [3, 90] を Fig.6.22, 6.23(a) に示す。小ホールは拡散体が上部に配置され, 天井面はない。また, Fig.6.22 に見られる楕円形状の壁面は視覚的な便宜のための仮想面であり, 実際の形状は Fig.6.23(a) に示すとおりである。形状の更なる詳細については [90] を参照。これを FMBEM で解析するため, Fig.6.23(b) に示すように拡散体上部に側面及び天井面 (以下, 両者を合わせて天井部とする) を設けた。境界条件として, 全面剛の場合, 天井部に吸音率 $a = 1$ となる実数インピーダンスを与えその他の境界を剛とした場合 (以下, actual), 全面に吸音率 $a = 1$ となる実数インピーダンスを与えた場合の 3 種を設定し解析を行う。立方体解析と対応するよう, 境界要素には 1 辺が解析波長の $1/8$ 以下となる四角形一定要素を用い, DOF についてもほぼ同様とな

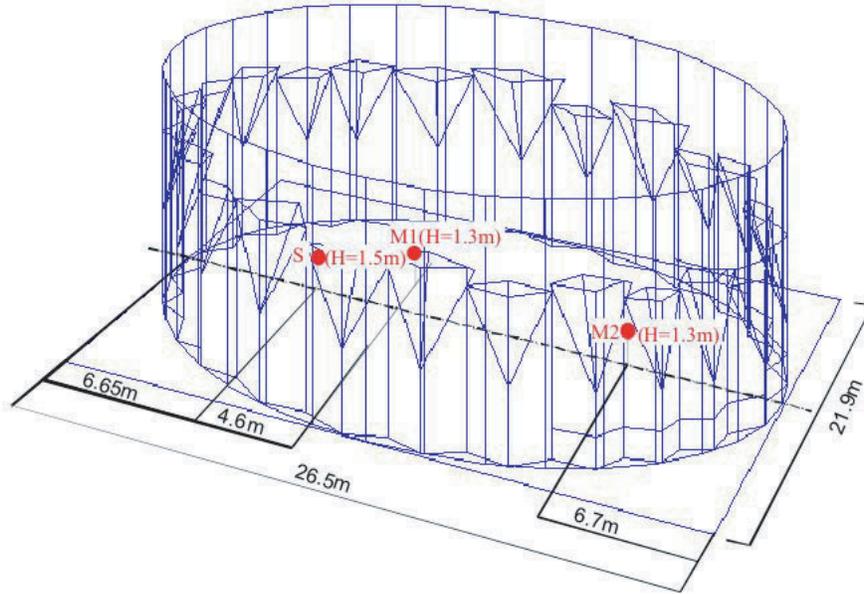


Fig. 6.22: Geometry of a hall, a point source S, and receiving points M1 and M2.

るよう設定する．但し立方体解析と異なり，ここでは要素の形状及び面積が均一でないため，得られる行列の対角項は一様でないこととなる．離散化の一例を Fig.6.23(c) に示す．また，定式化については，上記の立方体解析で比較的速い収束を見せた BF のみとする．解析にあたっての各種条件をまとめて Table 6.4 に示す．

Table 6.4: Conditions for analyses of sound fields in a hall. N is degree of freedom, L is the lowest level number of hierarchical cell structure, and M is the average number of nodes in a cell at the lowest level.

N	Frequency [Hz]	Element width [m]	L	M
6110	63	0.59000	4	10
24514	125	0.27600	5	9

結果と考察

収束性

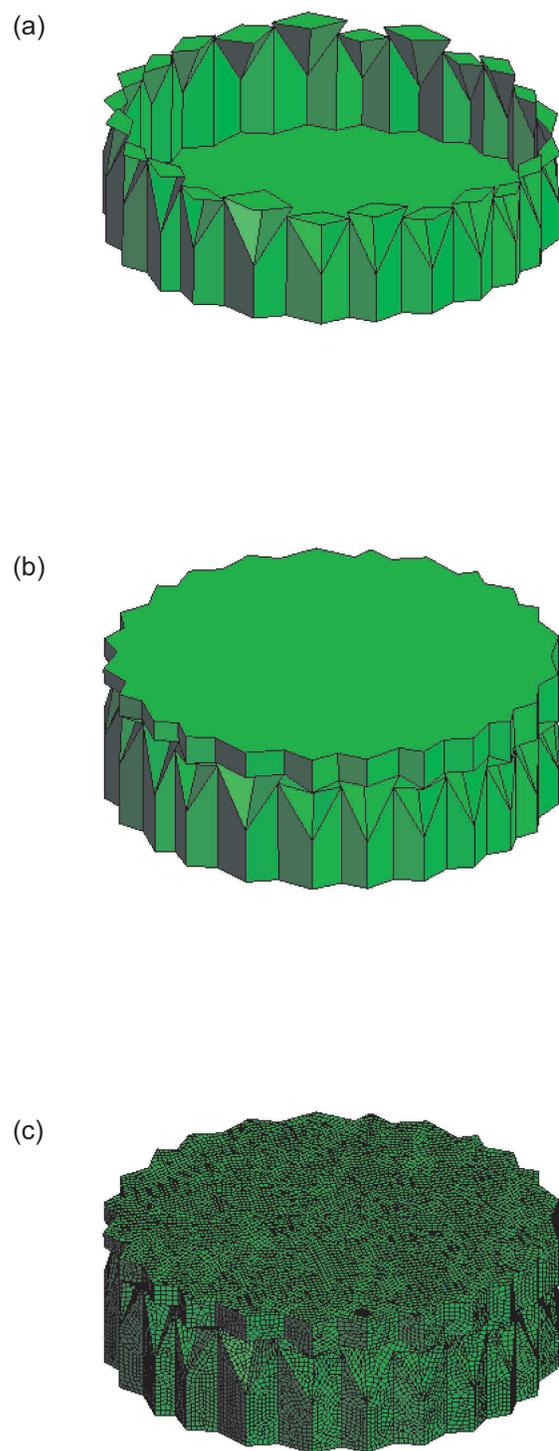


Fig. 6.23: Analysis models for a hall: (a) actual walls and diffusers, (b) boundaries for analyses, and (c) an example of meshing with 24514 quadrilateral elements.

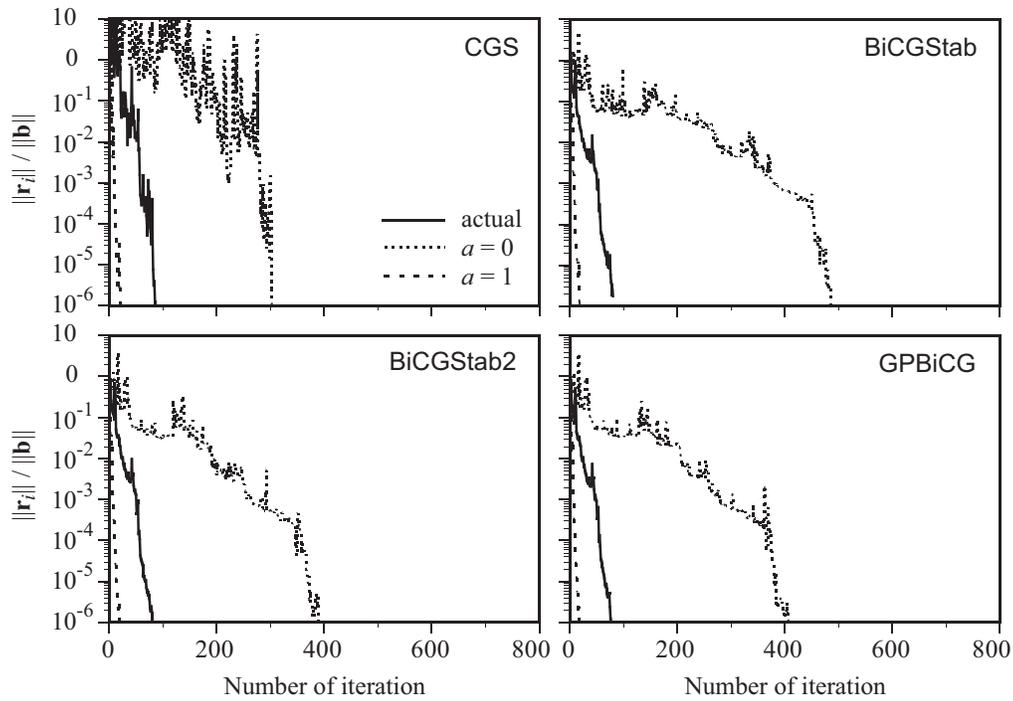


Fig. 6.24: Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields in a hall at 63Hz, using the FMBEM in BF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 6110.

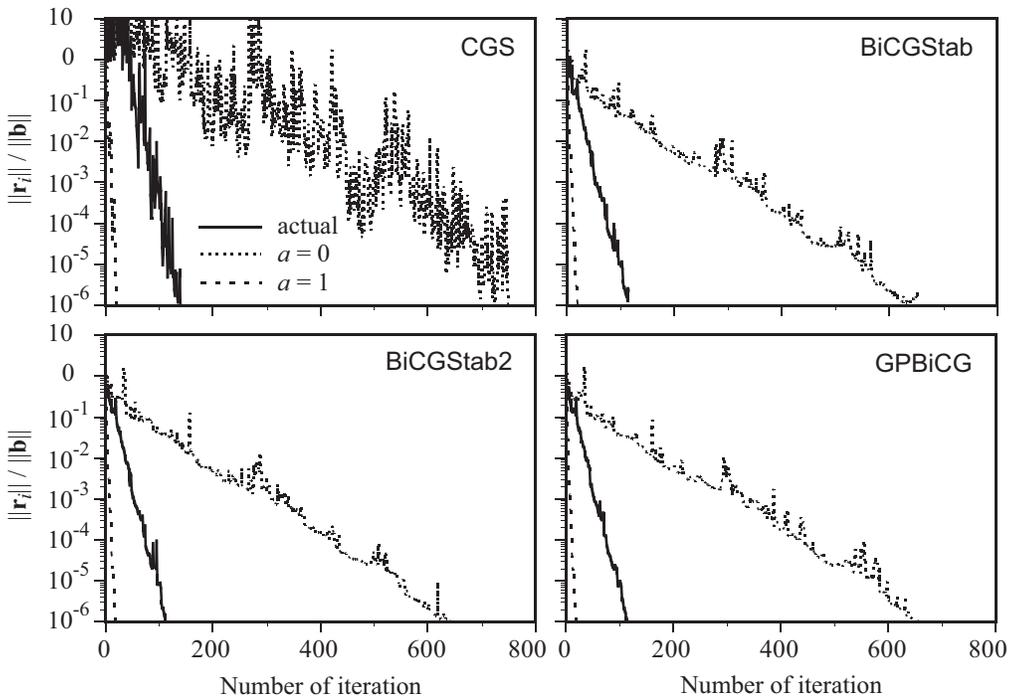


Fig. 6.25: Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields in a hall at 125Hz, using the FMBEM in BF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24514.

残差ノルムによる検討 前処理なしの CGS, BiCGStab, BiCGStab2, GPBiCG の各解法を用いた場合の 3 種の境界条件における反復残差の推移を解析周波数ごとに Fig.6.24, 6.25 に示す. CGS を除いた 3 種の解法ではほぼ同様の収束性状を示している. 立方体解析で収束性状の悪かった CGS においては, 残差が激しく振動するものの, 他の解法と同様の速さで収束しており, エッジを多く含んだ解析対象には有用であることが示唆される. また, 立方体の解析時と同様の傾向として, 反復回数が DOF に比例しないこと, 吸音率 $a = 1$ では手法, 解析周波数, DOF によらずほぼ同様に速い収束を示すこと, 剛境界の場合は著しく反復回数が大きくなることなどがわかる. 吸音境界を含む actual においては, 全面剛境界の場合と比べて著しく速い収束を示しており, 吸音面の存在が収束性を高めることがわかる. 一方, Fig.6.25 をほぼ同様の DOF となる立方体の解析結果 (Fig.6.14) と比較すると, ホール解析の方が境界条件によらず反復回数が大きくなっており, 特に剛境界の場合は著しいことがわかる. これは解析対象がエッジを多く含んでおり形状が複雑であることに起因していると考えられる. また, 吸音率 $a = 1$ の場合でも立方体の場合と比べて反復回数が増加しているのは, 局所作用の仮定に起因するものと考えられる.

収束改善の効果 ここでは上記検討で収束の遅かった剛境界及び actual の場合について, 収束改善法の効果を検討する.

対角化前処理: 対角化前処理が反復残差の推移に及ぼす影響を反復解法ごとに Fig.6.26 に示す. 本解析では要素サイズが一樣でなく, また actual においては境界が一樣インピーダンスでないことから, 立方体解析時と異なりある程度の効果が期待されたが, 解法, 境界条件によらず前処理の影響はほとんど見られない.

初期シャドウ残差 = 擬似乱数: 初期シャドウ残差を擬似乱数とする設定が反復解法に及ぼす影響を反復解法ごとに Fig.6.27 に示す. どの解法の場合でも効果はほとんど認められない. 立方体解析において顕著な収束改善を示した CGS においても同様である. 立方体解析における初期シャドウ残差の効果と合わせて考察すると, 初期シャドウ残差を擬似乱数とする設定が有効なのは, 立方体内部音場のように固有周波数分布に偏りがあるような場合のみであることが示唆される.

初期近似解 = 周波数軸上隣接解: 初期近似解を周波数軸上の隣接解とする設定が反復回数に及ぼす影響を反復解法ごとに Fig.6.28 に示す. 但し, ここでの隣接解はそれぞれ同じ反復解法で収束判定値 $\varepsilon = 10^{-6}$ を用いて算出した 1999Hz での反復解である. 解法, 境界条件によらず効果は見られない. これは, 本収束改善法が有効であった立方体解析時と反復回数 0 の時の残差を比較すればわかるように, 立方体解析と異なり, 周波数軸上の隣接解が十分な近似解となっていないことが原因と考えられる. このことから, エッジを多く含んだ複雑な音場では初期近似解を周波数軸上隣接解とする設定の収束改善効果は薄いと考えられる.

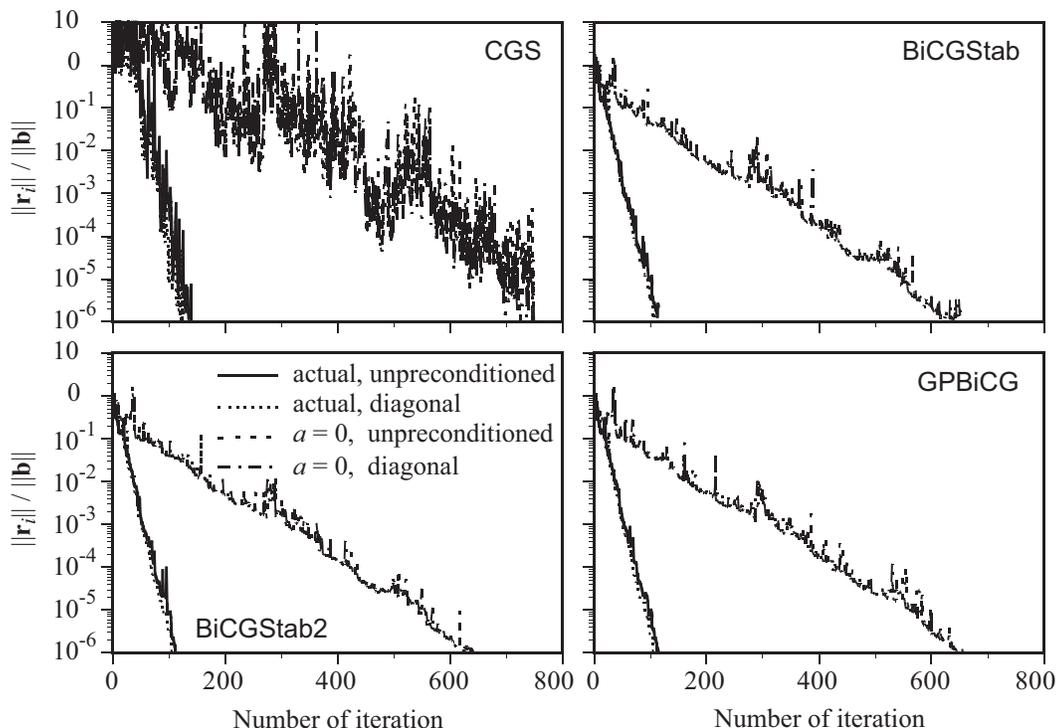


Fig. 6.26: The effect of diagonal preconditioning on the residual of iteration for analyzing sound fields in a hall with rigid boundary and actual boundary at 125Hz, using the FMBEM in BF with CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24514.

以上の小ホール解析の結果を整理すると、以下ようになる。

- 境界条件に関して：
 - 吸音面の存在が収束性を高める。
- エッジの影響に関して：
 - エッジを多く含んだ問題においては、境界条件によらず収束が遅くなる。
 - エッジを多く含んだ問題においては、CGS においても他の解法と同様の収束性が得られる。
- 収束改善の効果：
 - 対角化前処理は、BF の場合、ある程度実際的な境界条件の設定範囲においては、境界が一様インピーダンスでない場合、あるいは境界要素サイズが一様でない場合でも効果が微小である。
 - エッジを多く含んだ問題の場合、初期シャドウ残差に擬似乱数を用いても効果はない。
 - エッジを多く含んだ問題の場合、初期近似解に周波数軸上の隣接解を用いても十分な近似となりにくく、収束改善は期待しにくい。

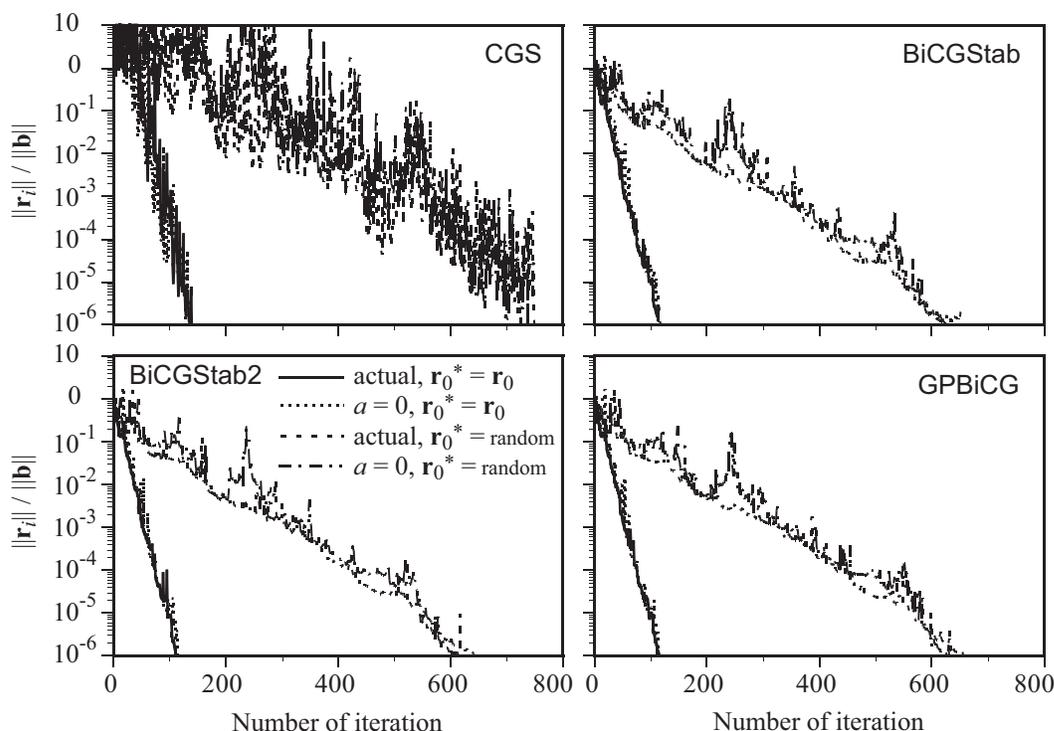


Fig. 6.27: The effect of \mathbf{r}_0^* on the residual of iteration for analyzing sound fields in a hall with rigid boundary and actual boundary at 125Hz, using the FMBEM in BF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24514.

6.5 外部問題における検討

ここでは理論解の求まる単純形状の問題として振動する立方体周辺の音場を、実音場に対応した複雑形状の問題として拡散体周辺の音場を取り上げる。境界条件、定式化、反復解法の種類による影響の他、前者においては特に BEM, FMBEM において問題となる外部問題における解の一意性の問題に関して、見かけの固有周波数と収束性の関係を、後者においては特に境界形状のエッジ、要素サイズのばらつきの影響について考察する。また、上述した収束改善法の効果について調べる。なお以降では、特に断らない場合は、内部問題の解析時と同様、反復解法において従来よく用いられる初期設定として、音圧ベクトルの初期近似解を $\mathbf{x}_0 = 0$, 初期シャドウ残差を $\mathbf{r}_0^* = \mathbf{r}_0$ と与えることとする。FMBEM の設定については、各種設定パラメータを第 4 章に、セル階層化レベルを第 5 章に準じて設定する。なお、Burton-Miller 法に関しては、BF と NDF の両式の線形結合のための係数 α の値により収束性が変化すると考えられるが、ここでは α による収束性への影響を検討した文献 [91] を参照し、 $\alpha = 1/jk$ を採用する。

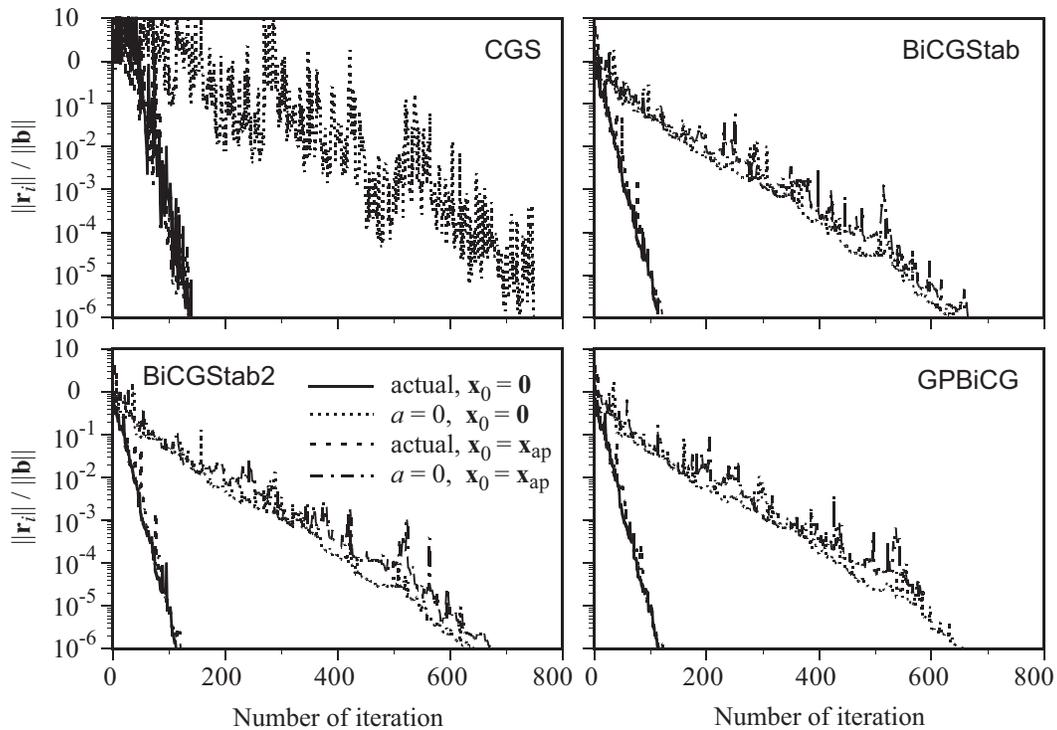


Fig. 6.28: The effect of \mathbf{x}_0 on the residual of iteration for analyzing sound fields in a cube with rigid boundary at 125Hz, using the FMBEM in BF and NDF with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24514. \mathbf{x}_{ap} is an iterative solution at 124Hz.

6.5.1 立方体解析

解析手法

1 辺 1m の立方体からなる解析モデルを Fig.6.29 に示す．境界条件として，立方体中央に仮定した点音源によって生成される粒子速度を与え，外部問題の解析を行う [57]．節点位置での粒子速度 $v(\mathbf{r}_n)$ は以下のように表される．

$$v(\mathbf{r}_n) = \frac{(1 - jkr_{ns})Q \exp(jkr_{ns})}{4\pi r_{ns}^2} \cos(\mathbf{n}_n, \mathbf{r}_{ns}) \quad (6.26)$$

但し， Q ：仮想点音源の体積速度， \mathbf{r}_s ：立方体中央位置， \mathbf{r}_n ：節点位置．

この条件下での解析結果は点音源からの放射音場と等しくなることから，誤差評価が可能となる．内部問題の解析時と同様，特に断らない場合を除き，境界要素のサイズは解析波長との関係で決定するものとし，1 辺が解析波長の 1/8 以下となる四角形一定要素を用い

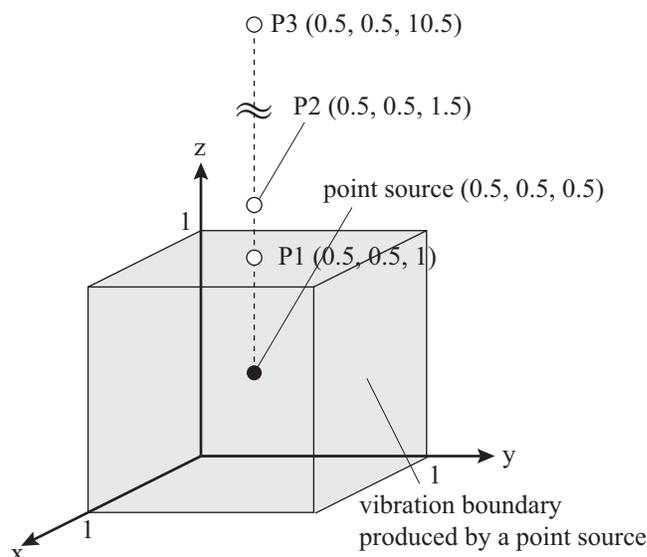


Fig. 6.29: Geometry of an analysis model. Velocity distribution on the surface of the cube approximates that produced by a point source at the center.

る．全要素の形状及び面積は同一とする．解析にあたっての各種条件は Table 6.1 と同様である．

結果と考察

計算精度 反復解法に前処理なしの BiCGStab を用いた場合の，理論解からの誤差（音圧振幅の相対誤差（上）と位相の誤差（下））を受音点ごとにそれぞれ Fig.6.30, 6.31, 6.32 に示す．ここでは節点位置における音圧の理論解 $p_{th}(\mathbf{r}_n)$ を以下の式により求めている．

$$p_{th}(\mathbf{r}_n) = -j\omega\rho Q \frac{\exp(jkr_{ns})}{4\pi r_{ns}} \quad (6.27)$$

但し， ρ ：空気密度．

DOF は解析周波数によらず一定値 6144 とし，最小の解析波長の $1/5$ 以下となっている．また，図の上部に内部の振動モードの固有周波数を奇数モード，偶数モードに分けて示す．仮想点音源が立方体中央に位置していることから，本問題では内部 Dirichlet 問題，内部 Neumann 問題において励起されるモードはそれぞれ奇数モードのみ，偶数モードのみとなる．計算結果から，BF では奇数モード，NDF では偶数モードの固有周波数の位置で誤差が顕著となることが確認できる．一方，Burton-Miller 法（BM）においてはいずれの位置でも誤差は見られない．次に反復解法の違いが精度に及ぼす影響を見るため，理論解と FMBEM による反復解の境界節点上での音圧分布の違いを Table 6.5 に示す．立方体内部

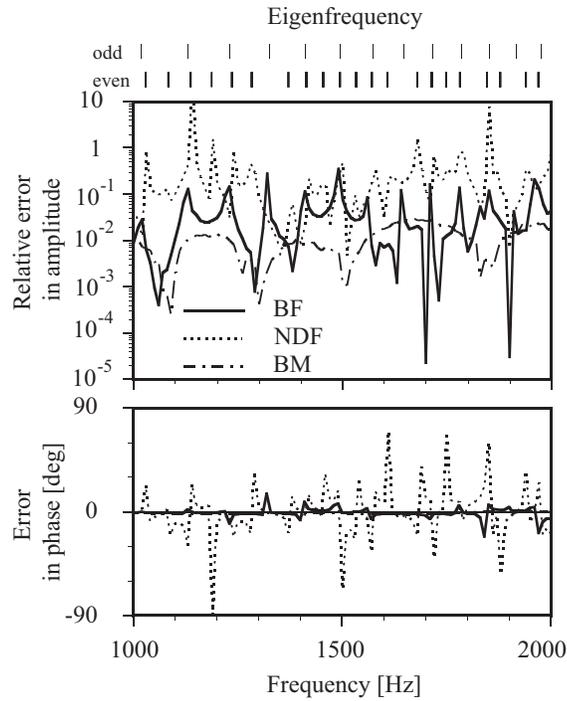


Fig. 6.30: Errors for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$. The receiver point is P1 (0.5, 0.5, 1).

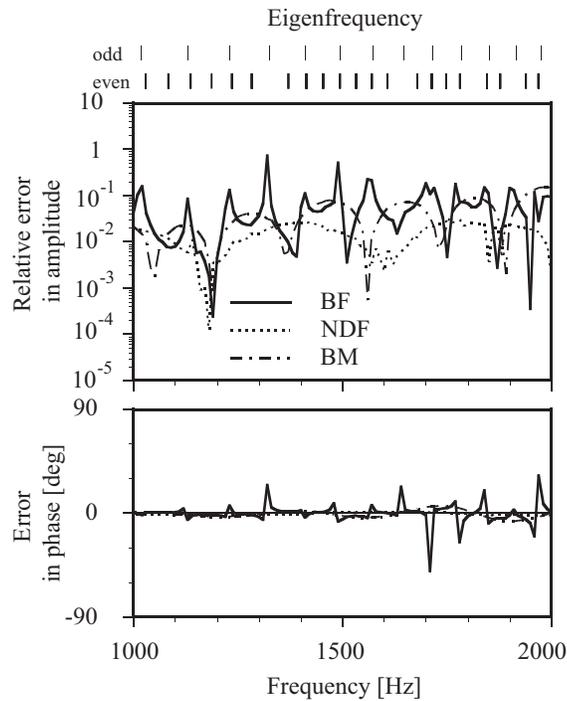


Fig. 6.31: Errors for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$. The receiver point is P2 (0.5, 0.5, 1.5).

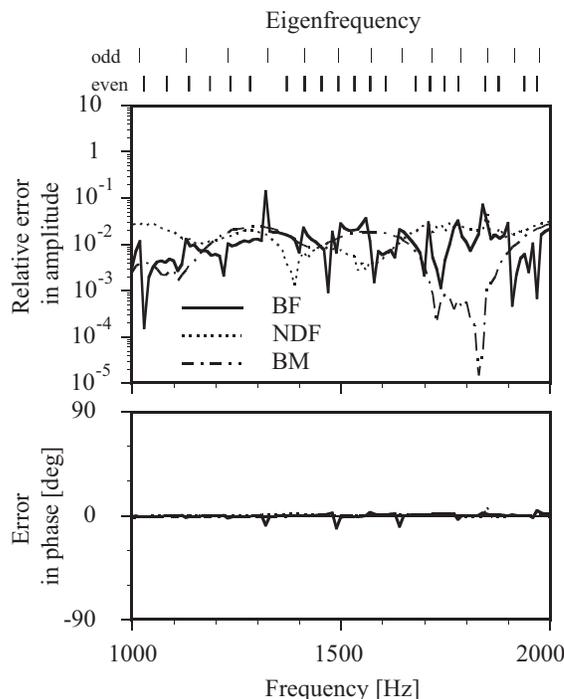


Fig. 6.32: Errors for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$. The receiver point is P3 (0.5, 0.5, 10.5).

問題の解析時と同様，評価量として Eq.(6.25) を，収束判定値に $\varepsilon = 10^{-6}$ を用いている．CGS では丸め誤差の影響により収束しない場合があり，特に NDF 及び BM で多く見られることがわかる．また，他の 3 解法においても DOF の大きい問題では BM が収束していない．しかしながら，収束したものについては，本計算例の範囲では CGS も含め解法の違いによる差は見られない．また，各種の収束改善法を施した場合の解についても同様であった．このことから，以下では収束性状の評価のみにて反復解法と問題の適性を検討することとする．

収束性

周波数応答関数による検討 前処理なしの BiCGStab を用いた場合の反復回数を BF，NDF，BM ごとに Fig.6.33 に示す．但し，DOF は解析周波数によらず一定値 6144 とし，最小の解析波長の 1/5 以下となっている．また，図の上部に内部の振動モードの固有周波数を示す．NDF では偶数モードの固有周波数の位置で反復回数が著しく増加している一方，BF では奇数モードの固有周波数の位置においても反復回数にほとんど影響がないことがわかる．BM については，反復回数が増加する周波数がいくつかあるものの，内部固有周波数との対応は見られないことから，問題の物理的な性状ではなく，係数行列が悪条

Table 6.5: Differences between theoretical results and those using the FMBEM with unpreconditioned iterative solvers. N is degree of freedom, and ξ_{ite} is defined as Eq.(6.25).

N	Frequency [Hz]	Formulation	$10 \log_{10} \varepsilon_{ite}$ [dB]			
			CGS	BiCGStab	BiCGStab2	GPBiCG
1536	500	BF	-20.90	-20.90	-20.90	-20.90
		NDF	-7.63	-7.63	-7.63	-7.63
		BM	-16.08	-16.08	-16.08	-16.08
6144	1000	BF	-17.24	-17.24	-17.24	-17.24
		NDF	-	-10.49	-10.49	-10.49
		BM	-	-16.40	-16.40	-16.40
24576	2000	BF	-19.68	-19.68	-19.68	-19.68
		NDF	-	-6.36	-6.36	-6.36
		BM	-	-	-	-
98304	4000	BF	-18.03	-18.03	-18.03	-18.03
		NDF	-	-	-12.66	-12.66
		BM	-	-	-	-

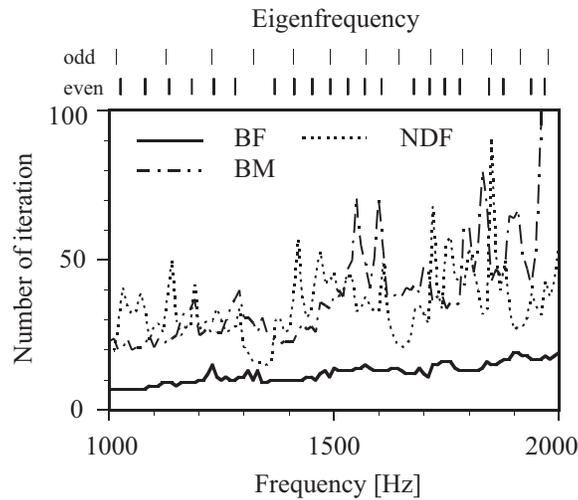


Fig. 6.33: The number of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6144, and $\varepsilon = 10^{-3}$.

件であることに起因していると考えられる。

残差ノルムによる検討 反復解法の種類による影響を見るため、前処理なしの CGS, BiCGStab, BiCGStab2, GPBiCG の各解法を用いた場合の反復残差の推移を解析周波数ごとに Fig.6.34 ~ 6.37 に示す。内部問題の解析時と同様、CGS の収束が非常に不規則なこと、特に NDF, BM の場合に発散する傾向があること、その他の 3 解法においてはいずれも良く似た傾向を示すことがわかる。また、解法及び周波数によらず BF に比べ NDF と BM の収束が遅く、解析周波数が高くなると BM の収束性状が著しく悪化することがわかる。これは BM で得られる行列の要素が特異性の強い NDF の行列要素を含んでおり、丸め誤差の影響を受けやすい悪条件であることが原因と考えられ、BF の方程式と結合したことにより、更に悪条件となったと解釈できる。BM に関しては GPBiCG が最も収束性状が良く、BiCGStab, BiCGStab2 の残差が停滞してしまう 4000Hz においてもわずかに残差を減少させている。

収束改善の効果 対角化前処理: BiCGStab において対角化前処理が反復残差の推移に及ぼす影響を Fig.6.38 に示す。立方体内部問題の解析時と同様、係数行列の対角項が同一のため、解法によらず前処理の影響はほとんど見られない。他の解法の場合も同様であった。

初期シャドウ残差 = 擬似乱数: 初期シャドウ残差を擬似乱数とする設定が反復回数に及ぼす影響を反復解法ごとに Fig.6.39 に示す。BiCGStab, BiCGStab2, GPBiCG においては、BF, NDF によらず収束改善効果は見られない。対照的に、従来の設定 ($r_0^* = r_0$) の場合には他の解法に比べ顕著に収束性が悪かった CGS においては、NDF, BM において著しい収束改善効果が見られ、結果的に NDF においては他の解法と同程度の、BM においては他の解法以上の優れた収束性を見せている。このことから、BM に関しては、ここに示す 4 解法の中では CGS に初期シャドウ残差 = 擬似乱数の設定を用いたものを使用するのが良策の一つであると言える。

初期近似解 = 周波数軸上隣接解: 収束の遅かった Burton-Miller 法において、初期近似解を周波数軸上の隣接解とする設定が反復回数に及ぼす影響を反復解法ごとに Fig.6.40 に示す。但し、CGS においては顕著な収束改善効果のあった「初期シャドウ残差 = 擬似乱数」の設定を併用している。また、ここでの隣接解は CGS ($\varepsilon = 10^{-6}$, 初期シャドウ残差 = 擬似乱数) を用いて算出した 1999Hz での反復解である。内部問題の立方体解析時と同様、BiCGStab, BiCGStab2, GPBiCG においてはある程度の収束改善効果が見られる。ここでの収束改善は、通常の設定 (初期近似解 $x_0 = 0$) に対して初期残差が小さいことに起因しており、概ね残差の小さい側へ平行移動したような傾向を示している。

以上の立方体解析の結果を整理すると、以下ようになる。

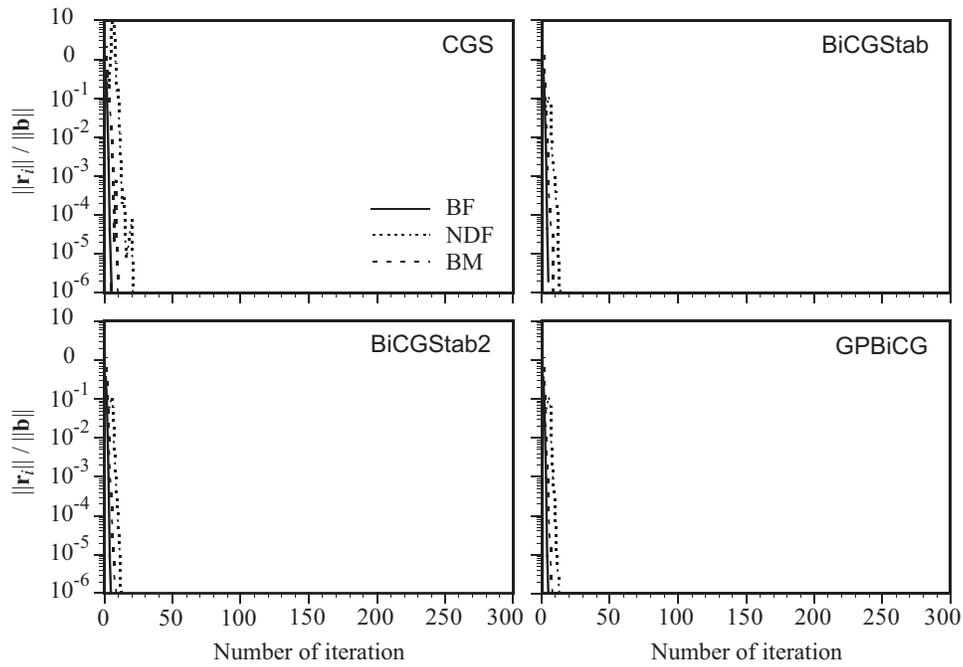


Fig. 6.34: Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary at 500Hz, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 1536.

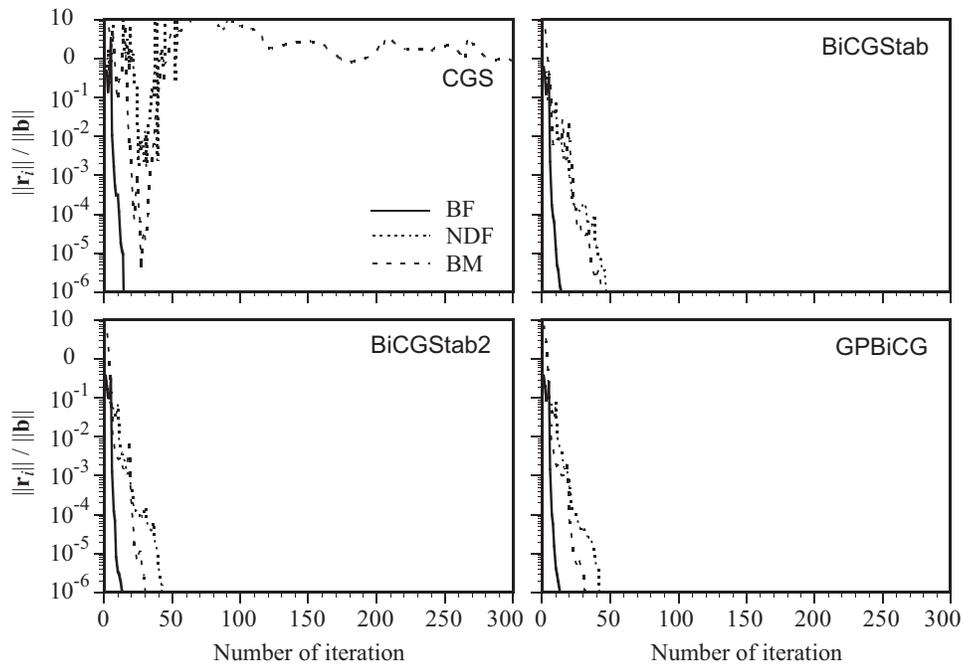


Fig. 6.35: Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary at 1000Hz, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 6144.

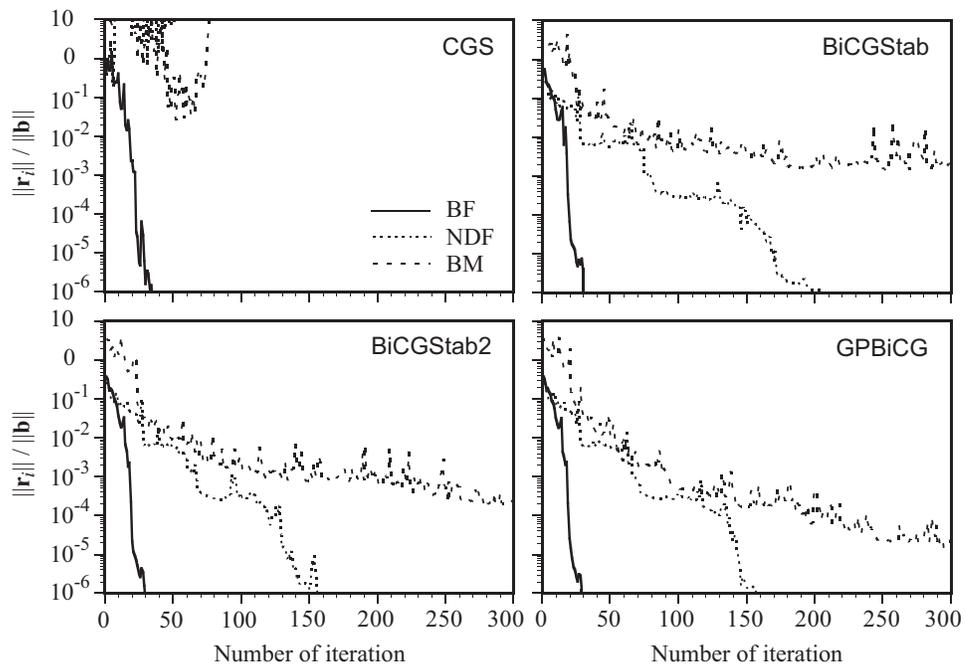


Fig. 6.36: Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary at 2000Hz, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576.

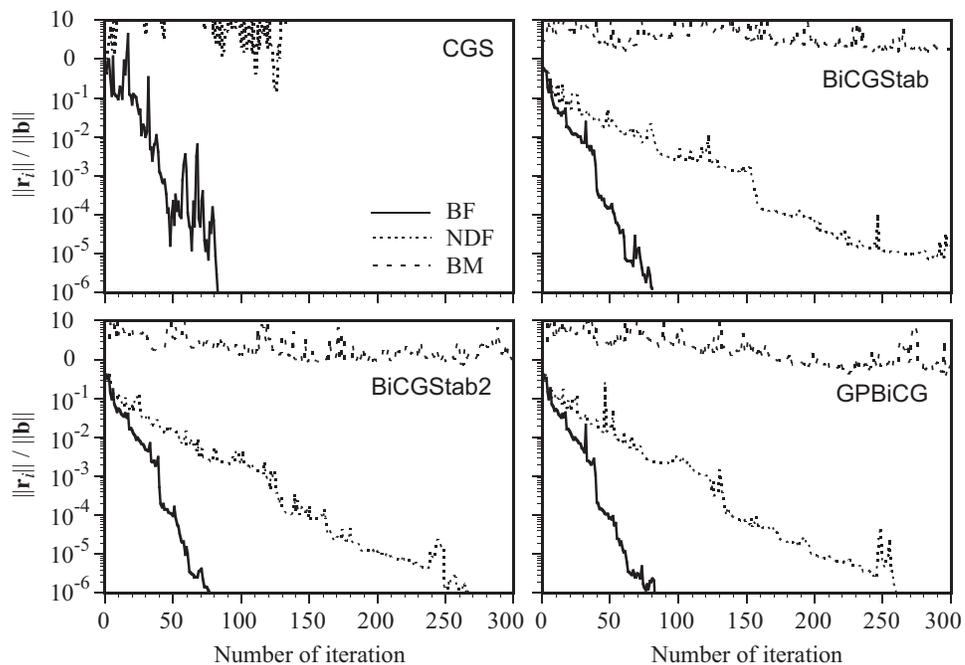


Fig. 6.37: Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary at 4000Hz, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 98304.

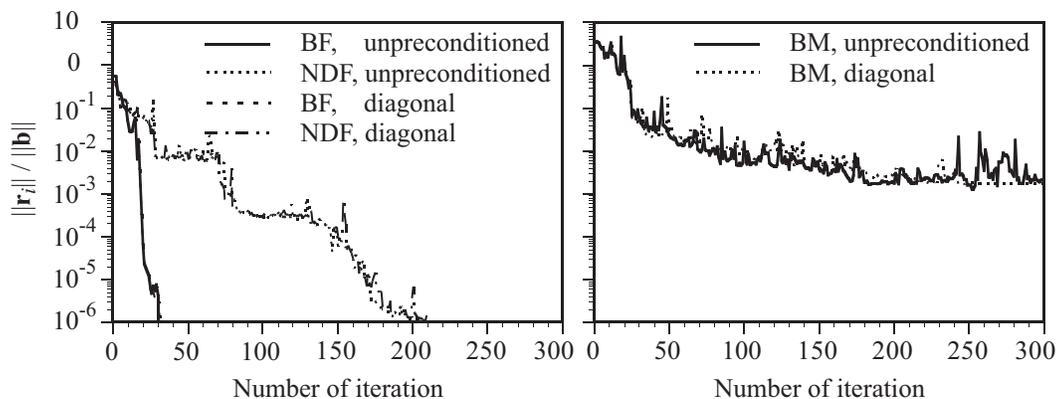


Fig. 6.38: The effect of diagonal preconditioning on the residual of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary at 2000Hz, using the FMBEM in BF, NDF, and Burton-Miller formulation (BM) with BiCGStab. DOF is 24576.

- 定式化に関して：
 - NDF, Burton-Miller 法の方が BF に比べ収束が遅く, DOF の大きい問題では Burton-Miller 法の収束劣化が著しい.
- 反復解法の種類に関して：
 - BiCGStab, BiCGStab2, GPBiCG はほぼ同様の傾向を示し, 中では GPBiCG が収束が速く, BiCGStab がやや遅い.
 - CGS は NDF, Burton-Miller 法において発散するなど不安定であり, 有効な収束改善法を適用しない場合は使用すべきでない.
- 見かけの固有周波数との関係：
 - BF の場合は影響が微小である.
 - NDF では見かけの固有周波数付近で反復回数が増加する.
 - Burton-Miller 法においては関係が見られない.
- 収束改善の効果：
 - 対角化前処理は境界が一様インピーダンスを持つ場合は効果がない.
 - 初期シャドウ残差に擬似乱数を用いると, CGS を用いた場合に著しい収束改善効果がある.
 - 初期近似解に周波数軸上の隣接解を用いることで収束改善が期待できる.

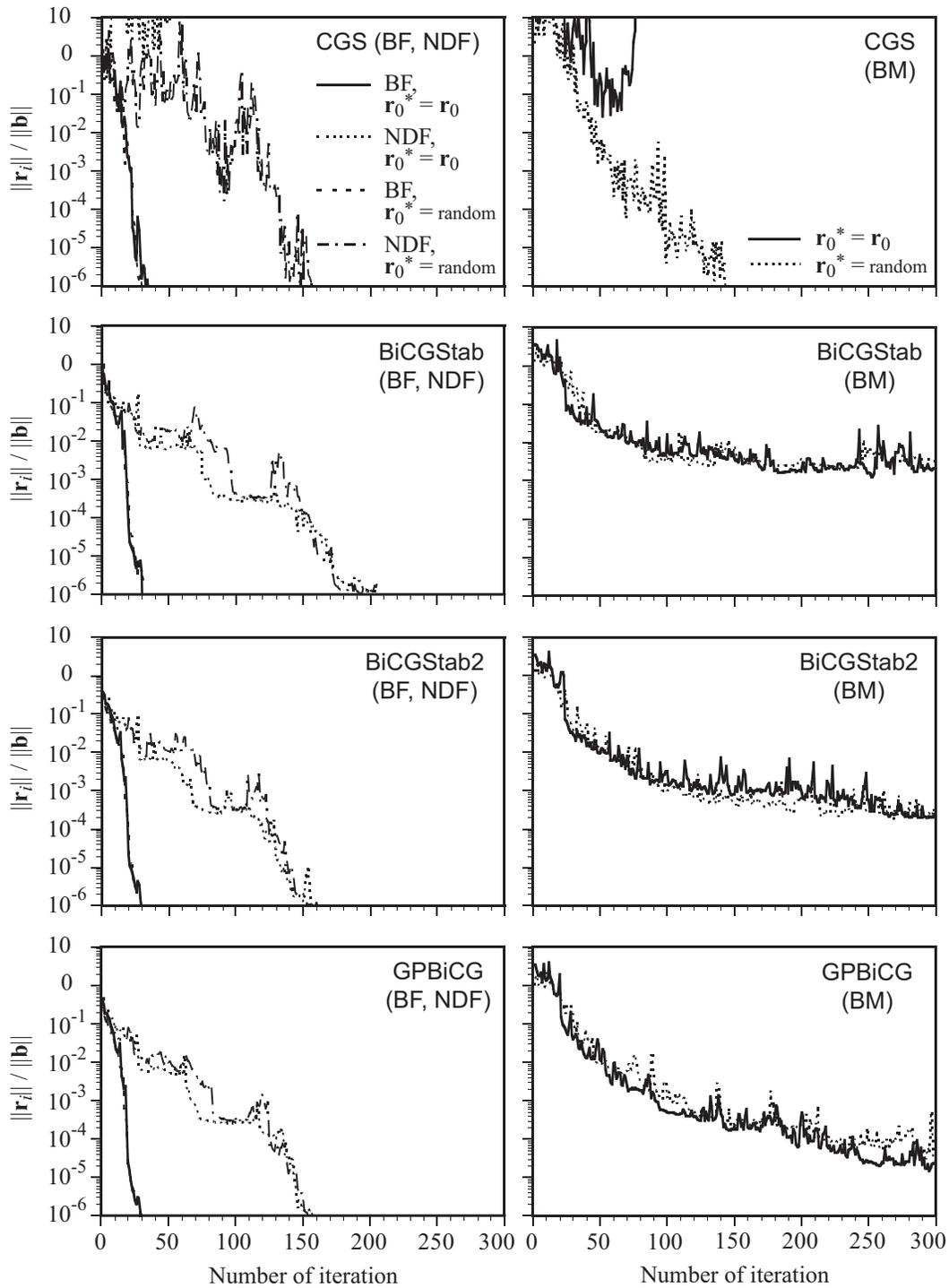


Fig. 6.39: The effect of r_0^* on the residual of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary at 2000Hz, using the FMBEM in BF, NDF and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576.

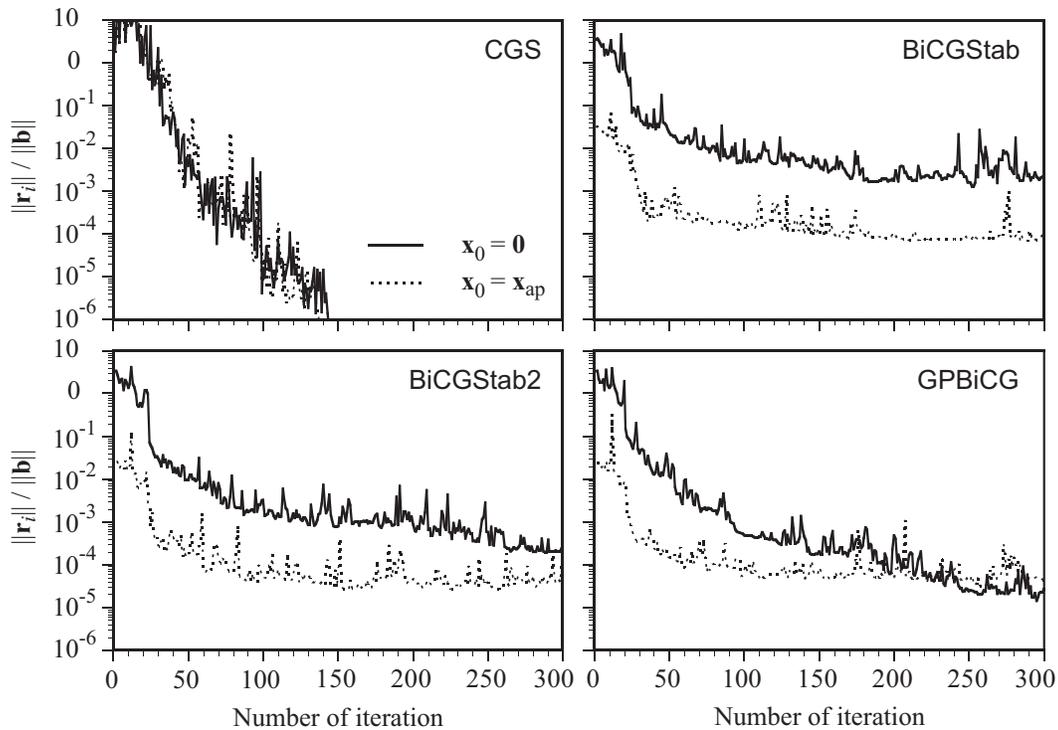


Fig. 6.40: The effect of \mathbf{x}_0 on the residual of iteration for analyzing sound fields around a cube with vibration boundary at 2000Hz, using the FMBEM in Burton-Miller formulation with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24576. \mathbf{x}_{ap} is an iterative solution at 1999Hz.

6.5.2 音響拡散体解析

解析手法

屏風折れ型の音響拡散体 [90] と点音源からなる解析モデルを Fig.6.41, 6.42(a) に示す。境界条件は剛とする。立方体解析と対応するよう、境界要素には1辺が解析波長の1/8以下となる四角形一定要素を用い、DOFについてもほぼ同様となるよう設定する。但し立方体解析と異なり、ここでは要素の形状及び面積が均一でないため、得られる行列の対角項は一様でないこととなる。離散化の一例を Fig.6.42(b) に示す。また、定式化については、上記の立方体解析で比較的速い収束を見せたBFと、解の一意性を保証するBMを用いる。解析にあたっての各種条件をまとめて Table 6.6 に示す。

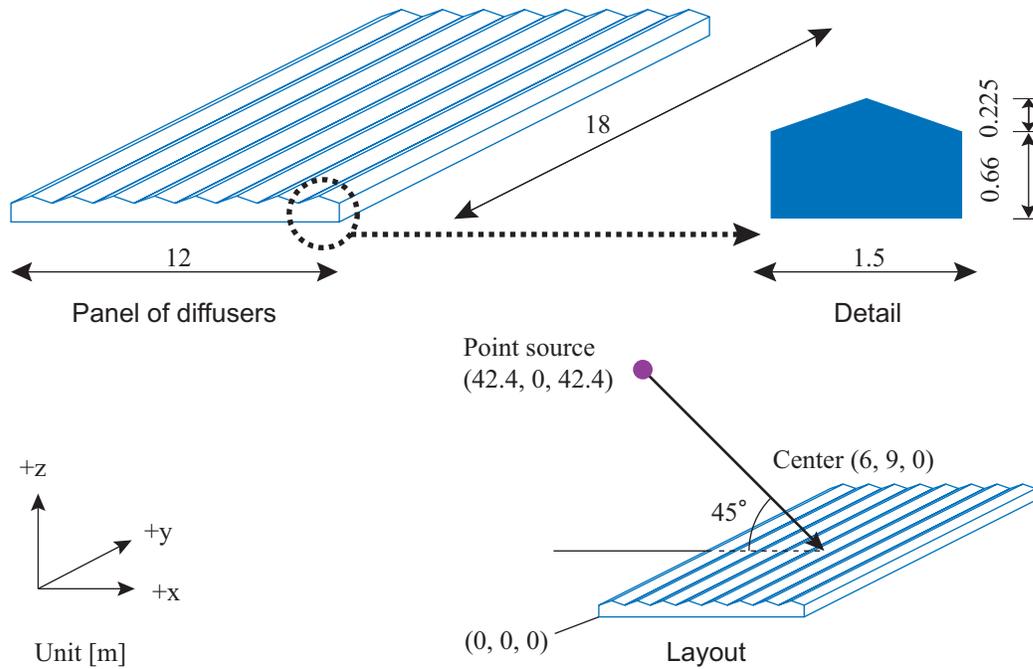


Fig. 6.41: Geometry of a panel of sound diffusers and a point source.

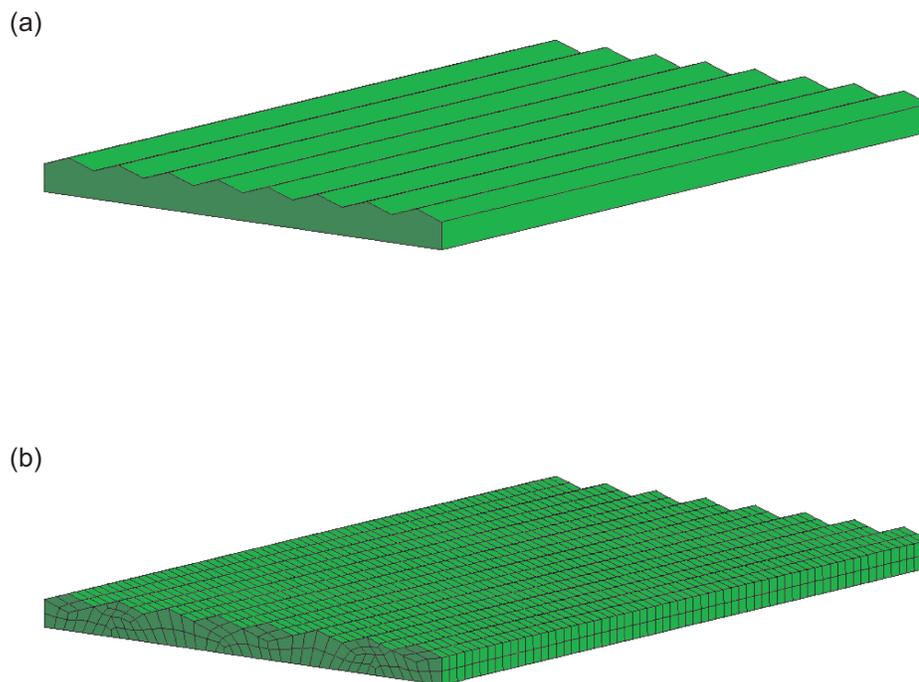


Fig. 6.42: Analysis models for a panel of sound diffusers: (a) boundaries for analyses, and (b) an example of meshing with 5672 quadrilateral elements.

Table 6.6: Conditions for analyses of sound fields around diffusers. N is degree of freedom, L is the lowest level number of hierarchical cell structure, and M is the average number of nodes in a cell at the lowest level.

N	Frequency [Hz]	Element width [m]	L	M
5672	125	0.28300	4	32
24616	250	0.15000	5	17

結果と考察

収束性

残差ノルムによる検討 前処理なしの CGS, BiCGStab, BiCGStab2, GPBiCG の各解法を用いた場合の反復残差の推移を解析周波数ごとに Fig.6.43, 6.44 に示す. BF においては解法によらず同様の収束性状を示している. 一方 BM では, 立方体解析で収束性状の悪かった CGS が速い収束を見せており, 特に DOF の大きい 250Hz では他の解法に比べ著しく速いことがわかる. このことから, 内部問題の場合と同様, 外部問題においても CGS はエッジを多く含んだ解析対象に有用であることが示唆される. BiCGStab は他と比較して収束が遅く, 250Hz では他の解法と比べて著しく遅いことがわかる. また, Fig.6.43, 6.44 をほぼ同様の DOF となる立方体の解析結果 (Fig.6.35, 6.36) と比較すると, 拡散体解析の方が反復解法, 定式化によらず反復回数が大きくなっている. これは内部問題同様, 解析対象の持つエッジの多さ, 形状の複雑性に起因していると考えられる.

収束改善の効果 対角化前処理: 対角化前処理が反復残差の推移に及ぼす影響を反復解法ごとに Fig.6.45, 6.46 に示す. また, 参考に 125Hz の場合の NDF による解析結果を Fig.6.47 に示す. BF においては効果が見られない一方, NDF, BM においては反復解法, 解析周波数によらず収束改善効果が見られる. 本解析では要素サイズが一樣でなく係数行列の対角項が同じ値でないため, 対角項を揃える対角化前処理が有効に働いたものと考えられる. ホール解析時も含め BF では効果がなく, NDF, BM でのみ効果的であった理由としては, NDF, BM では係数行列に超特異核を含む積分からなる対角項を持っており, これらの値が要素の形状, 面積により変動しやすいことが考えられる.

初期シャドウ残差 = 擬似乱数: 初期シャドウ残差を擬似乱数とする設定が反復解法に及ぼす影響を反復解法ごとに Fig.6.48 に示す. どの解法の場合でも効果は認められない. 内部問題と同様, 外部問題においても複雑形状の場合は初期シャドウ残差を擬似乱数とする設定の効果は微小であると考えられる.

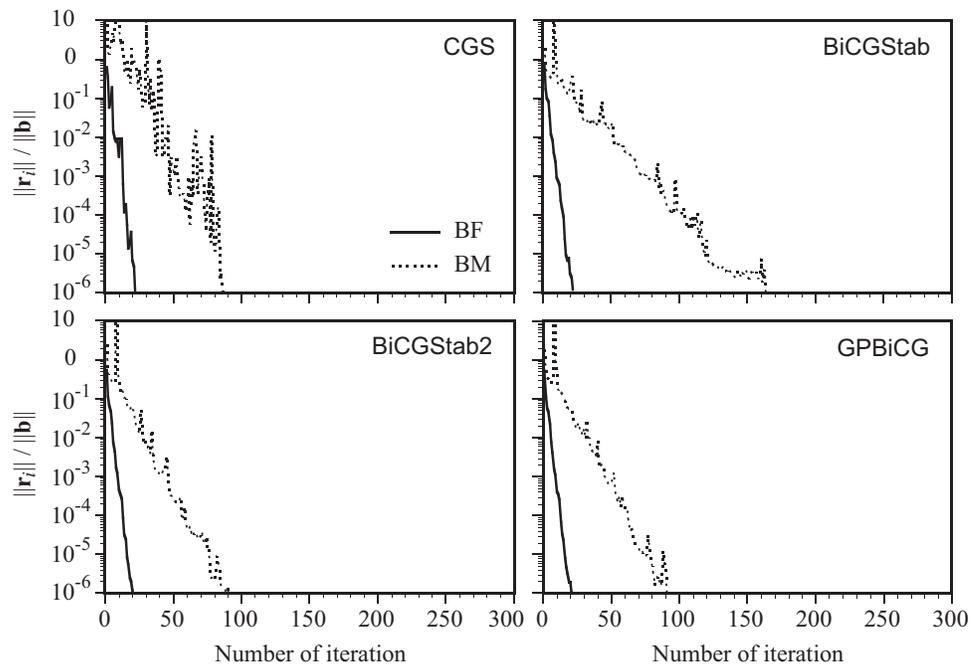


Fig. 6.43: Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields around diffusers at 125Hz, using the FMBEM in BF and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 5672.

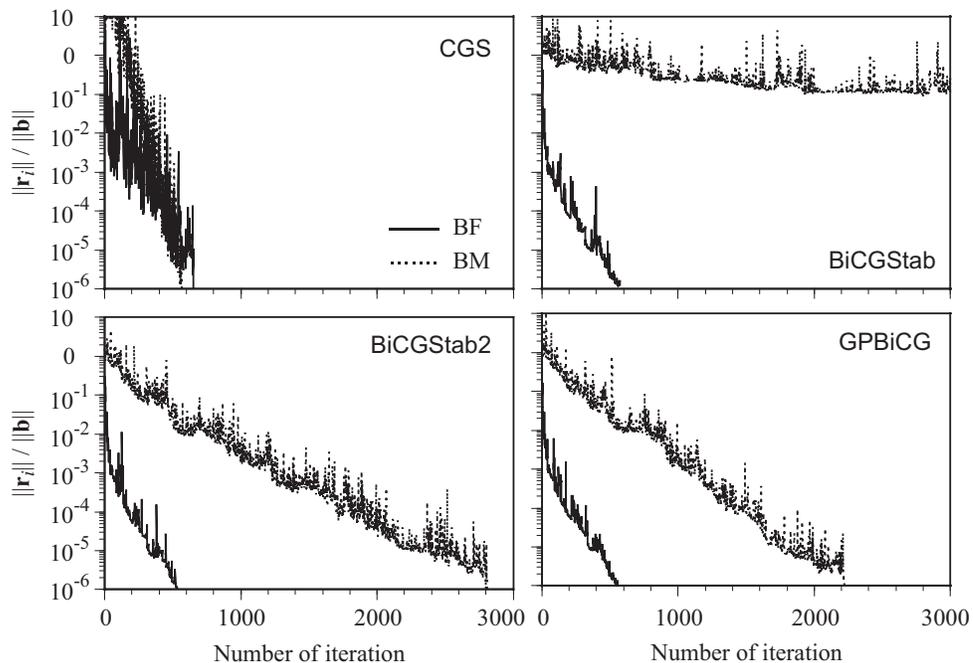


Fig. 6.44: Relation between the residual and the number of iteration for analyzing sound fields around diffusers at 250Hz, using the FMBEM in BF and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24616.

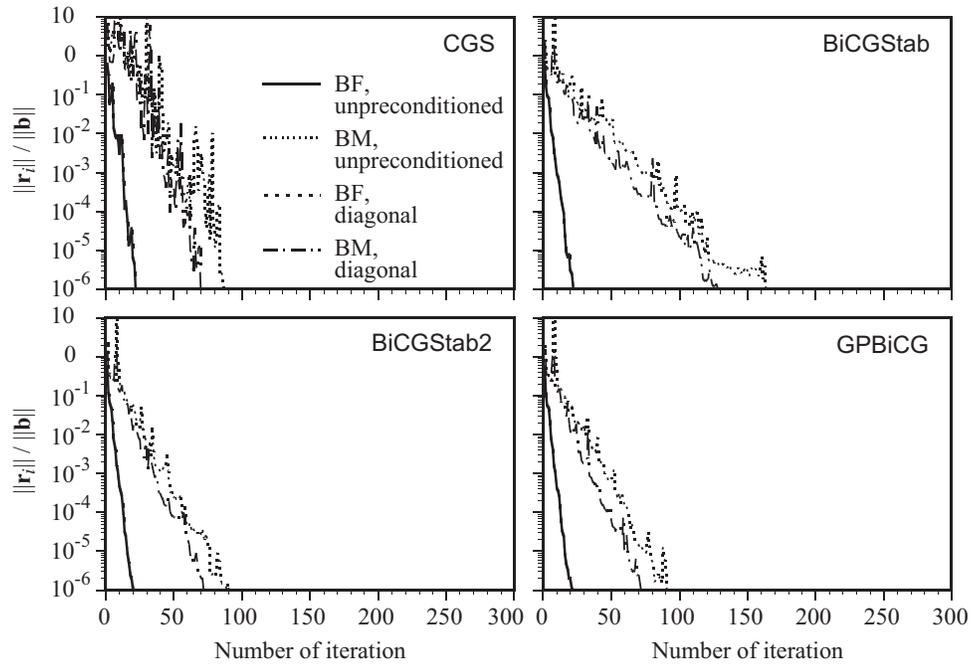


Fig. 6.45: The effect of diagonal preconditioning on the residual of iteration for analyzing sound fields around diffusers at 125Hz, using the FMBEM in BF and Burton-Miller formulation with CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 5672.

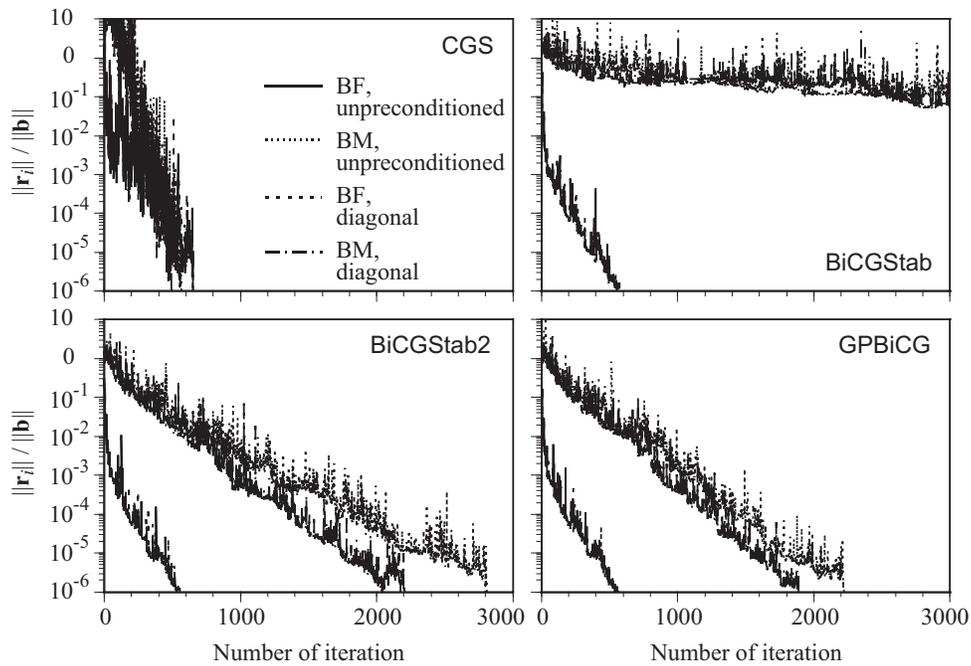


Fig. 6.46: The effect of diagonal preconditioning on the residual of iteration for analyzing sound fields around diffusers at 250Hz, using the FMBEM in BF and Burton-Miller formulation with CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24616.

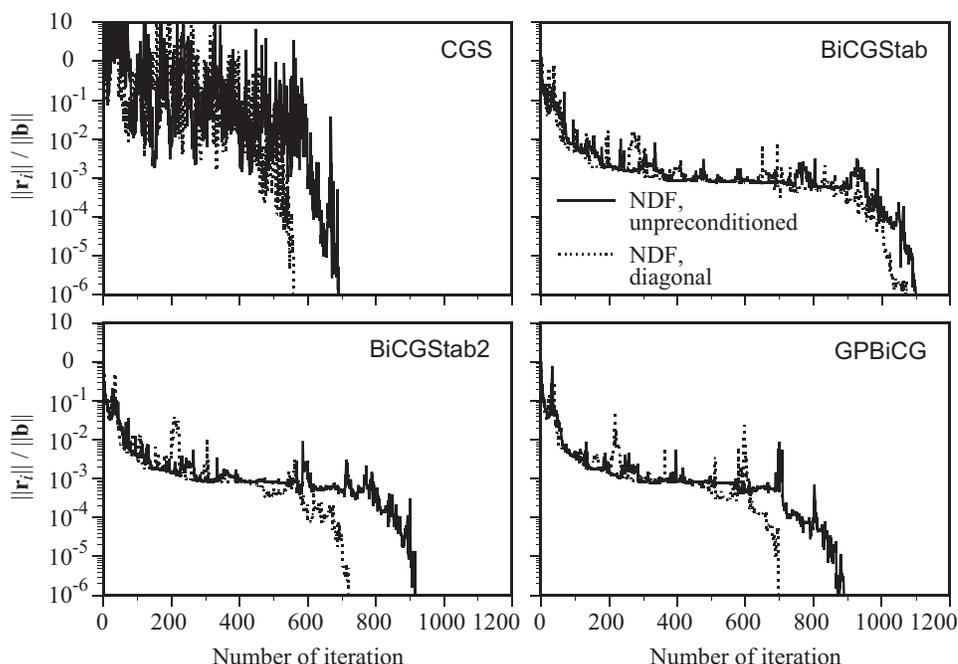


Fig. 6.47: The effect of diagonal preconditioning on the residual of iteration for analyzing sound fields around diffusers at 125Hz, using the FMBEM in NDF with CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 5672.

初期近似解 = 周波数軸上隣接解: 初期近似解を周波数軸上の隣接解とする設定が反復回数に及ぼす影響を反復解法ごとに Fig.6.49 に示す。但し、ここでの隣接解はそれぞれ同じ反復解法で収束判定値 $\varepsilon = 10^{-6}$ を用いて算出した 249Hz での反復解である。ホール解析と同様、解法、境界条件によらず効果は見られない。これは、本収束改善法が有効であった立方体解析時と反復回数 0 の時の残差を比較すればわかるように、周波数軸上の隣接解が十分な近似解となっていないことが原因と考えられる。このことから、内部問題の場合と同様、エッジを多く含んだ複雑な音場では初期近似解を周波数軸上隣接解とする設定の収束改善効果は薄いと考えられる。

以上の音響拡散体解析の結果を整理すると、以下ようになる。

- 定式化に関して：
 - 反復解法によらず Burton-Miller 法の方が BF に比べ著しく収束が遅い。
- 反復解法の種類に関して：
 - BF では解法による差は微小である。
 - Burton-Miller 法では CGS の収束が最も速く、複雑形状に有用である。
 - Burton-Miller 法では BiCGStab の収束が遅い。

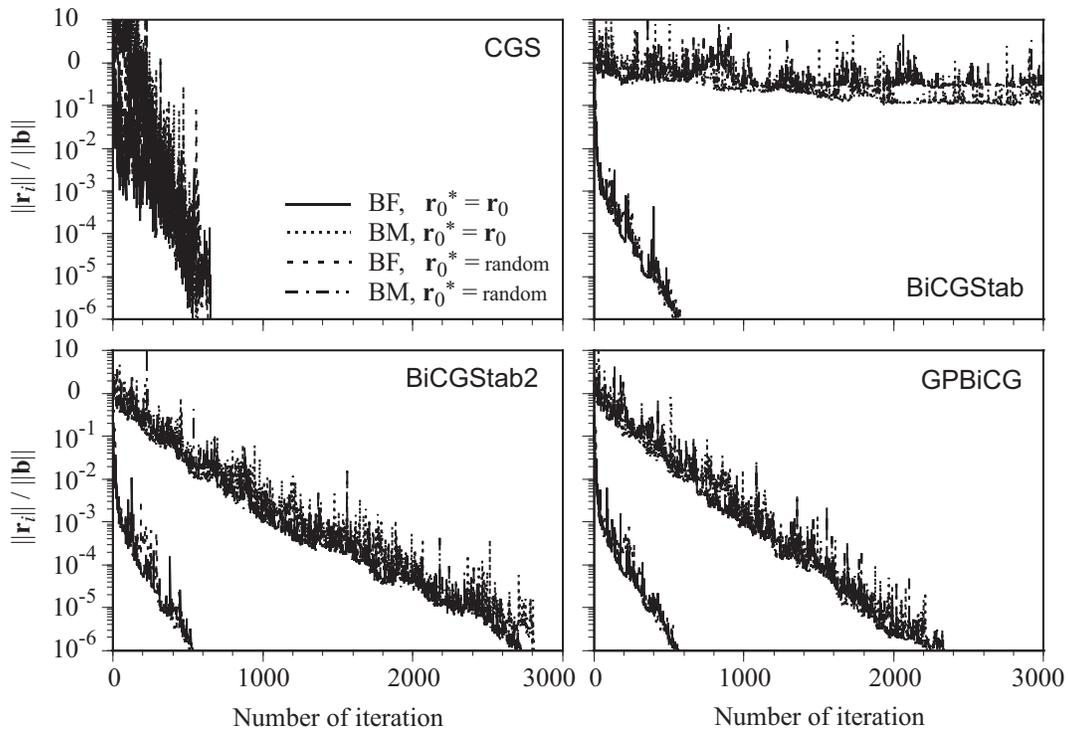


Fig. 6.48: The effect of \mathbf{r}_0^* on the residual of iteration for analyzing sound fields around diffusers at 250Hz, using the FMBEM in BF and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24616.

- エッジの影響に関して：

- エッジを多く含んだ問題においては，境界条件によらず収束が遅くなる．
- エッジを多く含んだ問題においては，CGS においても他の解法と同様かそれ以上に良好な収束性状が得られる．

- 収束改善の効果：

- 対角化前処理は，境界要素サイズが様々となる複雑形状の問題を Burton-Miller 法で解く場合には有効である．
- エッジを多く含んだ問題の場合，初期シャドウ残差に擬似乱数を用いても効果はない．
- エッジを多く含んだ問題の場合，初期近似解に周波数軸上の隣接解を用いても十分な近似となりにくく，収束改善は期待しにくい．

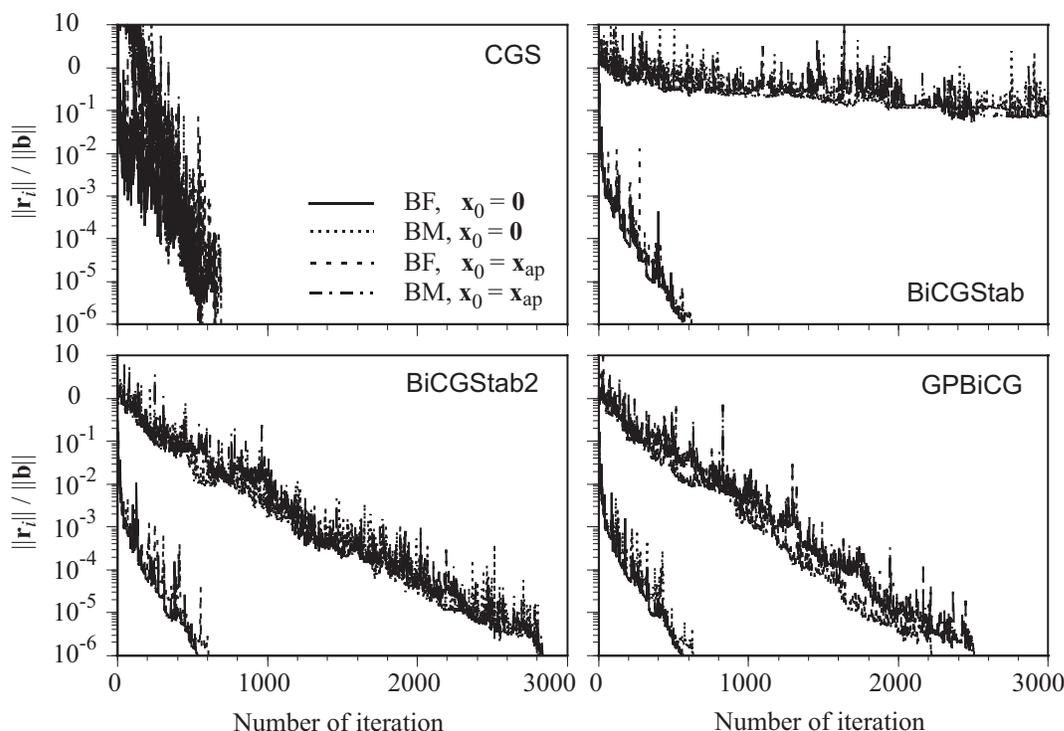


Fig. 6.49: The effect of x_0 on the residual of iteration for analyzing sound fields around diffusers at 250Hz, using the FMBEM in BF and Burton-Miller formulation (BM) with unpreconditioned CGS, BiCGStab, BiCGStab2, and GPBiCG. DOF is 24616. x_{ap} is an iterative solution at 249Hz.

6.6 まとめ

本章では、FMBEMにおいて前提となる反復解法の収束性に関して、反復解法の種類、定式化、解析対象の形状及び境界条件、問題の自由度の影響について検討した。また、反復解法の収束改善のための様々な方法について、その効果を検討した。反復解法には、BEM (FMBEM) で得られるような非エルミート行列に適用可能であり、反復の度に計算量・必要記憶容量が増加しない解法群である、BiCG 系統の反復解法を用いた。結論を要約すると以下のとおりである。

内部問題・外部問題に共通すること：

定式化に関しては、反復解法、解析対象によらず BF の収束が NDF より優れていることから、一般に NDF で得られる行列が BF に比べ悪条件であると考えられる。これは行列自体の持つ性質であることから、本章で検討しなかった反復解法も含めて、BF を用いた方が収束が速いと考えられる。

収束改善法に関して、まず対角化前処理については、現実的な境界条件設定の範囲においては（少なくとも BF では）効果が薄い。初期シャドウ残差に擬似乱数を用いる効果については、単純形状の解析に CGS を適用する場合に著しい収束改善効果が期待できる。初期近似解に周波数軸上の隣接解を用いる効果については、隣接解が十分な近似となる場合はある程度の効果が期待できるが、隣接する解析周波数が離れている、あるいはエッジを多く持つ複雑形状であるなどが原因で十分な近似とならない場合は効果が薄い。

エッジを多く持つ複雑形状の問題においては、単純形状の問題に比べ反復解法、境界条件によらず収束が遅くなる。

問題の自由度に関しては、自由度の増加が反復回数を増加させるとは限らない。境界条件や固有周波数の分布密度といった、問題の物理的性状が収束の点で好ましくない場合は、DOF が小さい方が収束が速い傾向がある。

内部問題：

反復解法に関しては、定式化、解析対象によらず GPBiCG, BiCGStab2 が安定度、収束の速さで優れている。一方 CGS は NDF において発散するなど不安定であり、有効な収束改善法を適用しない場合は使用すべきでない。

境界条件に関しては、反復解法によらず、吸音面の存在が収束性を向上させる。また、吸音率が 1 の場合は反復解法、定式化による影響がほとんど現れない。

固有周波数との関係については、境界が剛な場合に固有周波数付近で反復回数が増加する。縮退や固有周波数の密度が大きい場合により顕著となる。BF に比べ NDF の方が増加がより顕著である。

外部問題：

定式化に関しては、BF に比べ、NDF, Burton-Miller 法の収束が著しく遅い。これは NDF で得られる係数行列が悪条件であり、BF と NDF の方程式を線形結合した Burton-Miller 法においても同様に係数行列が悪条件となっていることが原因と考えられる。見かけの固有周波数付近でない周波数での解析時は、BF を用いることが収束の面から最善といえる。

反復解法に関しては、Burton-Miller 法を用いる場合は CGS に初期シャドウ残差を擬似乱数と設定したものが解析対象によらず収束が速く、BiCGStab, BiCGStab2, GPBiCG に比べ優れている。

見かけの固有周波数との関係については、NDF の場合にその付近で反復回数が増加する。BF の場合は影響が微小であり、Burton-Miller 法では関係が見られない。

収束改善法に関しては、境界要素サイズが一様でない複雑形状の問題を NDF, Burton-Miller 法で解く場合に対角化前処理が有効である。

以上の結果から，本章で検討した範囲ではあるが，BiCG 系統の反復解法を FMBEM に適用する場合に推奨される設定を以下に示す．

- 内部問題の解析時
 - 定式化：BF
 - 反復解法：GPBiCG，または BiCGStab2
- 外部問題の解析時
 - 任意の問題に対して
 - * 定式化：Burton-Miller 法
 - * 反復解法：CGS + 「初期シャドウ残差 = 擬似乱数」 + 「対角化前処理」
 - 見かけの固有周波数が問題にならない場合
 - * 定式化：BF
 - * 反復解法：GPBiCG，または BiCGStab2
- 周波数応答関数の算出時
 - 「初期近似解 = 周波数軸上の隣接解」を採用

第 7 章

総括

本研究は、境界要素法による 3 次元での大規模音場予測を目指し、計算効率の大幅な低減のための高速多重極境界要素法 (FMBEM) を構築すること、及び数値解析や理論的考察に基づく検討を通して手法の汎用性及び音響問題における適用性を向上することを目的として行われた。本章では、本研究によって得られた成果を総括した上で、今後の展望及び課題について述べる。

7.1 研究の成果

第 1 章では、本研究の背景及び既往関連研究の概観を行った上で、本研究の目的について述べた。

音場予測手法における波動音響的手法の位置付けを確認し、BEM を含む従来法の大規模問題における問題点を指摘した後、大自由度のポテンシャル問題のための高速多重極アルゴリズムについて触れ、音響 BEM への適用可能性を述べた。次に高速多重極アルゴリズムに関する既往研究、並びにその Helmholtz 方程式、BEM への適用研究について概観し、本研究の位置付けを行った。

第 2 章では、本研究の基礎となる 3 次元音場のための FMBEM の解析アルゴリズムを具体的に構築した。また、問題の自由度のオーダーで評価した計算効率の理論的概算により手法の有効性を確認した。

はじめに音場の基礎方程式について述べ、従来の BEM により、BF、NDF、Burton-Miller 法に基づく音場の定式化を行った。次に多重極展開の基礎理論について概説した後、BEM に高速多重極アルゴリズムを多段階に適用するための階層セル構造を導入し、これに基づく 6 ステップからなる要素間の影響評価構造について述べた。これらを踏まえ、3 次元音場基本解の多重極展開をもとに BEM の BF、NDF、Burton-Miller 法における各影響関数を FMBEM により再定式化し、FMBEM の具体的な数値計算アルゴリズムを提示した。

計算効率の理論的概算に関しては、空間内に節点が 1, 2, 3 次元的に分布する場合を想定し、それぞれについて行った。空間内に節点が 2, 3 次元的に分布する場合には、従来の BEM に対する大幅な効率化が実現可能であること、節点が 1 次元的に分布する場合は、効率化されない可能性があることを示した。

第 3 章では、前章で構築した 3 次元音場のための FMBEM の解析アルゴリズムをコンピュータに実装し、理論解と比較可能な音響管解析に適用することでアルゴリズムの有効性を検証した。

計算精度に関しては、理論解及び BEM との良い対応を確認した一方、多重極展開に関わる計算パラメータの設定によっては解析周波数、セル階層化レベルにより誤差が生じること、解析対象のセル内における位置関係が精度に影響することを明らかにし、実用上十分な精度確保のための適切なパラメータ設定が必要なことを示した。計算量及び必要記憶容量に関しては BEM と比べて大幅に低減されることを確認した。また、計算パラメータの設定によっては階層化レベルごとに反復回数が大幅に変化し、計算時間に影響を及ぼすことを明らかにした。

第 4 章では、任意問題に FMBEM を適用するにあたり必須となる、多重極展開を数値計算上近似的に取り扱うための各種計算パラメータについて検討し、精度及び効率の両観点から具体的な設定式を提案した。これらの設定式を用いた FMBEM による数値解析を行い、精度・効率の両観点から設定式の妥当性を確認した。

まず、本手法の基礎となる 3 次元音場基本解の多重極展開表現と厳密解の比較による精度の検討を通して、解析上意味を持つ無次元波数 kD 及びセル内の位置関係によらず高精度となる設定式を経験式の形で具体的に提案した。次にこれを踏まえた FMBEM による数値解析を行い、BF, NDF, Burton-Miller 法のそれぞれの定式化について、計算精度及び計算効率の観点から設定式の妥当性を検証した。

第 5 章では、FMBEM の持つ性能を最大限引き出す上で重要となる階層セル構造の設定に関して検討した。

はじめに、境界形状を考慮した階層セル構造の効率的な設定に関して検討した。階層セル構造の設定に特別配慮しない場合、1 次元的な境界形状に対して FMBEM による効率化が損ねられることを数値解析結果から示した後、理論的概算及び数値解析によるケーススタディを通して複数の設定を比較検討し、階層セル構造の配置及びセル間の寄与変換係数に配慮した有効な設定を提案した。数値解析結果により、1 次元的な境界形状の問題においても本設定を用いることで 2, 3 次元的な形状の場合と同程度の効率化が可能となることを示した。また、任意の問題に対してこの設定を概ね実現するための階層セル構造の配置方針を提案した。次に FMBEM の計算効率を最適化するセル階層化レベルの設定法について検討した。最下位レベルセル内平均節点数に着目し、理論的考察及び数値解析から、計算量及び必要記憶容量を最適化する最下位レベルセル内平均節点数が問題の節点数

によらずそれぞれ一定となることを示し、最下位レベルセル内平均節点数を調べておくことで問題ごとに最適階層化レベルの算出が可能であることを示した。また、計算量と必要記憶容量を最小化する最下位レベルセル内平均節点数は異なることから、FMBEM 解析にあたっては両者の優先度を決定した上でセル階層化レベルを決定する必要があることを述べた。最後に、階層セル構造の応用的な利用法として、音場解析においてしばしば扱われる、対称形となる音場に対する効率化手法を構築した。対称面 1 面に対して計算量及び必要記憶容量をおよそ半減する効率化アルゴリズムを構築した後、数値解析により計算精度並びに計算効率を検証した。

第 6 章では、FMBEM において前提となる反復解法の収束性に関して、反復解法の種類、定式化、解析対象の形状及び境界条件、問題の自由度の影響について検討した。また、反復解法の収束改善のための様々な方法について、その効果を検討した。最終的に、個々の音響問題の解析に適した反復解法の選定と、収束改善を行うための適切な設定を行うための知見として整理した。反復解法には BEM・FMBEM で得られる非エルミート行列のための解法である BiCG 系統のものを用いた。

内部問題・外部問題に共通することとしては、定式化は反復解法、解析対象によらず BF の収束が NDF より優れていること、エッジを多く持つ複雑形状の問題においては、単純形状の問題に比べ反復解法、境界条件によらず収束が遅くなることがわかった。収束改善法に関しては、対角化前処理は現実的な境界条件設定の範囲においては効果が薄いこと、初期シャドウ残差に擬似乱数を用いる設定は CGS を適用する場合に著しい収束改善効果が期待できること、初期近似解に周波数軸上の隣接解を用いる設定については、隣接解が十分な近似となる場合はある程度の効果が期待できることなどがわかった。内部問題に関することとしては、定式化、解析対象によらず GPBiCG, BiCGStab2 が安定度、収束の速さで優れていること、境界条件に関しては、反復解法によらず吸音面の存在が収束性を向上させること、固有周波数との関係については、境界が剛な場合にその付近で反復回数が増加することなどがわかった。外部問題に関することとしては、定式化は BF に比べ NDF, Burton-Miller 法の収束が著しく遅いこと、見かけの固有周波数付近でない周波数での解析時は、BF を用いることが収束の面から最善といえること、Burton-Miller 法を用いる場合は CGS に初期シャドウ残差を擬似乱数と設定したものが解析対象によらず収束が速く優れていることがわかったほか、収束改善法として、境界要素サイズが一様でない複雑形状の問題を Burton-Miller 法で解く場合に対角化前処理が有効であることなどがわかった。

以上、本研究によって得られた成果を総括した。FMBEM は複雑なアルゴリズムを持ち、計算精度・効率に影響を及ぼす設定項目が多岐にわたるのが特徴であることから、手法の構築のみでは汎用的手法とならず、また実用的に使用される手法ともなりにくかつ

た．本論文では手法の構築のみならず，その汎用性を高めるための各種設定に関する知見を得ることまでを目的としていた．計算精度・効率に大きく影響を及ぼすような項目については有用な設定方法を提案することができたと考えられる．

7.2 今後の展望・課題

今後は，本研究にて構築し汎用性を向上してきた FMBEM を様々な予測・評価の分野で応用していく必要がある．以下に FMBEM による音場予測の将来展望と，今後の課題を述べる．

7.2.1 他手法との比較による将来展望

第 1 章にて示した FEM と BEM の計算量・必要記憶容量を概算した表に，FMBEM の概算を含めて Table 7.1,7.2 に再掲する．従来の手法間では FEM に反復解法を用いた場合が計算量・必要記憶容量によらず最も効率的であったが，FMBEM では更に低オーダーとなっていることがわかる．次にこの表を基に作成した，FEM，BEM，FMBEM 解析で必要となる計算時間とデスクトップ PC の CPU 性能の年変化（推定）を Fig.7.1 に示す．（データは PC スペックや反復解法の収束性状により変化するため，各手法ともデータに幅を持たせている．）但し，ここでは「ムーアの法則」，即ち「半導体の集積密度が 2 年でおおよそ 2 倍となる」という半導体業界の経験則に基づき，デスクトップ PC の CPU 性能が 2 年で 2 倍になることを仮定している．また，大規模問題の例として，コンサートホール及び遮音壁を解析する場合の DOF を合わせて示している．縦軸は 2000 年における計算時間を表し，同じ計算量が 1 時間程度で計算可能となる年（右縦軸）を対応させている．（例えば 2000 年には 1.4 ヶ月かかった計算が 2020 年には 1 時間程度で済むことになる．）これによると，例えばデスクトップ PC を用いて大ホールを 4kHz 程度まで解析することを考えた場合，BEM では 2050 年頃，FEM では 2030 年頃に 1 時間程度での解析が可能となるのに対し，FMBEM では 2020 年頃には既に可能となることになる．次に，FEM，BEM，FMBEM 解析での必要記憶容量とデスクトップ PC の搭載メモリの年変化（推定）を Fig.7.2 に示す．但し，ここでは 2000 年でのデスクトップ PC 搭載メモリをおおよそ 1GB とし，その搭載メモリが 2 年で 2 倍になることを仮定している．縦軸は記憶容量を表し，各年における搭載メモリの年変化（右縦軸）を対応させている．（例えば 2020 年には 1TB 程度の搭載メモリとなる．）これによると，例えばデスクトップ PC を用いて大ホールを 4kHz 程度まで解析することを考えた場合，メモリの的には BEM では 2050 年頃，FEM では 2030 年頃に解析が可能となるのに対し，FMBEM では 2020 年頃には既に可能となることになる．これらのことから，FMBEM の開発はコンピューターの進歩を

Table 7.1: Comparison of the computational complexities for the FEM, for the BEM, and for the FMBEM. k is the wave number, and L_r is a length of an analyzed object.

Method	Degree of freedom	Complexity
FEM	(direct)	$N_f \propto (kL_r)^3$
	(iterative)	$O(N_f^2) \sim O((kL_r)^6)$
BEM	(direct)	$O(N_b^3) \sim O((kL_r)^6)$
	(iterative)	$O(N_b^2) \sim O((kL_r)^4)$
	FMBEM	$O(N_b \log N_b) \sim O((kL_r)^2 \log(kL_r)^2)$

Table 7.2: Comparison of the memory requirements for the FEM, for the BEM, and for the FMBEM. k is the wave number, and L_r is a length of an analyzed object.

Method	Degree of freedom	Memory
FEM	(direct)	$N_f \propto (kL_r)^3$
	(iterative)	$O(N_f) \sim O((kL_r)^3)$
BEM	(direct)	$O(N_b^2) \sim O((kL_r)^4)$
	(iterative)	$O(N_b) \propto (kL_r)^2$
	FMBEM	$O(N_b \log N_b) \sim O((kL_r)^2 \log(kL_r)^2)$

10～20年程度早めたことに相当することになる。もちろん，ここでの仮定が将来にわたり成立するとは限らず，またコンピューター自体についても並列計算機がより身近になることが予想されるなど，将来の正確な予測は困難であることは言うまでもない。しかしながら，ここで示したような他手法に対する FMBEM の優位性については将来的にも言える可能性が高いと考えられる。

7.2.2 応用可能性と今後の課題

FMBEM による計算効率の向上は，まず直接的に適用対象の拡大へと繋がると考えられる。解析対象の空間的規模が拡大し，解析可能な周波数が上昇することから，コンサートホール，劇場，各種集会施設等の大空間の波動音響解析が可能となる。また，周波数応答関数が高周波数域まで計算可能となることは，逆 Fourier 変換によりインパルス応答の算出が可能となることに繋がり，畳み込み演算による可聴化や，残響時間，C 値，D 値といった各種音響物理量の精密な算出に大いに役立つものと期待される。特に可聴化については，物理量と人間の心理評価とを繋ぐものであり，人間の QOL 向上への欲求の更なる高まりを考えると今後更に重要になると考えられる。

境界要素法で大規模解析が扱えることの意義としては，開空間の大規模解析が簡便に行

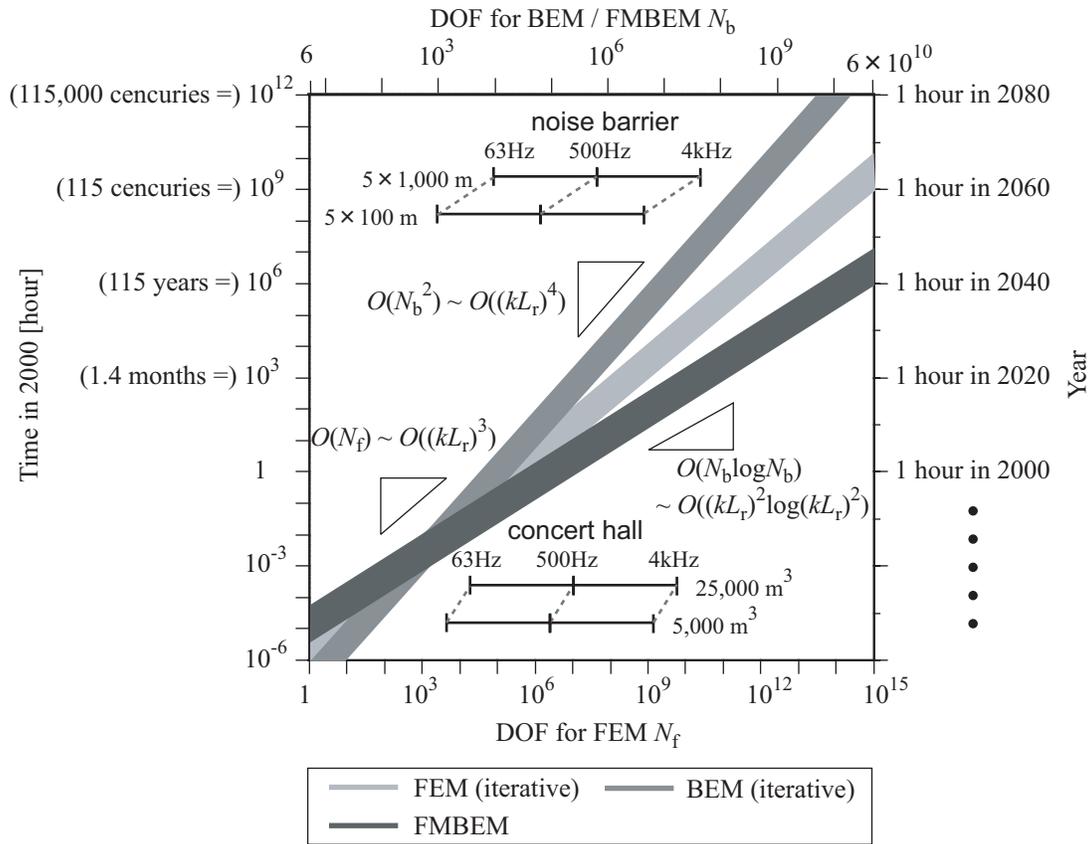


Fig. 7.1: Annual change of performance of CPU in a desktop PC and computational time for the FEM, for the BEM and for the FMBEM, estimated on the basis of Moore's Law. k is the wave number, and L_r is a length of an analyzed object.

えることが挙げられる。街路空間での騒音予測や環境アセスメント，例えば長大な道路遮音壁による減音効果の予測・評価や，工場からの騒音伝搬予測等に有用であると考えられる。

これらは計算効率の向上により直接志向される応用展開である。この方向での更なる課題としては，計算の更なる大規模化・高速化を考える上で重要となる並列化への対応が挙げられる。プロセッサのクロック向上による計算機性能の向上の限界，コンピューターコンポーネントのコストの低下等から，システムとしての高性能化を追求するための方法として並列化システムが今や研究室レベルでも一般化しつつある。このような中，高速解法としてのFMBEMの並列化対応は必須のものと言える。並列化を考える上では，分散メモリ型，共有メモリ型といった並列計算機のアーキテクチャーとの適性や，並列化する上でのオーバーヘッド要因とそれへ影響を及ぼす各種パラメータとの関係を明らかにしていく必要がある。

一方，FMBEMによる効率化の実現を現象のより高精度なモデルの解析に向ける方向が

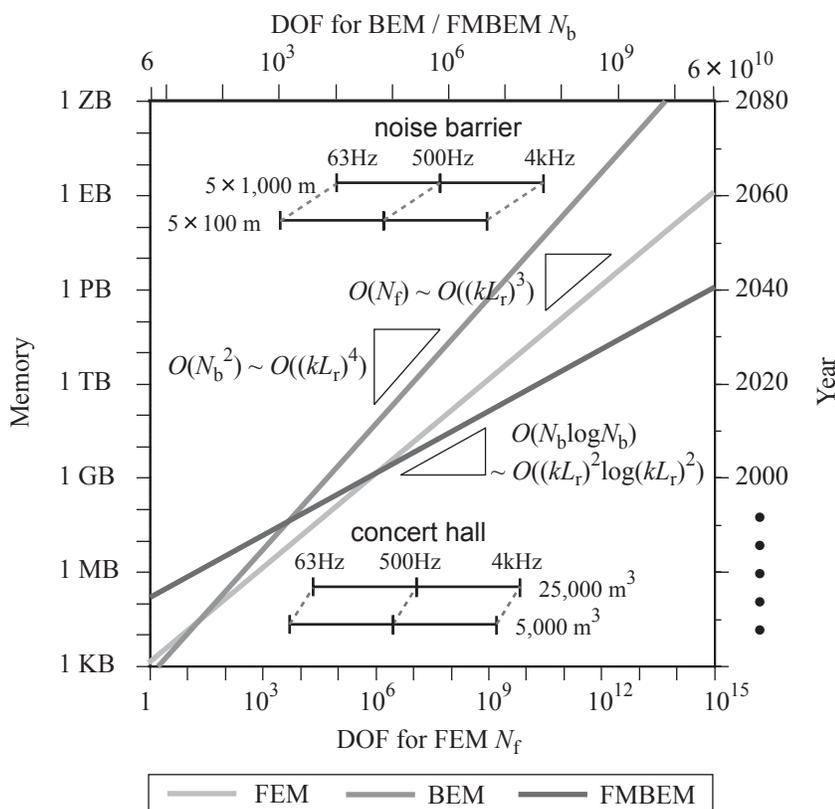


Fig. 7.2: Annual change of memory in a desktop PC and memory requirements for the FEM, for the BEM and for the FMBEM, on the assumption that memory in a desktop PC is about 1 GB, and that the memory will double in 2 years. k is the wave number, and L_r is a length of an analyzed object.

考えられる．これには従来計算量の膨大化につながることから困難であった，各種連成解析への応用などが挙げられる．板や膜による振動場と音場との連成，空気音場と吸音材内部音場との連成など，既に連成手法については各種整備されている．しかしながら，連成解析では連成する複数の場の方程式から最終的に得られる全体方程式を解くこととなり，音場解析のみを高速化する FMBEM を直接的には適用できない．新たな手法の考案が必要と言える．

さらに，このようにして得られた高精度かつ膨大なデータをどのように効果的に利用していくかが課題となる．実務・研究の両側面から，結果の利用法について探求していく必要がある．

付録 A

3次元音場基本解の多重極展開表現の導出

3次元音場基本解の多重極展開表現に関して、本文中では多重極展開理論に基づいた導出を行った。ここでは Gegenbauer の加法定理と平面波展開に基づいたより直接的な導出を行う。

3次元音場基本解 Eq.(2.9) は、Gegenbauer の加法定理 [62] により以下のように展開できる。

$$\frac{\exp(jk|\mathbf{r} + \mathbf{d}|)}{4\pi|\mathbf{r} + \mathbf{d}|} = \frac{jk}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) j_l(kd) h_l^{(1)}(kr) P_l(\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{A.1})$$

但し、 $|\mathbf{r}| > |\mathbf{d}|$ 。

一方、球 Bessel 関数 j_l に関する平面波展開 [62] により次式が得られる。

$$j_l(kd) P_l(\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi j^l} \oint \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) d\hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.2})$$

上式を Eq.(A.1) に代入することにより次式が得られる。

$$\frac{\exp(jk|\mathbf{r} + \mathbf{d}|)}{4\pi|\mathbf{r} + \mathbf{d}|} = \frac{jk}{16\pi^2} \oint \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}) \sum_{l=0}^{\infty} j^l (2l+1) h_l^{(1)}(kr) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) d\hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.3})$$

Fig.2.5 に示すような点の位置関係を想定し、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{LM}$ 、 $\mathbf{d} = \mathbf{r}_{Mq} + \mathbf{r}_{pL}$ とおくと、 $|\mathbf{r}| > |\mathbf{d}|$ 、 $\mathbf{r} + \mathbf{d} = \mathbf{r}_{pq}$ が成立し、Eq.(2.77) と同一の次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\exp(jkr_{pq})}{4\pi r_{pq}} \quad (\text{A.4}) \\ &= \frac{jk}{16\pi^2} \oint \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{pL}) \left(\sum_{l=0}^{\infty} j^l (2l+1) h_l^{(1)}(kr_{LM}) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{LM}) \right) \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{Mq}) d\hat{\mathbf{k}} \\ &= \frac{jk}{16\pi^2} \oint E_{pL}(\mathbf{k}) T_{LM}(\hat{\mathbf{k}}) E_{Mq}(\mathbf{k}) d\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

上式における r_{pL} , r_{Mq} をそれぞれ複数のベクトルの和に分割できることから, 多重極展開が多段階化された Eq.(2.78) の表現についても容易に得られることがわかる.

付録 B

随伴補間による内向係数の計算

レベル I のセル m_I に節点 i が含まれる場合，セル m_I の内向係数（上位レベルセルによる内向係数成分 ζ_{m_I} と相互作用セル群による内向係数成分 τ_{m_I} の和）による節点 i への寄与成分は Eqs.(2.81, 2.91, 2.92, 2.93) により次式で表される．

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi_{F,i}^{\text{P},I} \\ \phi_{F,i}^{\text{V},I} \end{bmatrix} &= \frac{jk}{16\pi^2} \sum_{n'=1}^{K_I} w_{n'}^I E_{i\lambda_{m_L}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^I) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m_{l+1}}\lambda_{m_l}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^I) \\ &\cdot \begin{bmatrix} \zeta_{m_I}^{\text{P}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^I) + \tau_{m_I}^{\text{P}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^I) \\ \zeta_{m_I}^{\text{V}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^I) + \tau_{m_I}^{\text{V}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^I) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

ここで，Eq.(2.92) に導入した補間と同様に，補間係数 $W_{n'n}$ によって以下の補間式が得られる．

$$\begin{aligned} E_{i\lambda_{m_L}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^I) \prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m_{l+1}}\lambda_{m_l}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^I) &= E_{\lambda_{m_{I+1}}\lambda_{m_I}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^I) \\ &\cdot \sum_{n=1}^{K_{I+1}} W_{n'n} E_{i\lambda_{m_L}}(\hat{\mathbf{k}}_n^{I+1}) \prod_{l=I+1}^{L-1} E_{\lambda_{m_{l+1}}\lambda_{m_l}}(\hat{\mathbf{k}}_n^{I+1}) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

従って，上式を Eq.(B.1) に代入すると以下の表現が導かれる．

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi_{F,i}^{\text{P},I} \\ \phi_{F,i}^{\text{V},I} \end{bmatrix} &= \frac{jk}{16\pi^2} \sum_{n=1}^{K_{I+1}} w_n^{I+1} E_{i\lambda_{m_L}}(\hat{\mathbf{k}}_n^{I+1}) \\ &\cdot \prod_{l=I+1}^{L-1} E_{\lambda_{m_{l+1}}\lambda_{m_l}}(\hat{\mathbf{k}}_n^{I+1}) \begin{bmatrix} \zeta_{m_{I+1}}^{\text{P}}(\hat{\mathbf{k}}_n^{I+1}) \\ \zeta_{m_{I+1}}^{\text{V}}(\hat{\mathbf{k}}_n^{I+1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

ここで，

$$\begin{bmatrix} \zeta_{m_{I+1}}^{\text{P}}(\hat{\mathbf{k}}_n^{I+1}) \\ \zeta_{m_{I+1}}^{\text{V}}(\hat{\mathbf{k}}_n^{I+1}) \end{bmatrix} = \sum_{n'=1}^{K_I} \frac{w_{n'}^I}{w_n^{I+1}} W_{n'n} E_{\lambda_{m_{I+1}}\lambda_{m_I}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^I) \begin{bmatrix} \zeta_{m_I}^{\text{P}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^I) + \tau_{m_I}^{\text{P}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^I) \\ \zeta_{m_I}^{\text{V}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^I) + \tau_{m_I}^{\text{V}}(\hat{\mathbf{k}}_{n'}^I) \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

即ち, Eq.(B.4) による変換によって, Eq(B.1) におけるレベル I の数値積分が Eq(B.3) ではレベル $I + 1$ の数値積分に置換される. 以上の方法を随伴補間 (adjoint interpolation) と呼ぶ [65].

付録 C

数値解析結果（小ホール）

- 第 6 章で解析した小ホールの数値解析結果を示す。
- いずれも床面における音圧レベル分布であり，点音源から 1m 離れた点における自由空間中での音圧レベルにより基準化している。
- キャプションには解析周波数，境界条件，反復解法（+ 各種収束改善法）を示している。
- 計算条件等については第 6 章を参照のこと。

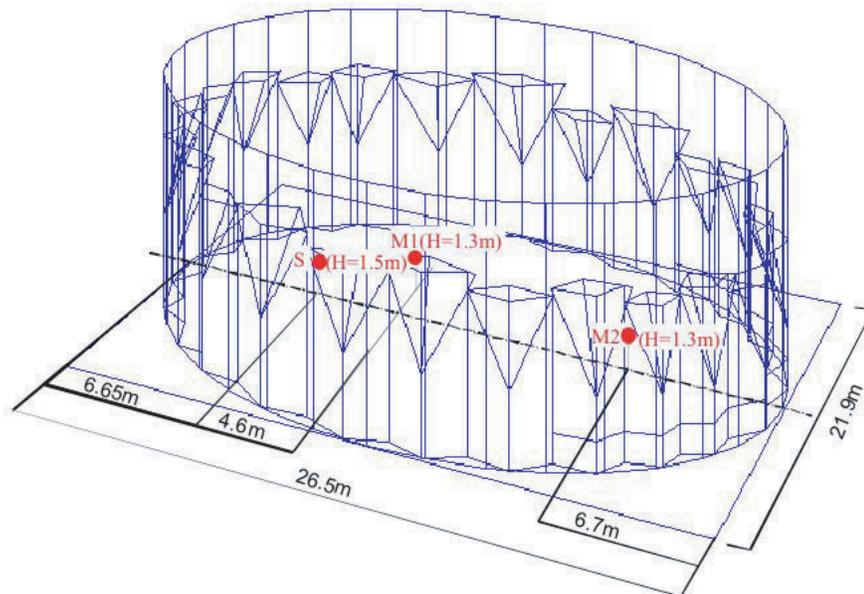


Fig. C.1: Geometry of a hall and a point source S.

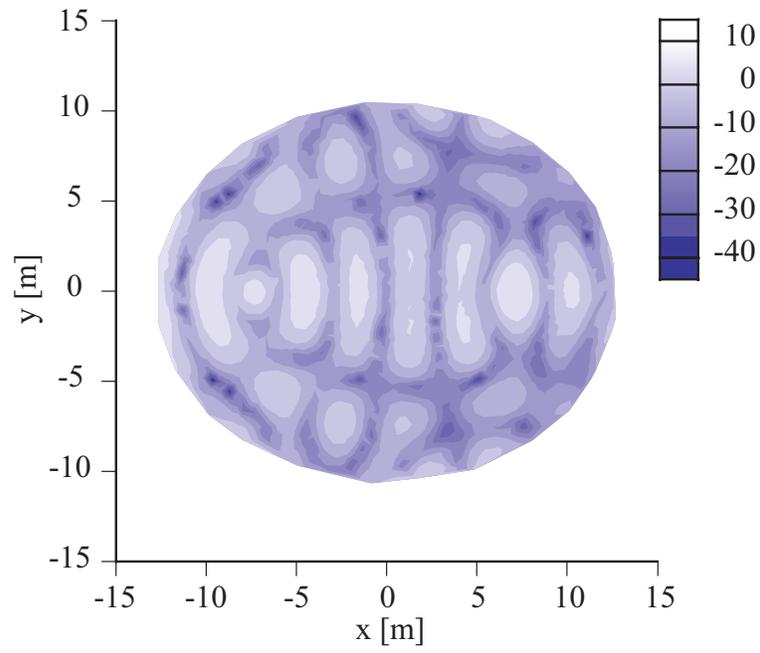


Fig. C.2: 63Hz, actual, CGS (without preconditioning)

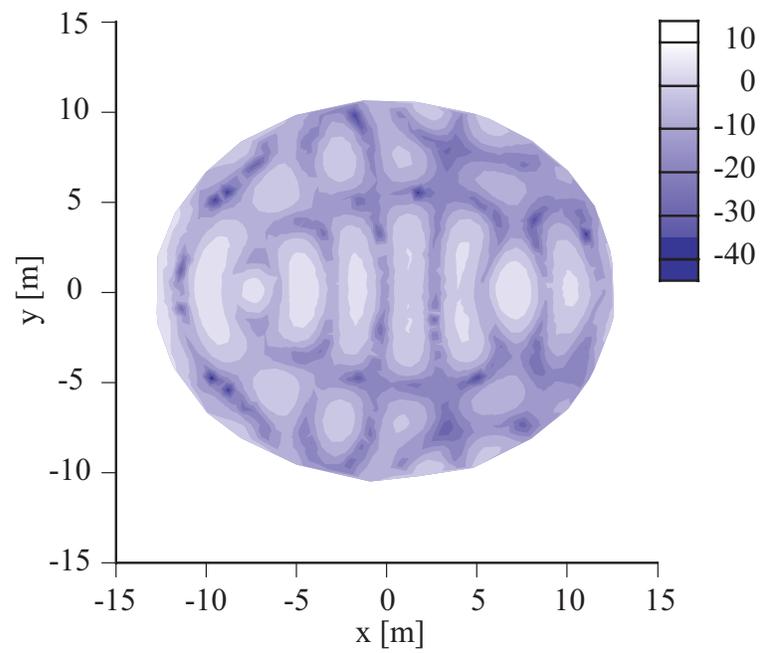


Fig. C.3: 63Hz, actual, BiCGStab (without preconditioning)

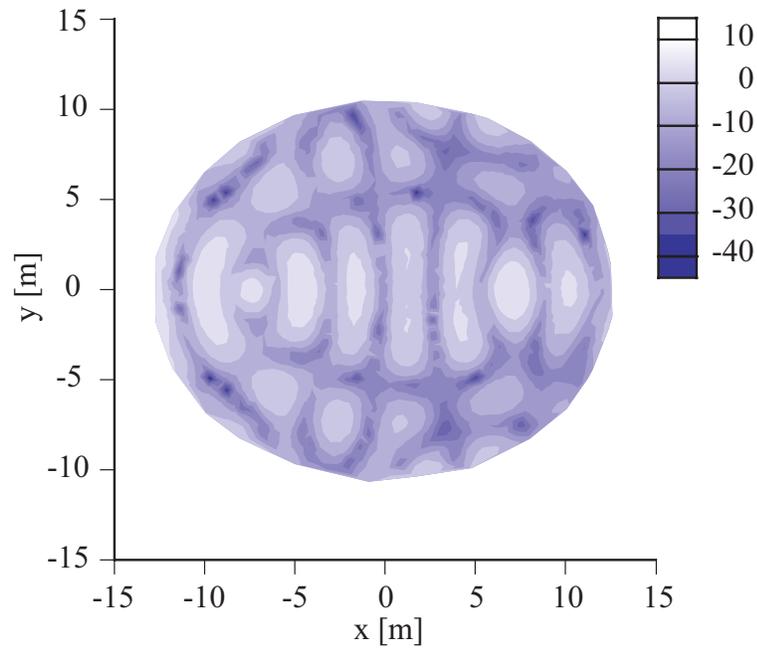


Fig. C.4: 63Hz, actual, BiCGStab2 (without preconditioning)

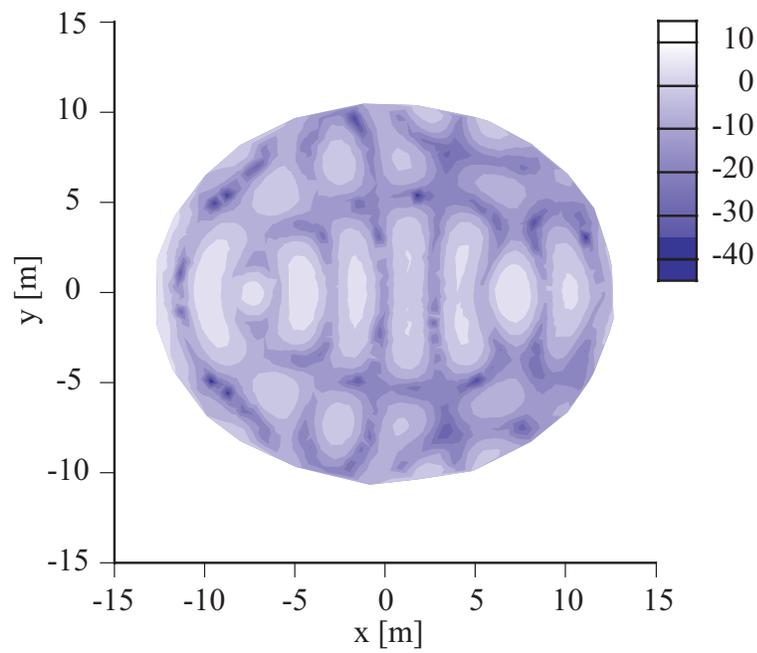


Fig. C.5: 63Hz, actual, GPBiCG (without preconditioning)

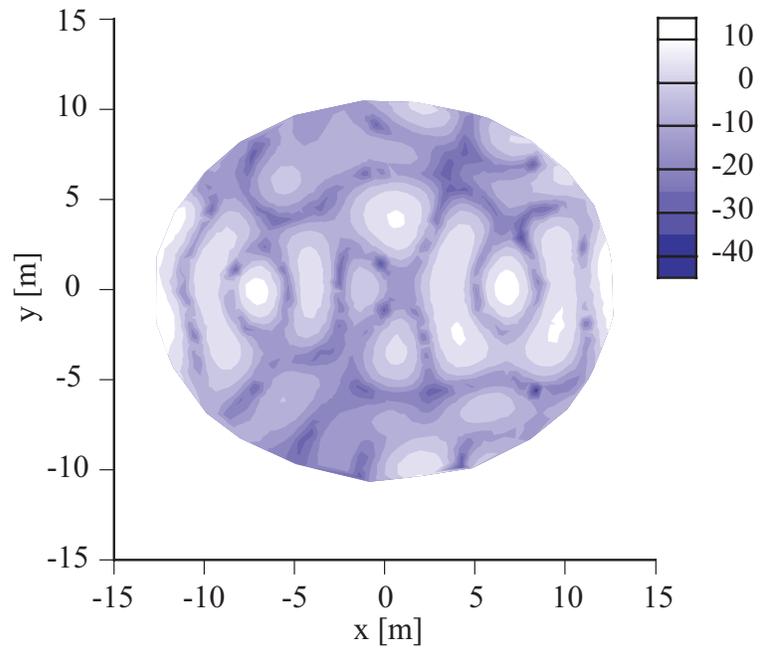


Fig. C.6: 63Hz, $a = 0$, CGS (without preconditioning)

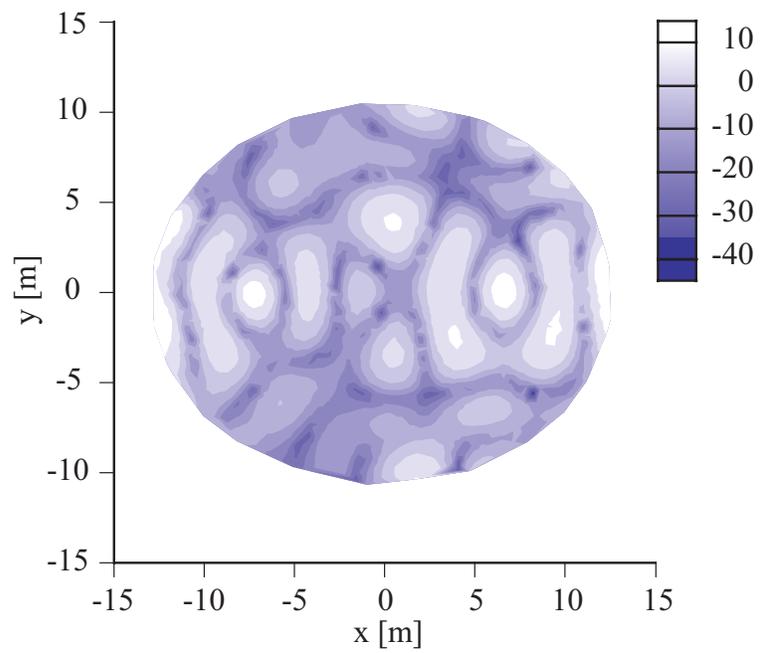


Fig. C.7: 63Hz, $a = 0$, BiCGStab (without preconditioning)

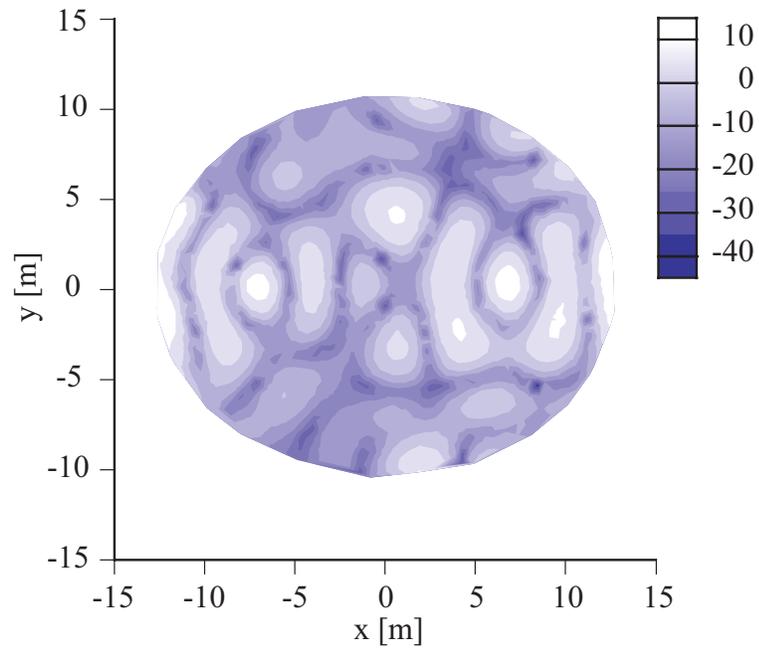


Fig. C.8: 63Hz, $a = 0$, BiCGStab2 (without preconditioning)

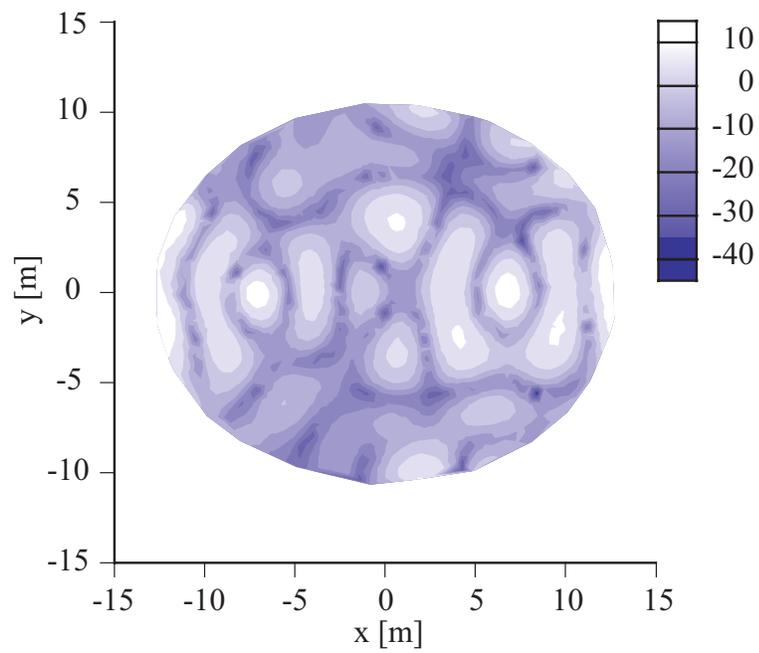
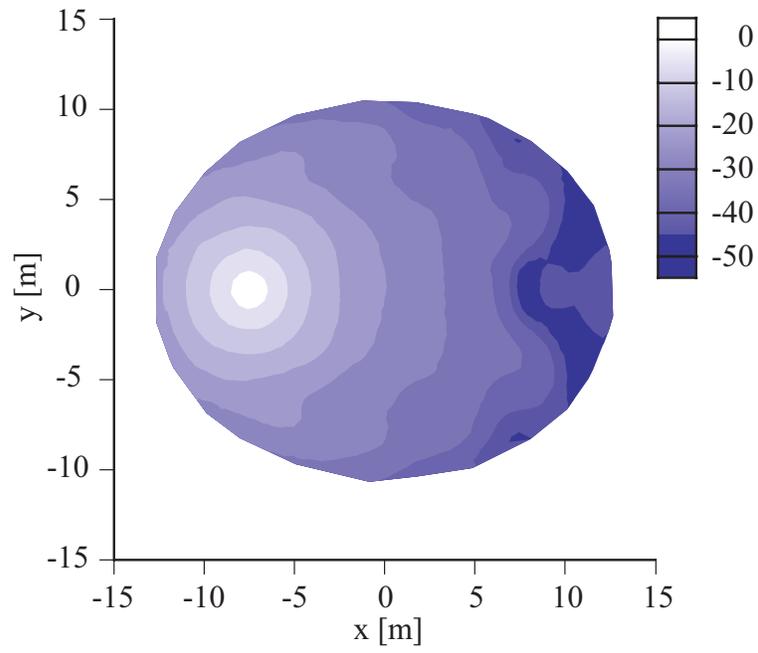
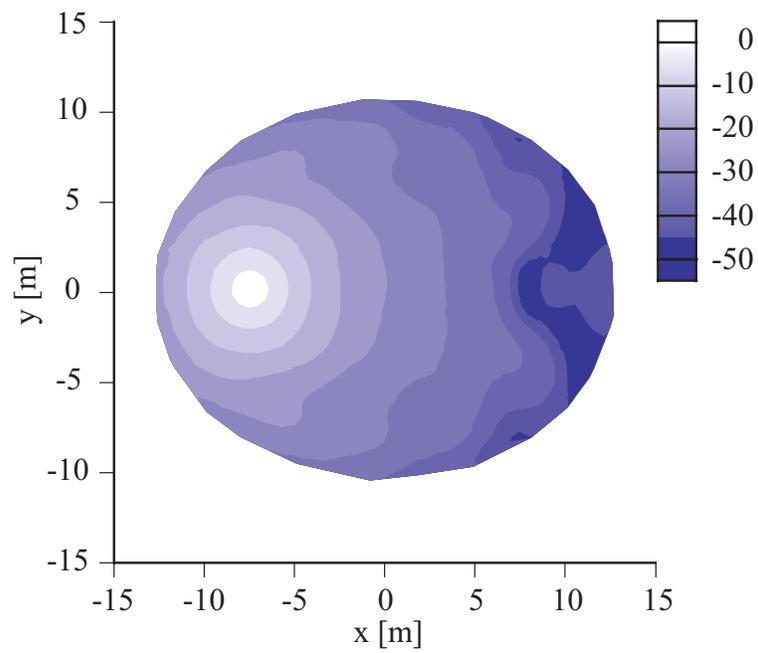


Fig. C.9: 63Hz, $a = 0$, GPBiCG (without preconditioning)

Fig. C.10: 63Hz, $a = 1$, CGS (without preconditioning)Fig. C.11: 63Hz, $a = 1$, BiCGStab (without preconditioning)

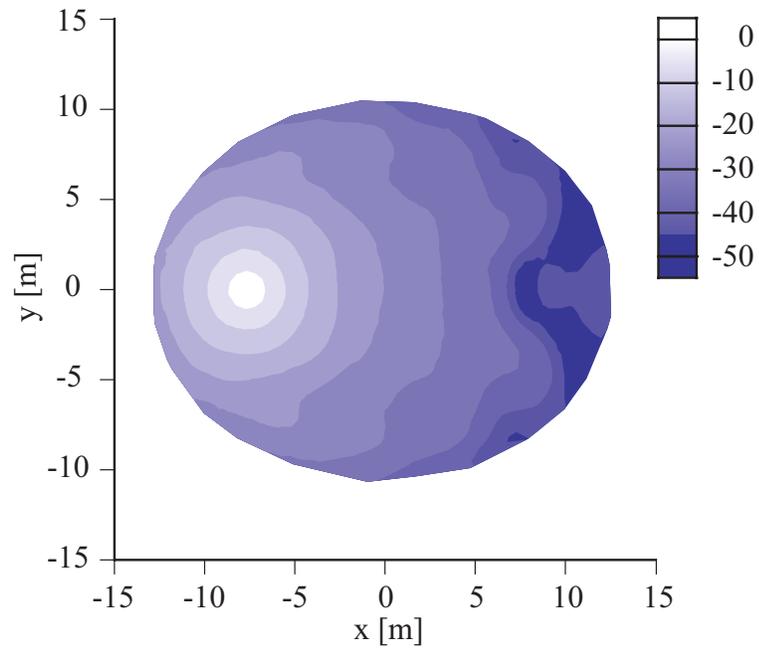


Fig. C.12: 63Hz, $a = 1$, BiCGStab2 (without preconditioning)

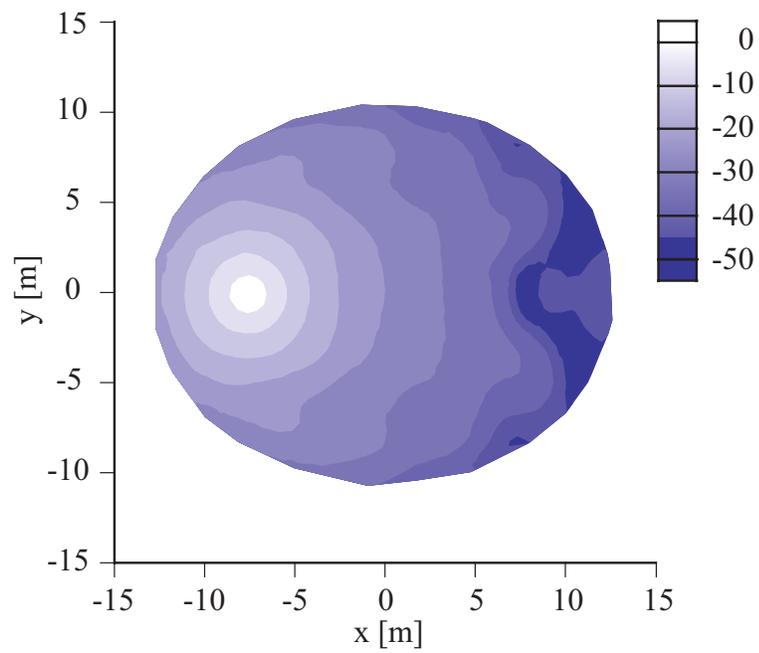


Fig. C.13: 63Hz, $a = 1$, GPBiCG (without preconditioning)

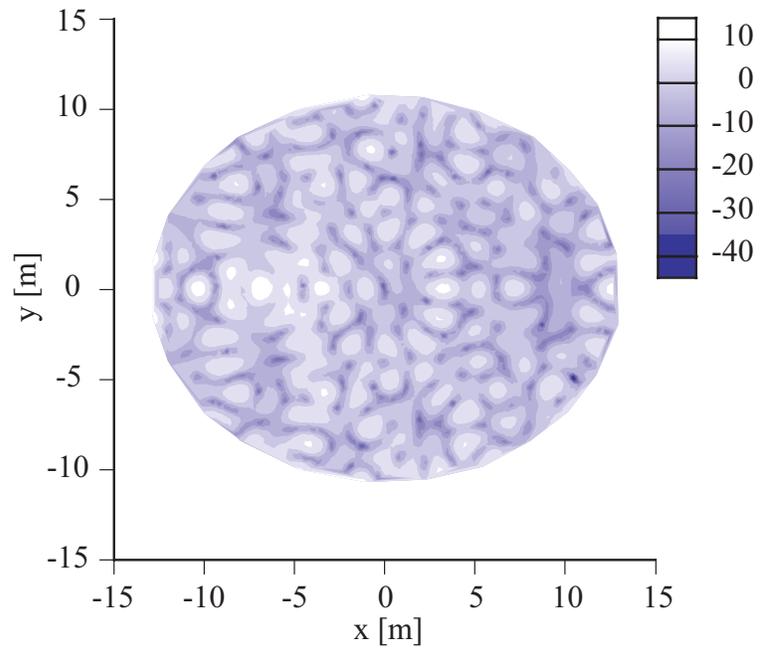


Fig. C.14: 125Hz, actual, CGS (without preconditioning)

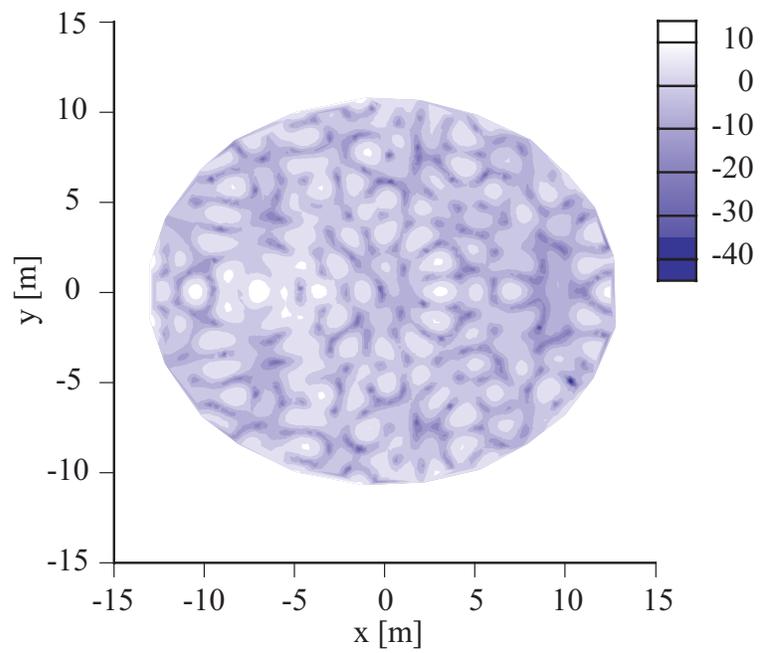


Fig. C.15: 125Hz, actual, CGS (diagonal preconditioning)

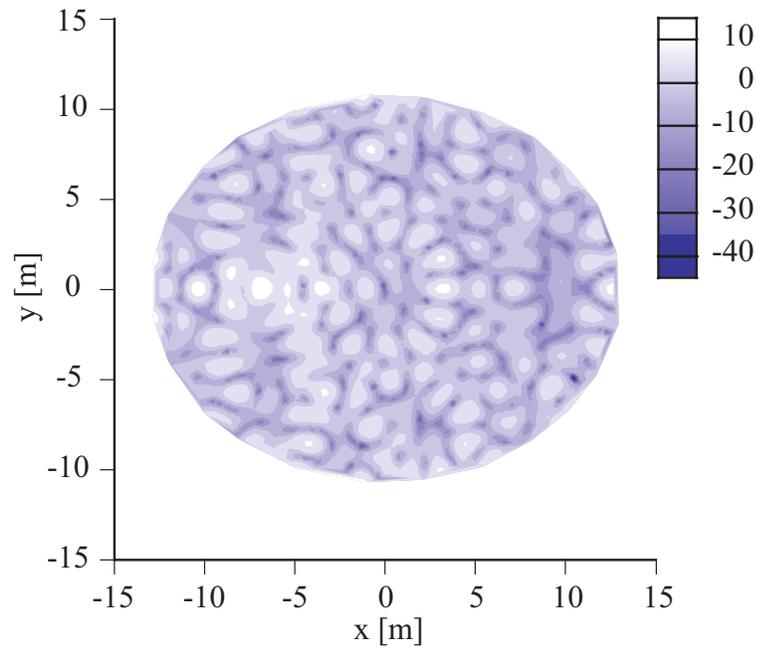


Fig. C.16: 125Hz, actual, CGS (\mathbf{x}_0^* = pseudorandom numbers)

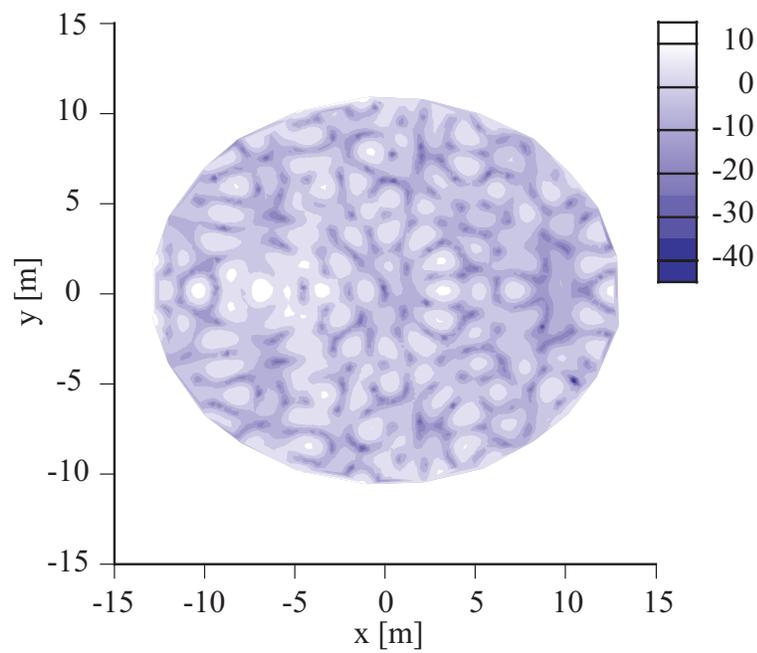


Fig. C.17: 125Hz, actual, CGS ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)

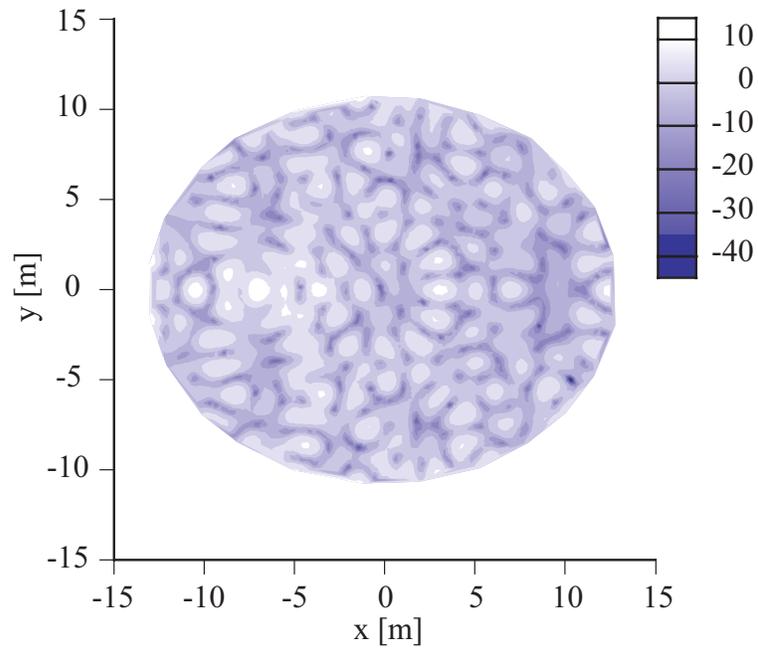


Fig. C.18: 125Hz, actual, BiCGStab (without preconditioning)

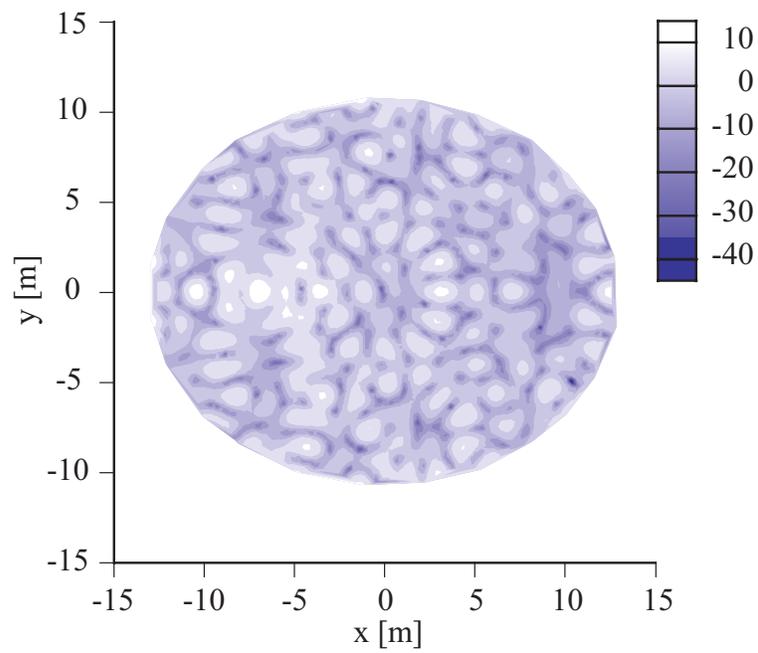


Fig. C.19: 125Hz, actual, BiCGStab (diagonal preconditioning)

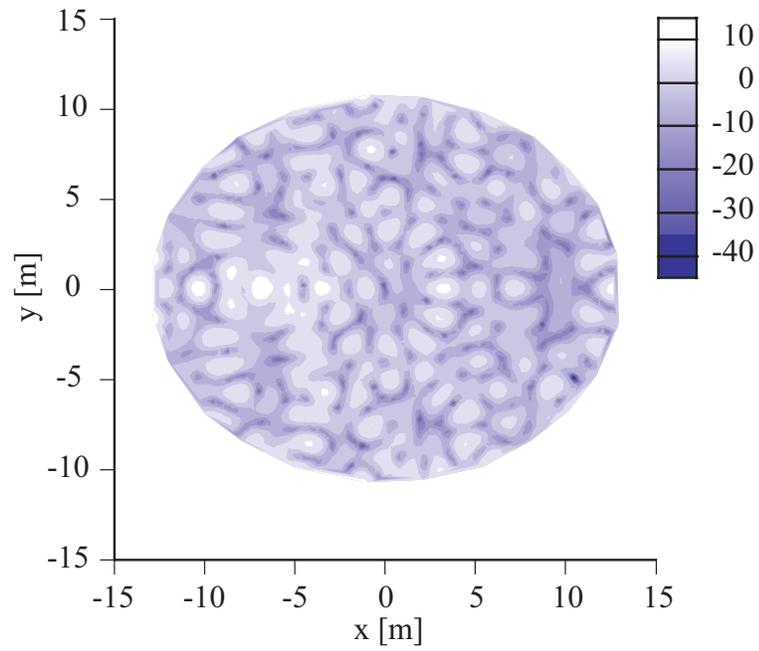


Fig. C.20: 125Hz, actual, BiCGStab (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)

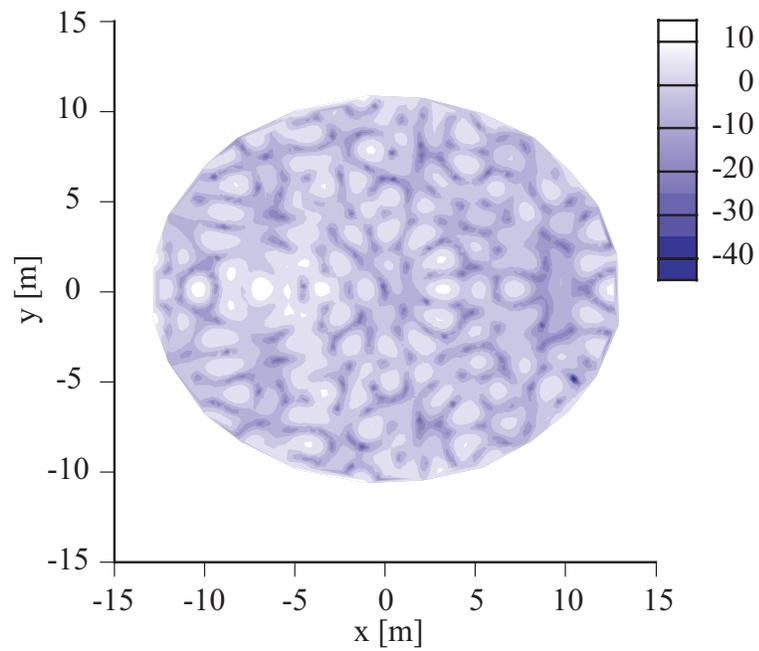


Fig. C.21: 125Hz, actual, BiCGStab ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)

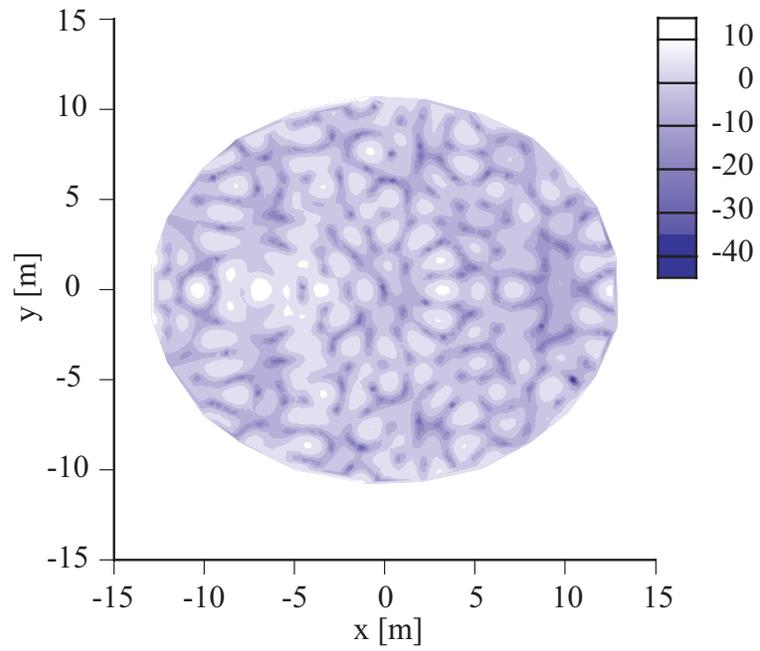


Fig. C.22: 125Hz, actual, BiCGStab2 (without preconditioning)

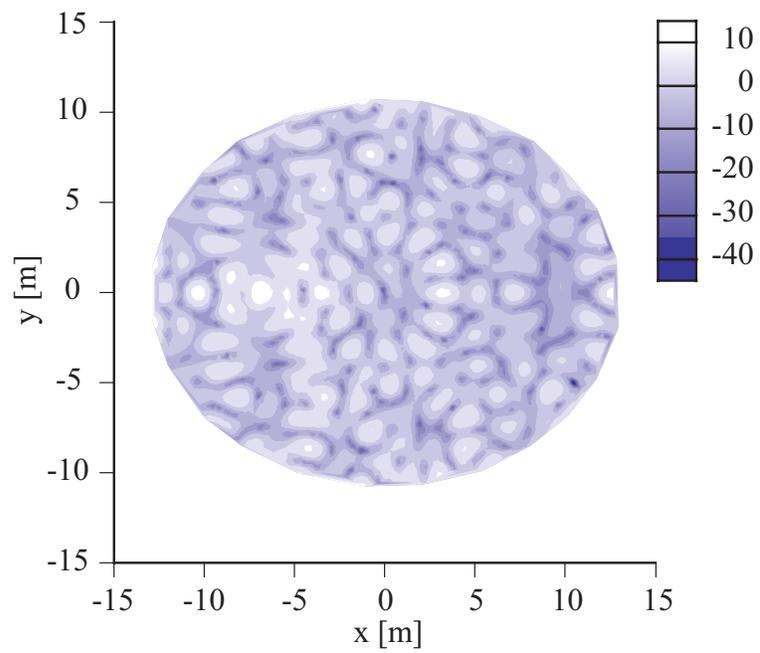


Fig. C.23: 125Hz, actual, BiCGStab2 (diagonal preconditioning)

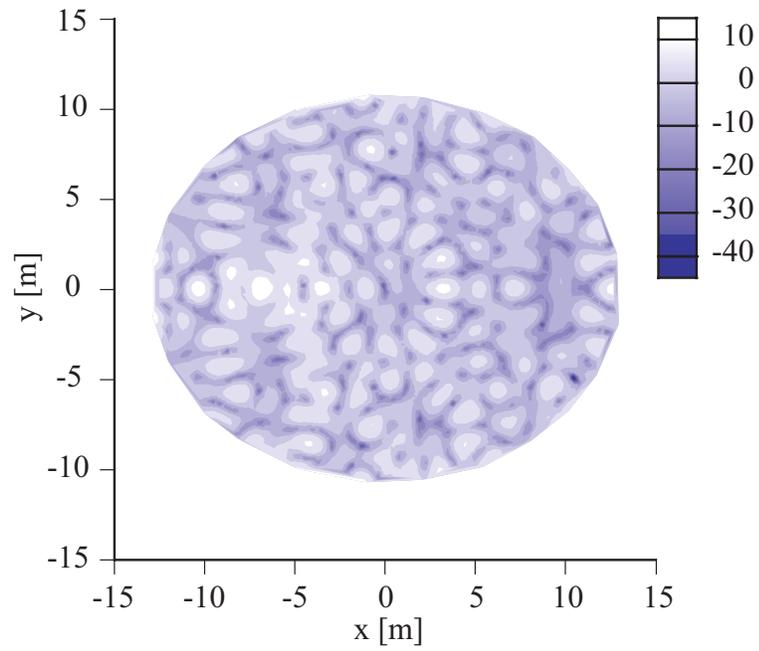


Fig. C.24: 125Hz, actual, BiCGStab2 (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)

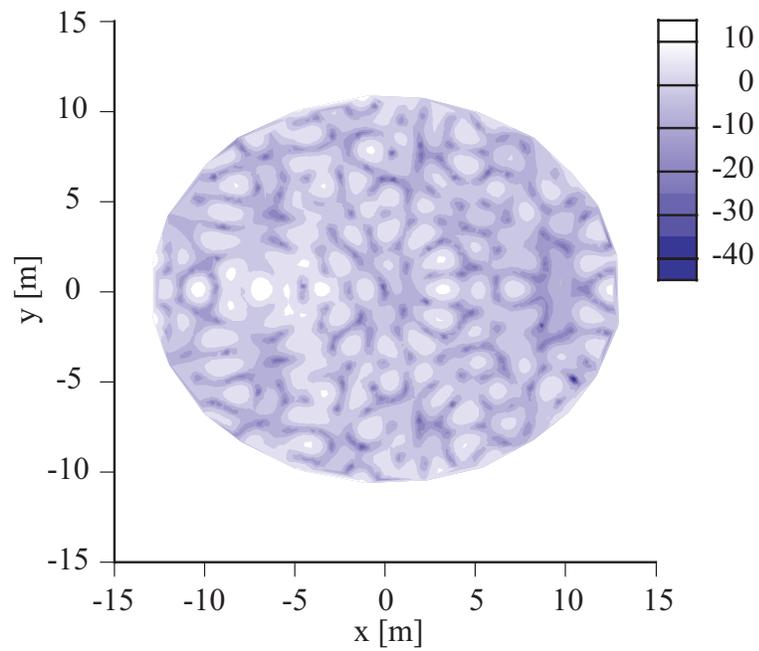


Fig. C.25: 125Hz, actual, BiCGStab ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)

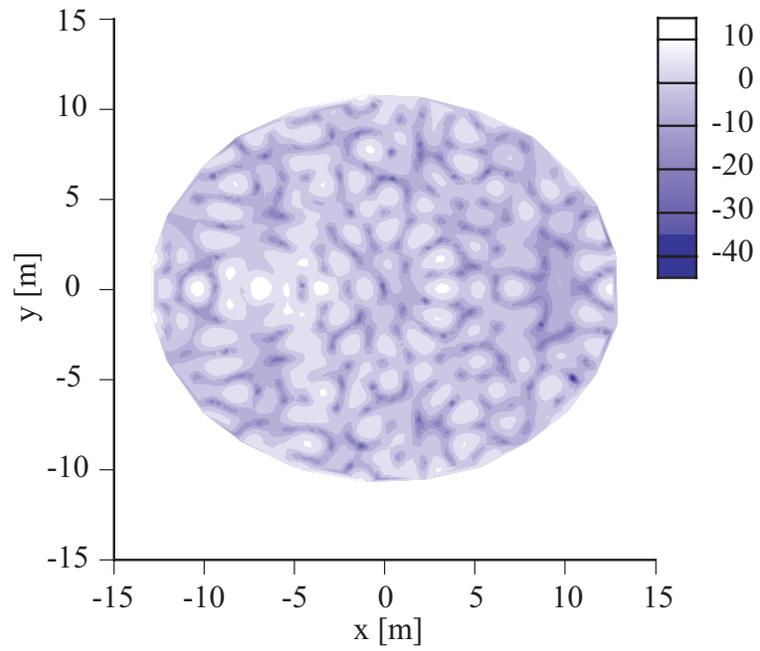


Fig. C.26: 125Hz, actual, GPBiCG (without preconditioning)

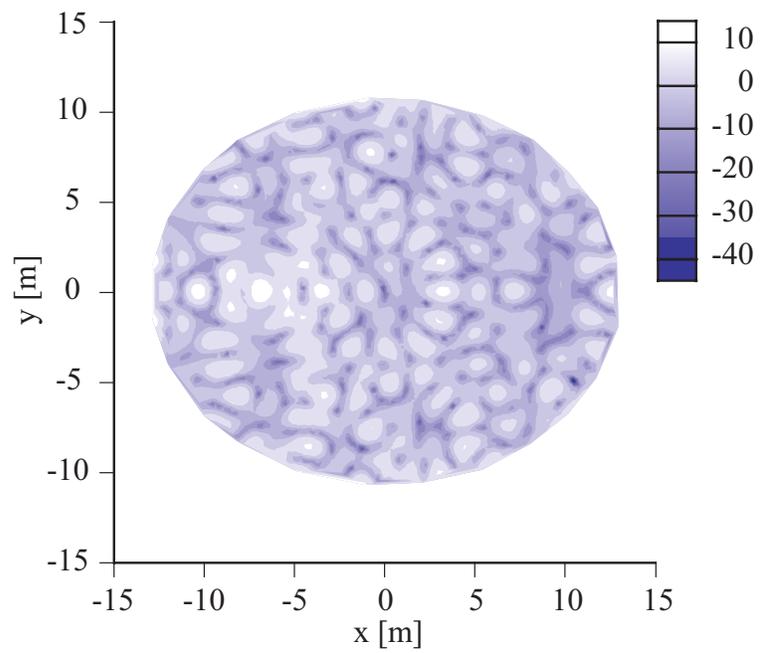


Fig. C.27: 125Hz, actual, GPBiCG (diagonal preconditioning)

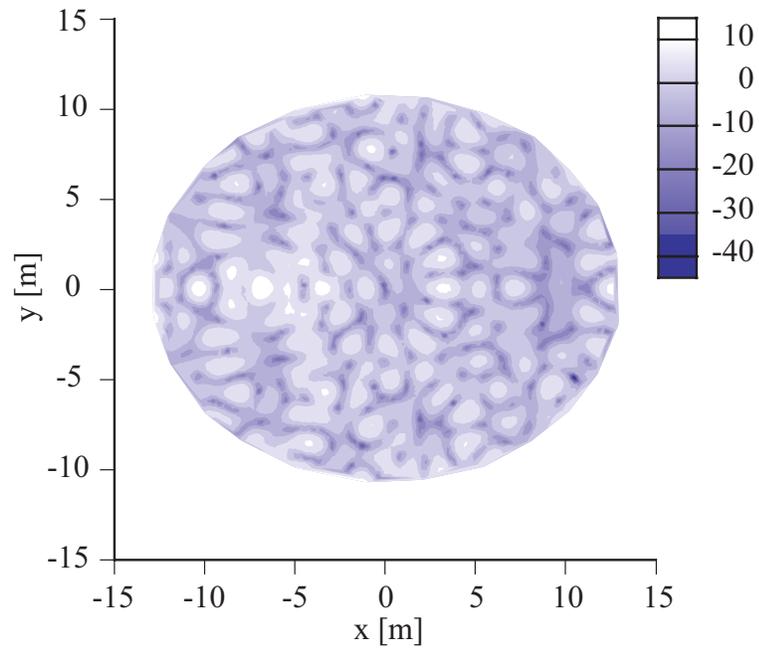


Fig. C.28: 125Hz, actual, GPBiCG (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)

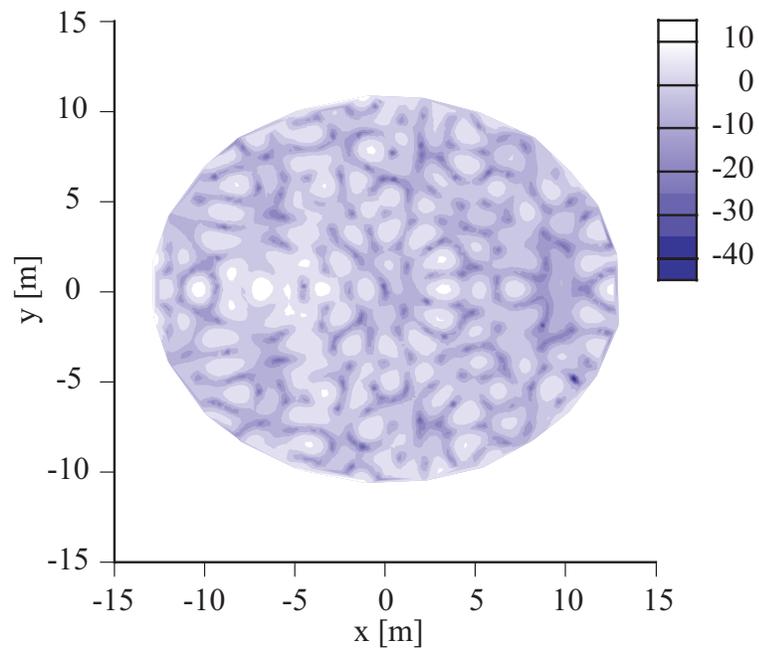


Fig. C.29: 125Hz, actual, GPBiCG ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)

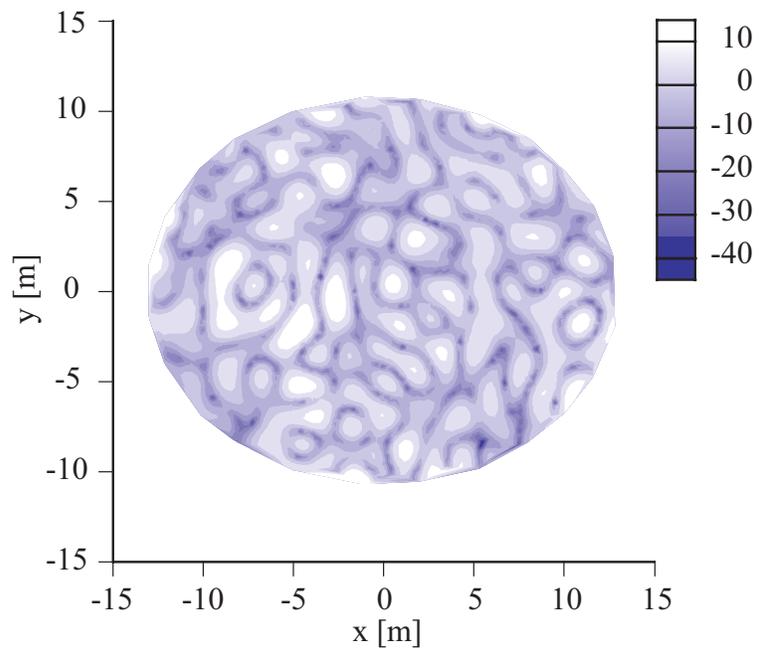


Fig. C.30: 125Hz, $a = 0$, CGS (without preconditioning)

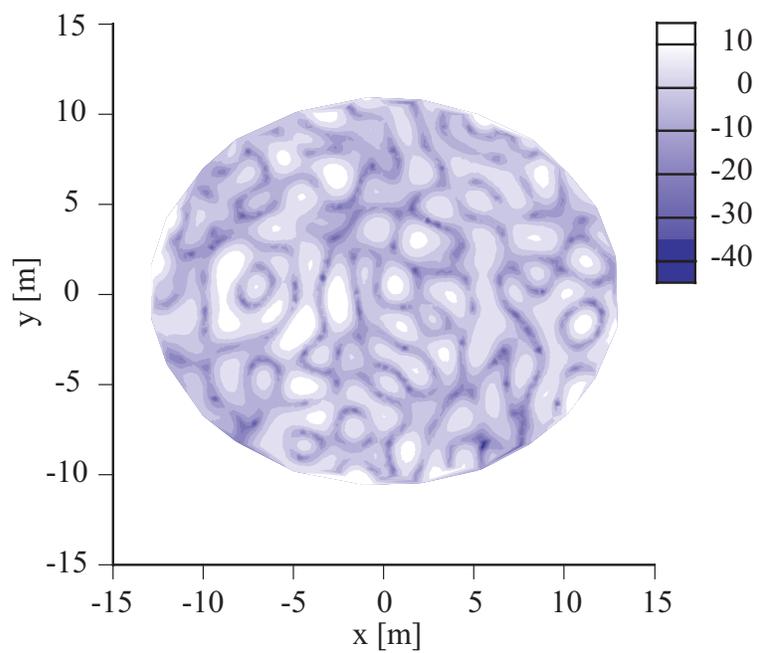


Fig. C.31: 125Hz, $a = 0$, CGS (diagonal preconditioning)

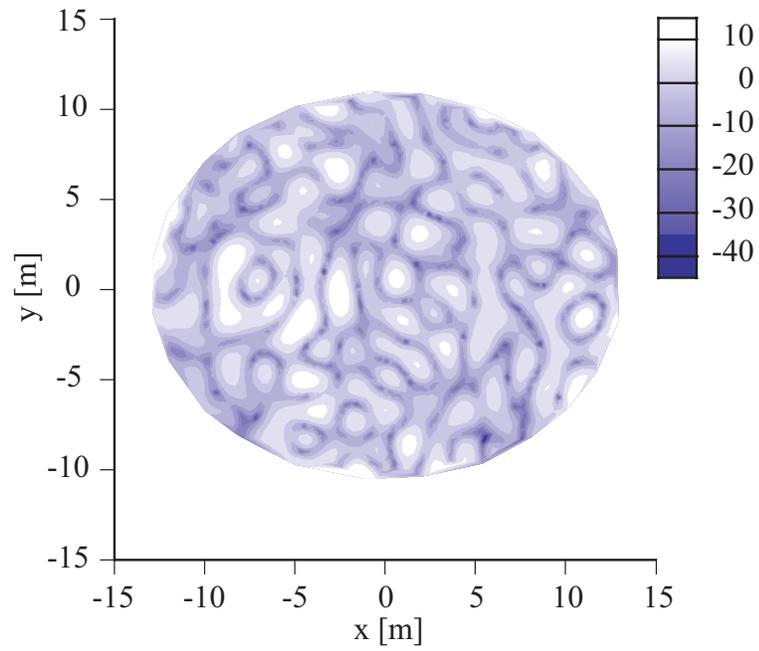


Fig. C.32: 125Hz, $a = 0$, CGS (\mathbf{x}_0^* = pseudorandom numbers)

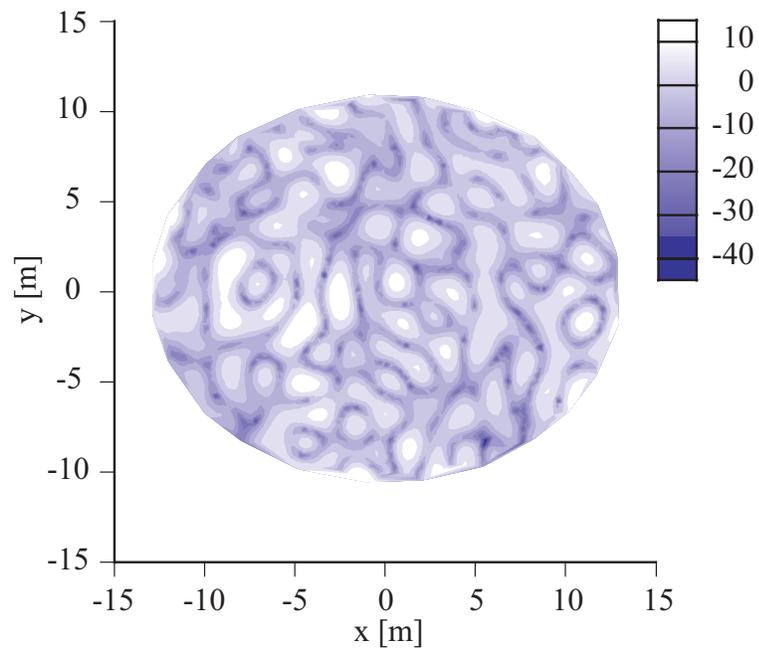


Fig. C.33: 125Hz, $a = 0$, CGS ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)

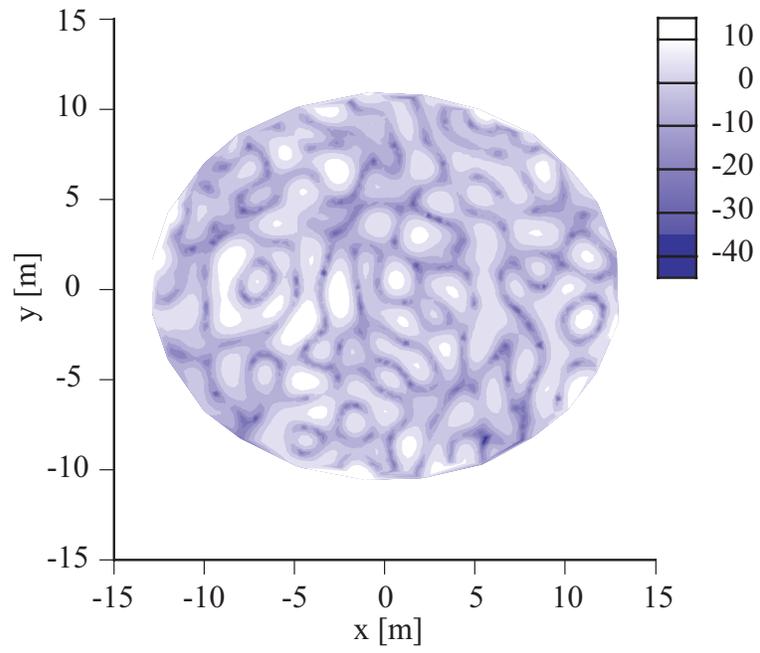


Fig. C.34: 125Hz, $a = 0$, BiCGStab (without preconditioning)

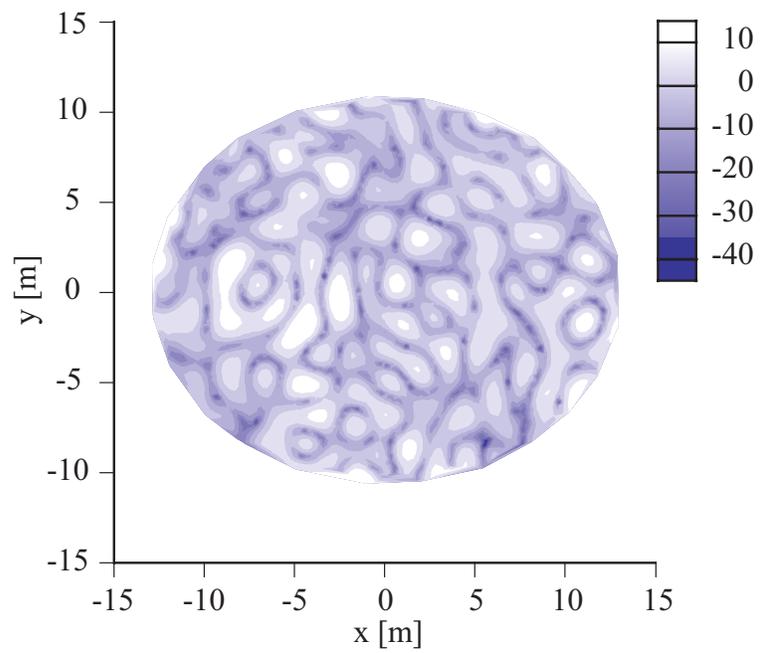


Fig. C.35: 125Hz, $a = 0$, BiCGStab (diagonal preconditioning)

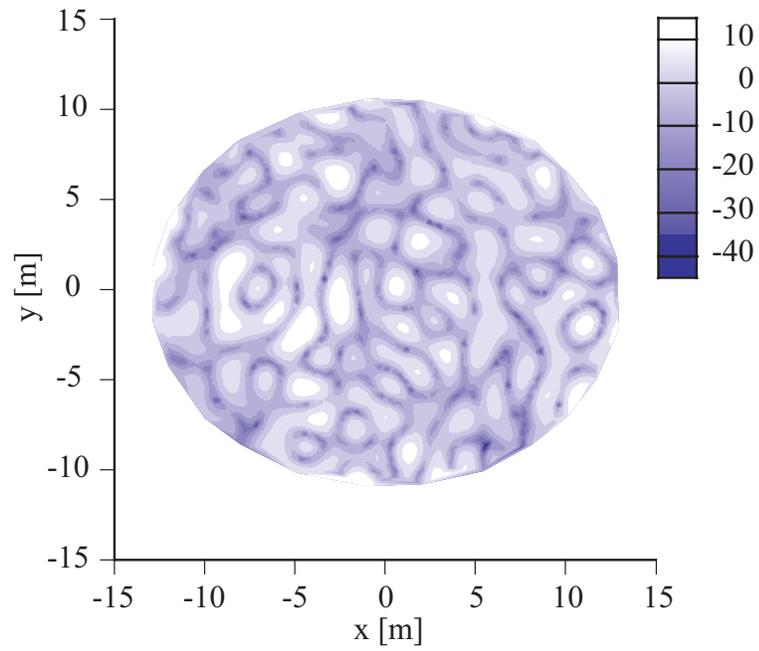


Fig. C.36: 125Hz, $a = 0$, BiCGStab (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)

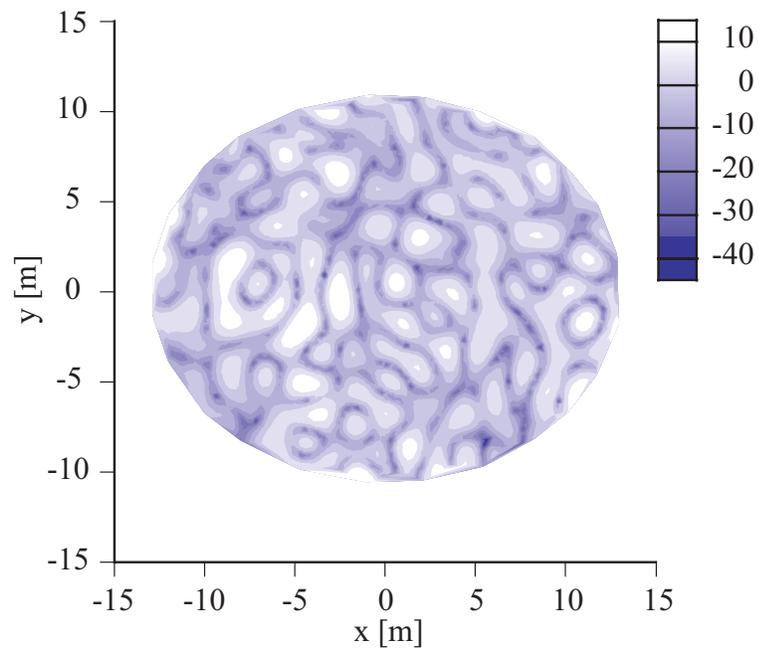


Fig. C.37: 125Hz, $a = 0$, BiCGStab ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)

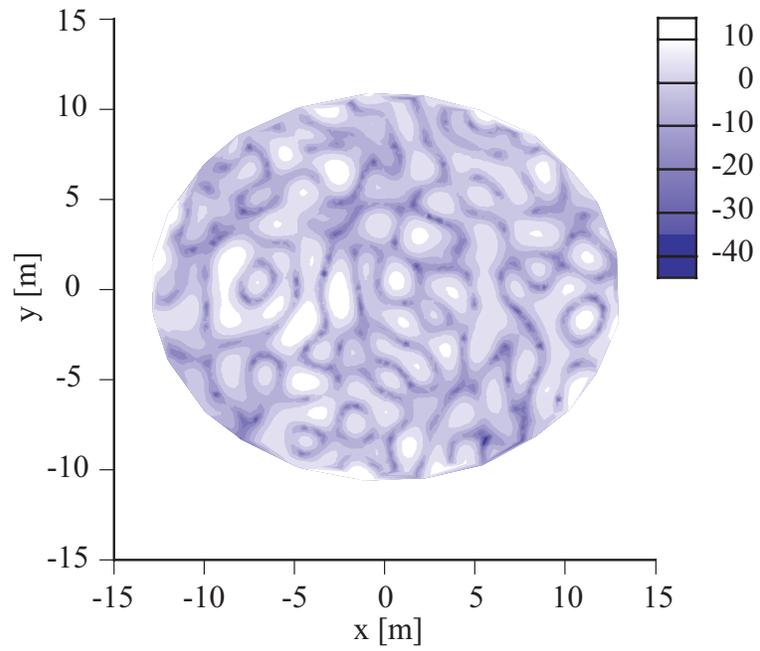


Fig. C.38: 125Hz, $a = 0$, BiCGStab2 (without preconditioning)

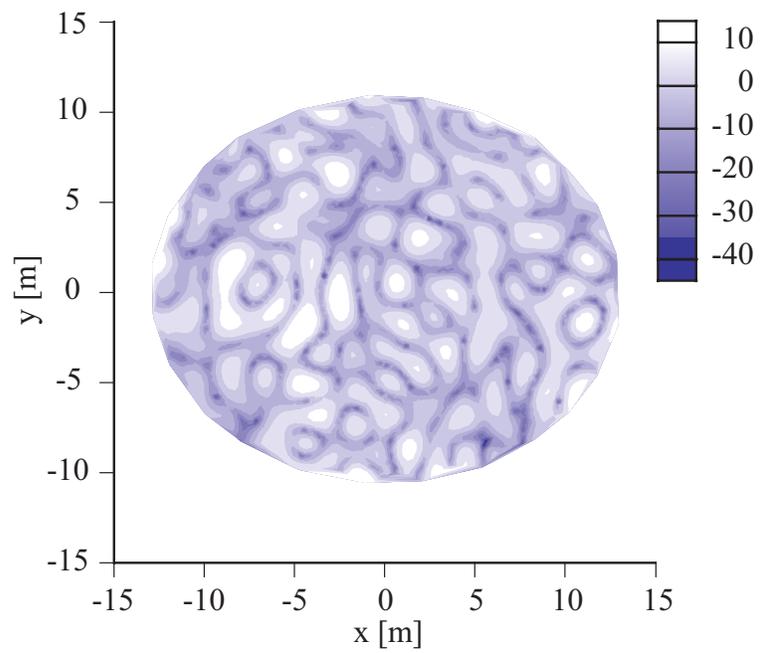


Fig. C.39: 125Hz, $a = 0$, BiCGStab2 (diagonal preconditioning)

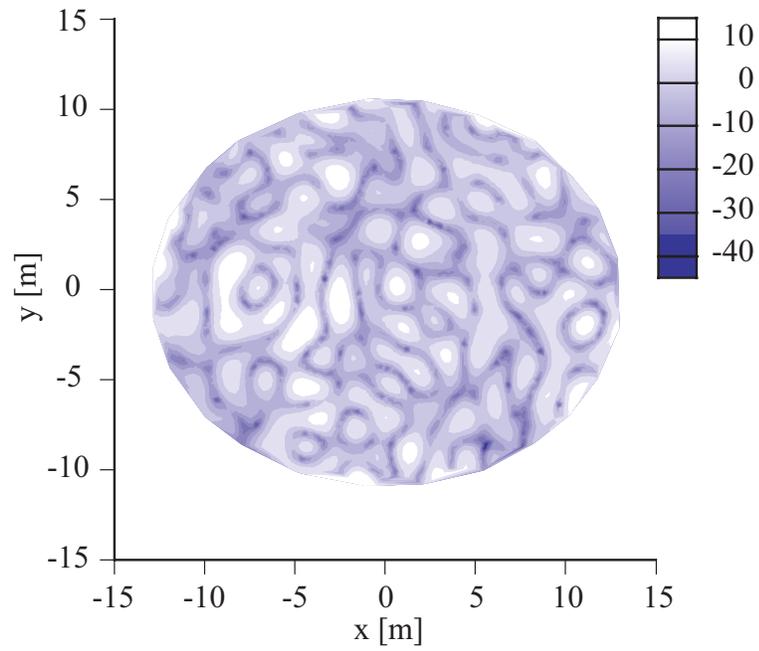


Fig. C.40: 125Hz, $a = 0$, BiCGStab2 (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)

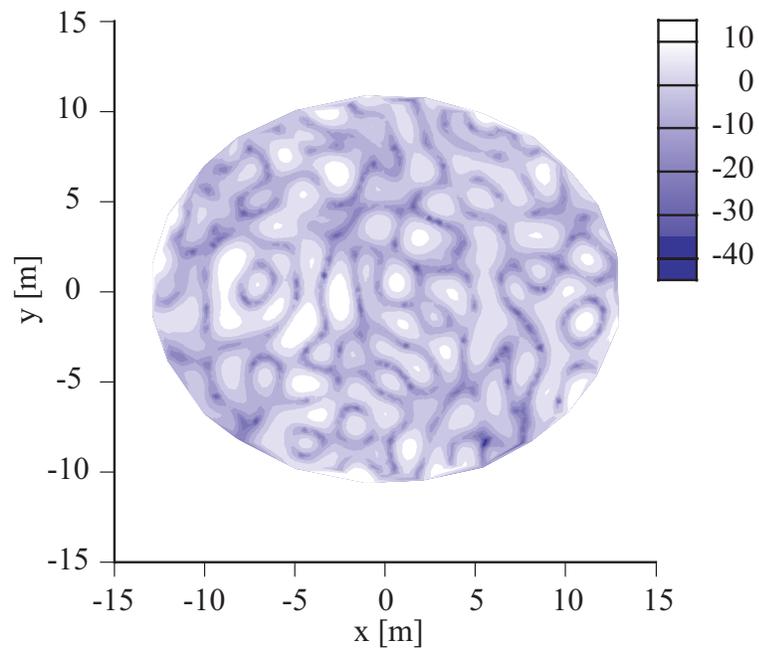


Fig. C.41: 125Hz, $a = 0$, BiCGStab2 ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)

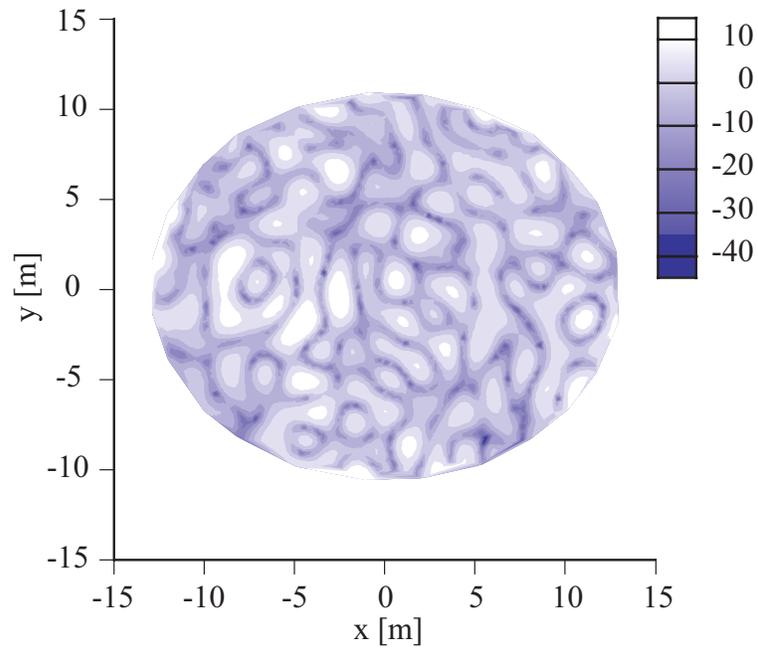


Fig. C.42: 125Hz, $a = 0$, GPBiCG (without preconditioning)

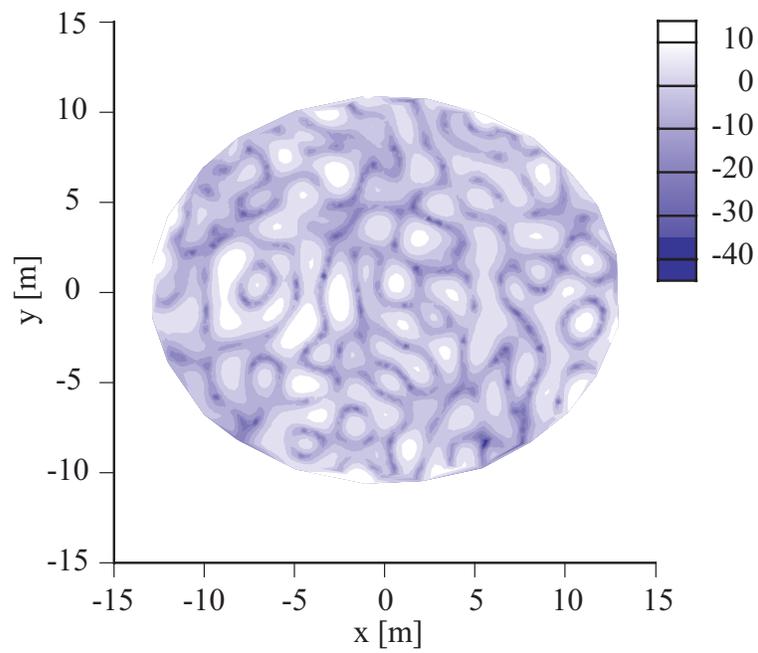


Fig. C.43: 125Hz, $a = 0$, GPBiCG (diagonal preconditioning)

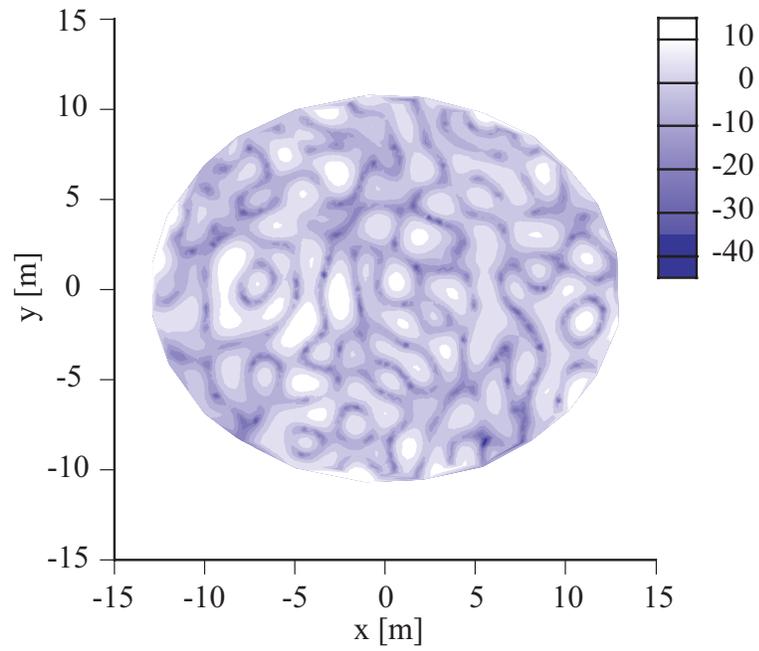


Fig. C.44: 125Hz, $a = 0$, GPBiCG (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)

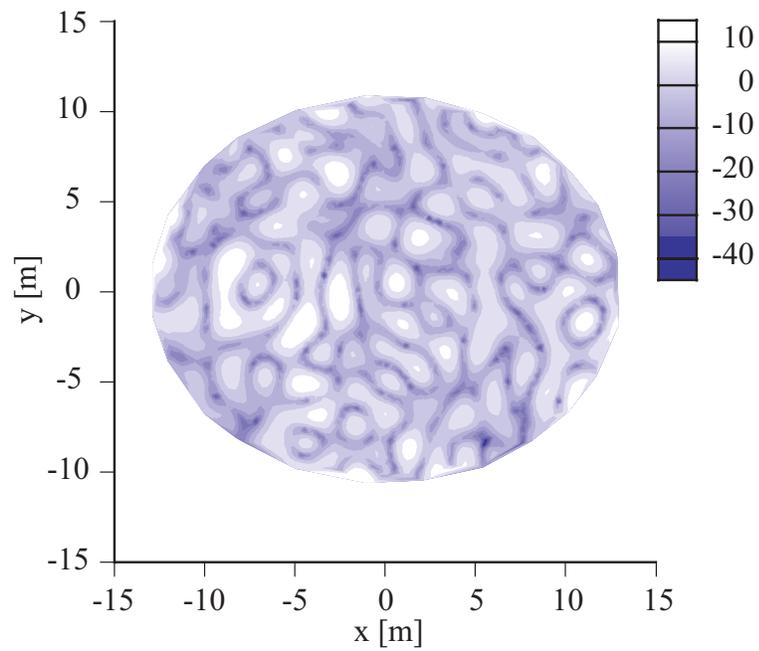


Fig. C.45: 125Hz, $a = 0$, GPBiCG ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)

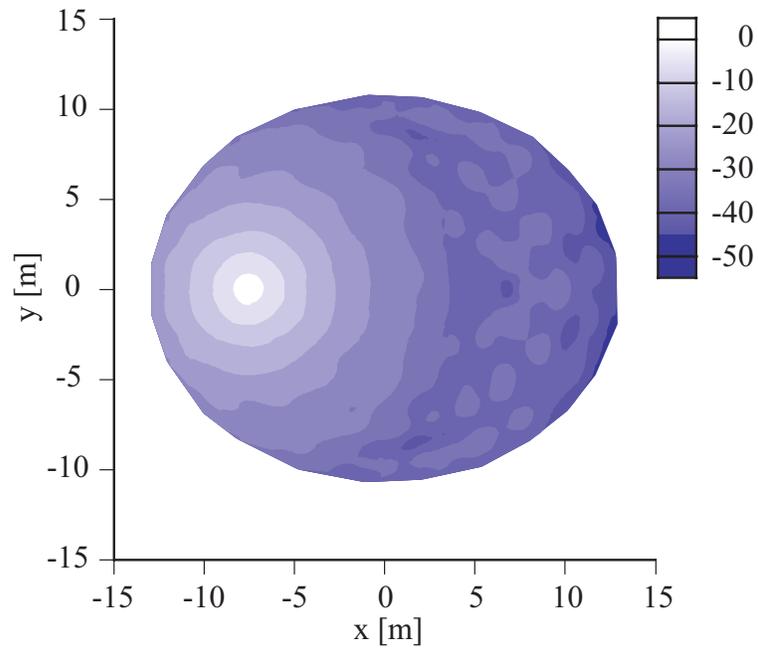


Fig. C.46: 125Hz, $a = 1$, CGS (without preconditioning)

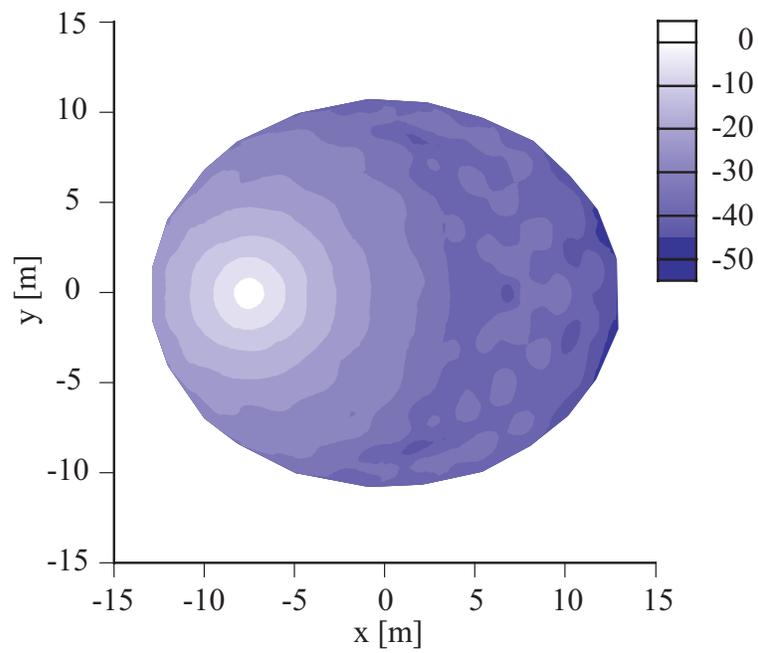


Fig. C.47: 125Hz, $a = 1$, BiCGStab (without preconditioning)

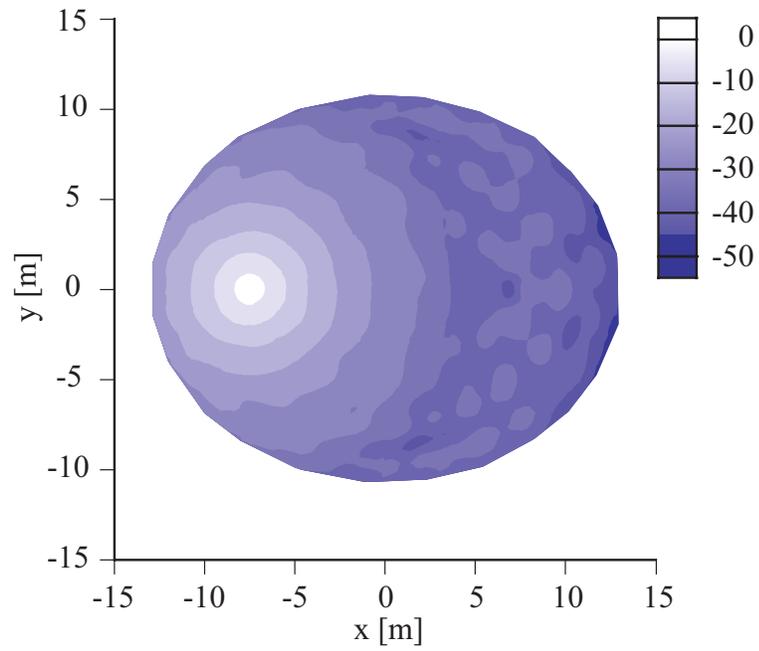


Fig. C.48: 125Hz, $a = 1$, BiCGStab2 (without preconditioning)

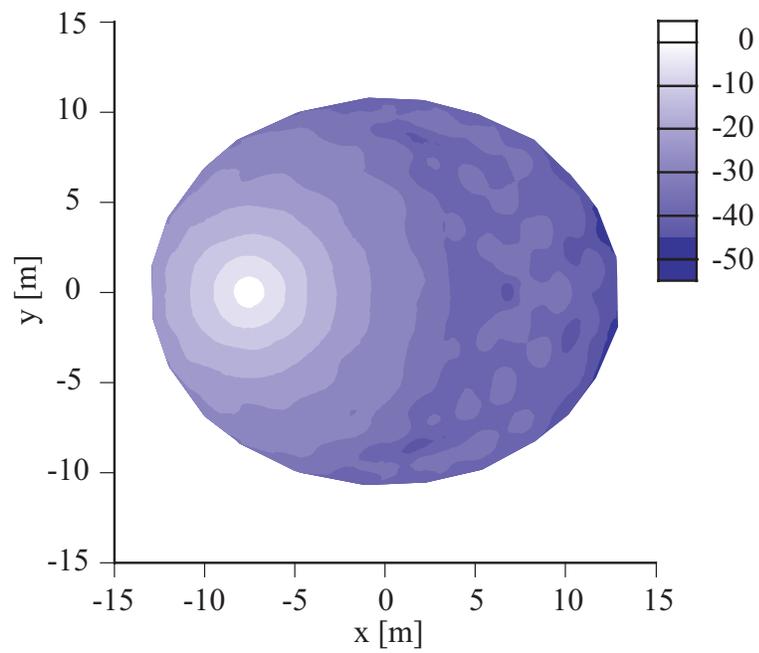


Fig. C.49: 125Hz, $a = 1$, GPBiCG (without preconditioning)

付録 D

数値解析結果（音響拡散体）

- 第 6 章で解析した音響拡散体の数値解析結果を示す。
- いずれも拡散体下面における音圧レベル分布であり，点音源から 1m 離れた点における自由空間中での音圧レベルにより基準化している。
- キャプションには解析周波数，定式化，反復解法（+ 各種収束改善法）を示している。
- 計算条件等については第 6 章を参照のこと。

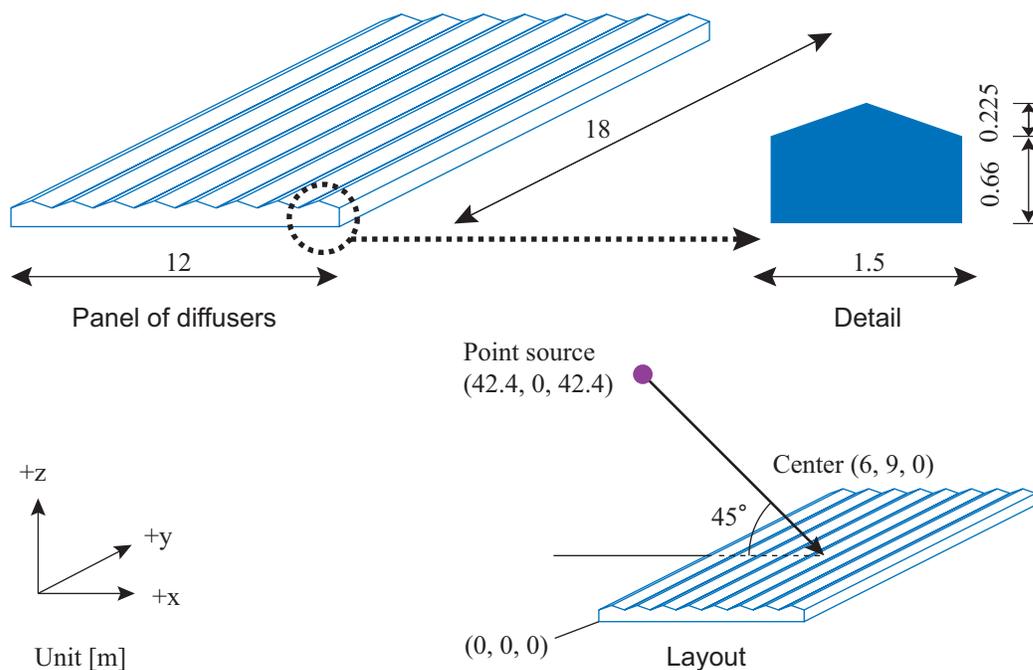


Fig. D.1: Geometry of a panel of sound diffusers and a point source.

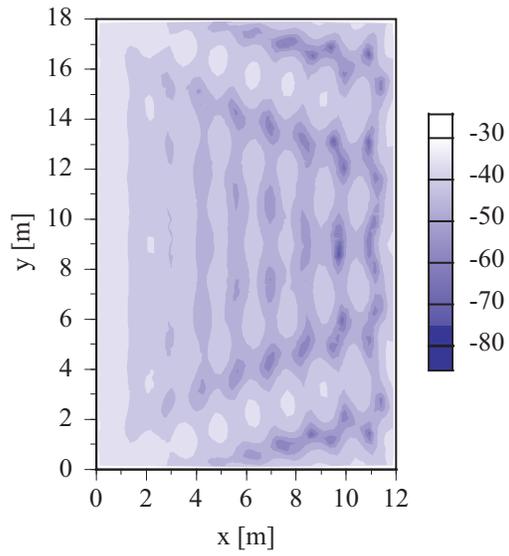


Fig. D.2: 125Hz, BF, CGS (without preconditioning)

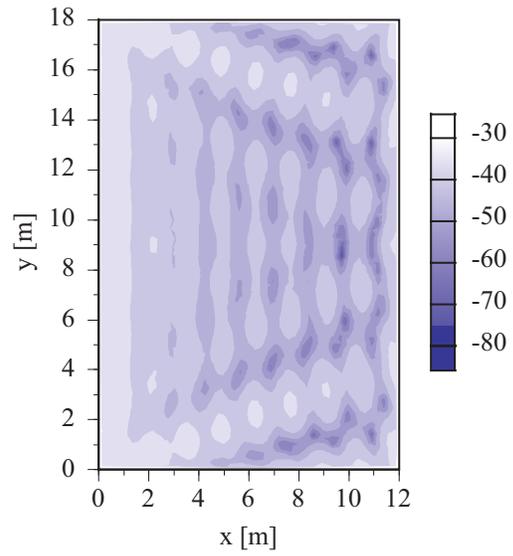


Fig. D.3: 125Hz, BF, CGS (diagonal preconditioning)

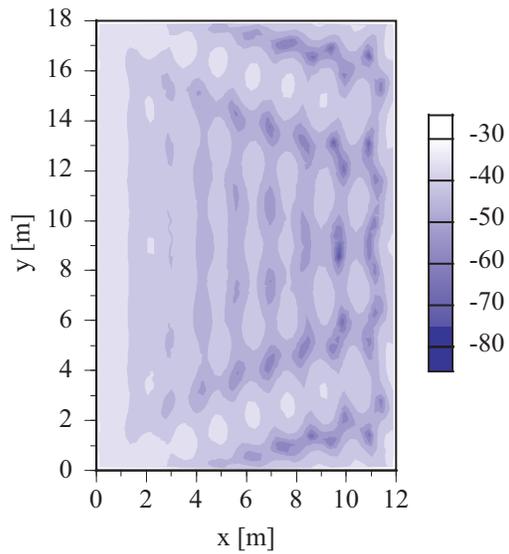


Fig. D.4: 125Hz, BF, BiCGStab (without preconditioning)

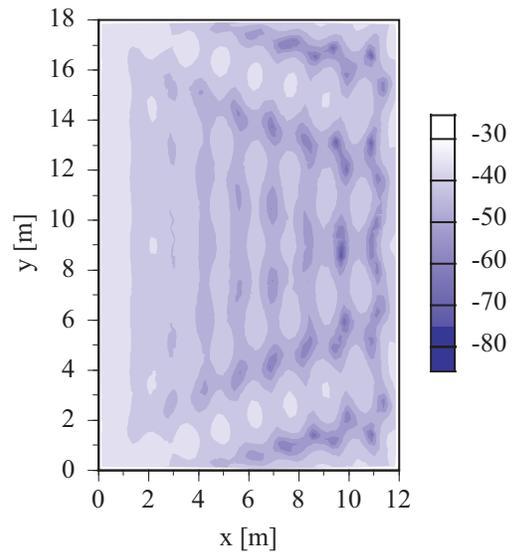


Fig. D.5: 125Hz, BF, BiCGStab (diagonal preconditioning)

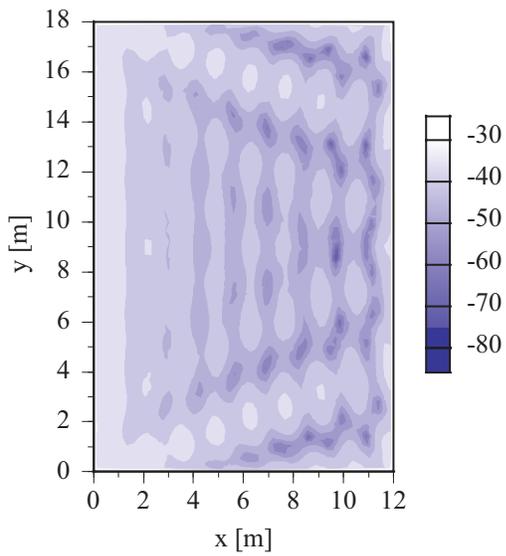


Fig. D.6: 125Hz, BF, BiCGStab2
(without preconditioning)

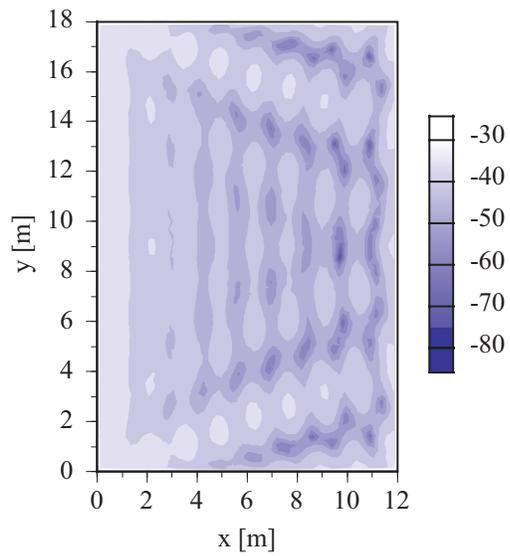


Fig. D.7: 125Hz, BF, BiCGStab2
(diagonal preconditioning)

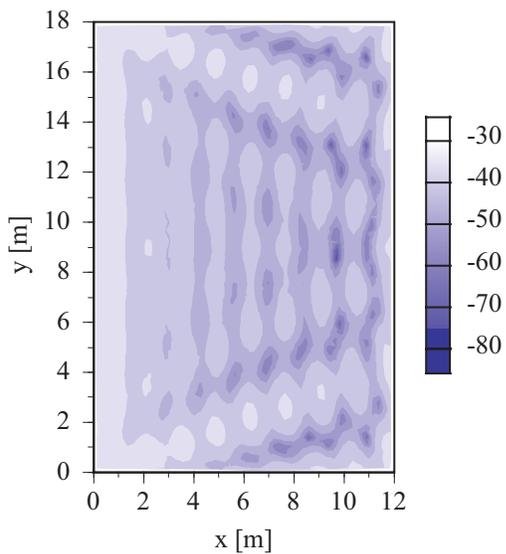


Fig. D.8: 125Hz, BF, GPBiCG
(without preconditioning)

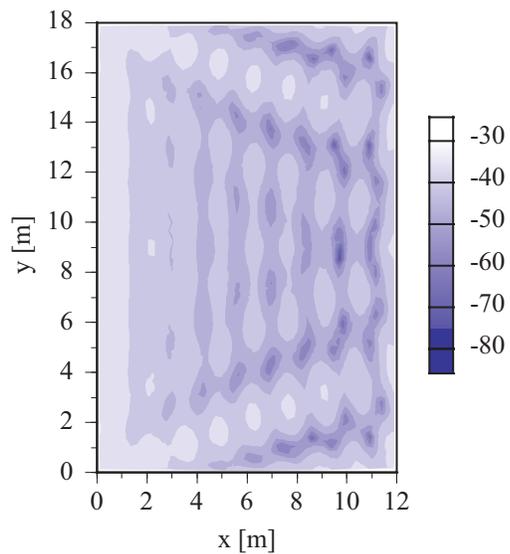


Fig. D.9: 125Hz, BF, GPBiCG
(diagonal preconditioning)

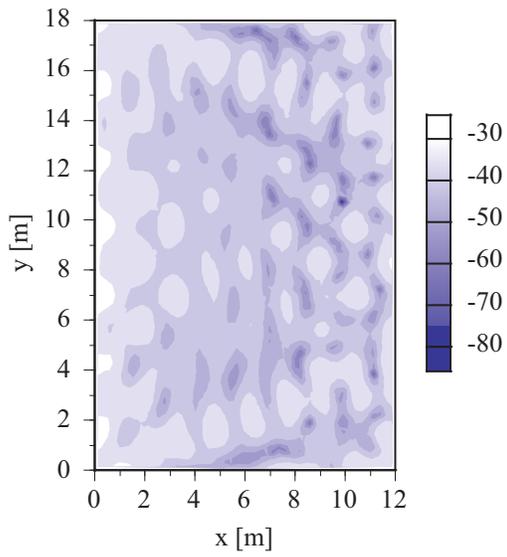


Fig. D.10: 125Hz, NDF, CGS
(without preconditioning)

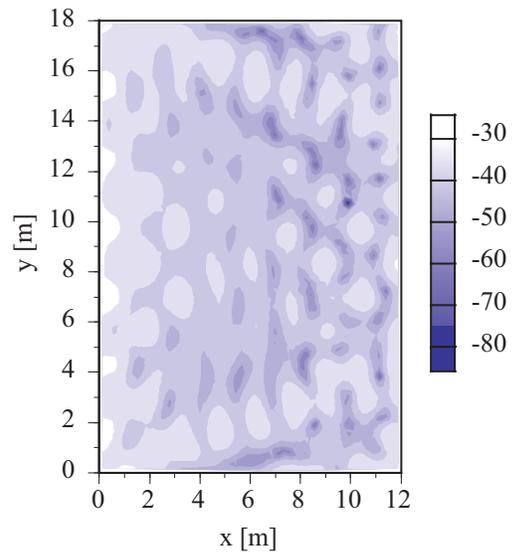


Fig. D.11: 125Hz, NDF, CGS
(diagonal preconditioning)

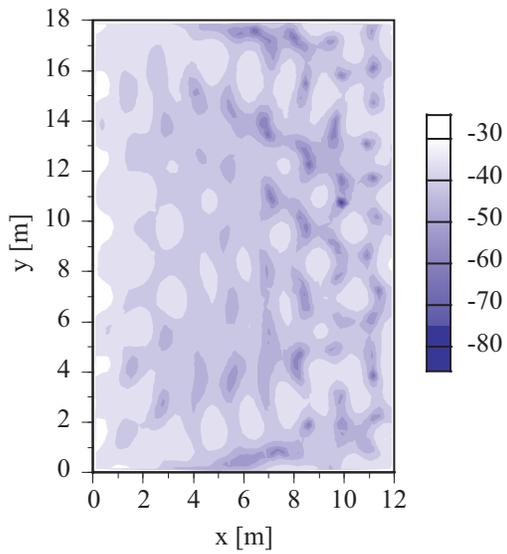


Fig. D.12: 125Hz, NDF,
BiCGStab (without preconditioning)

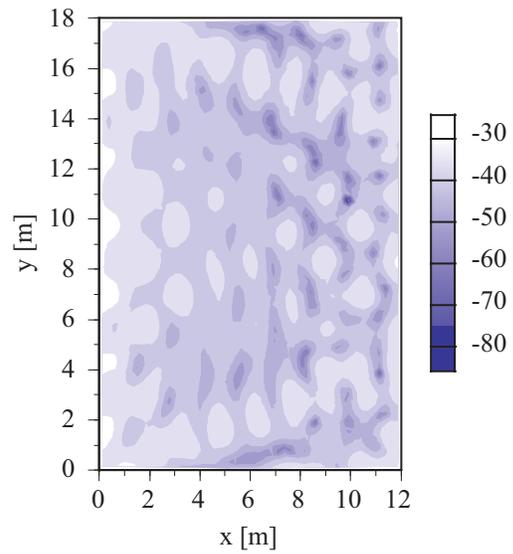


Fig. D.13: 125Hz, NDF,
BiCGStab (diagonal preconditioning)

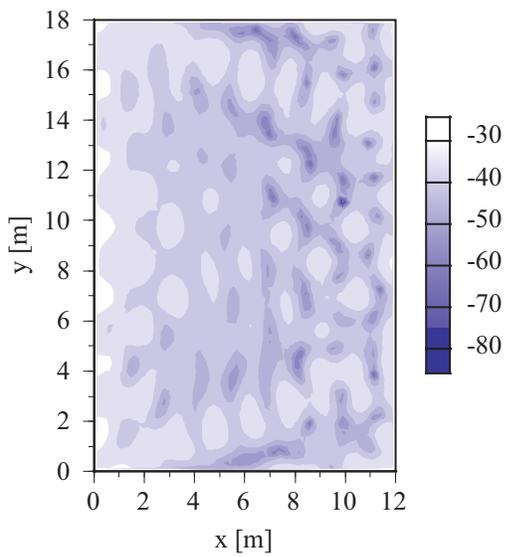


Fig. D.14: 125Hz, NDF, BiCGStab2 (without preconditioning)

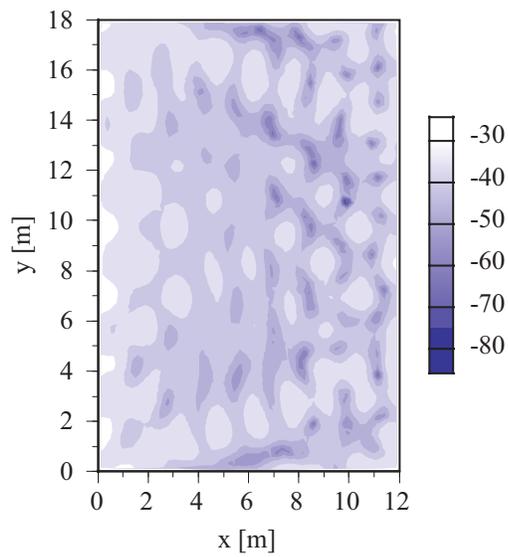


Fig. D.15: 125Hz, NDF, BiCGStab2 (diagonal preconditioning)

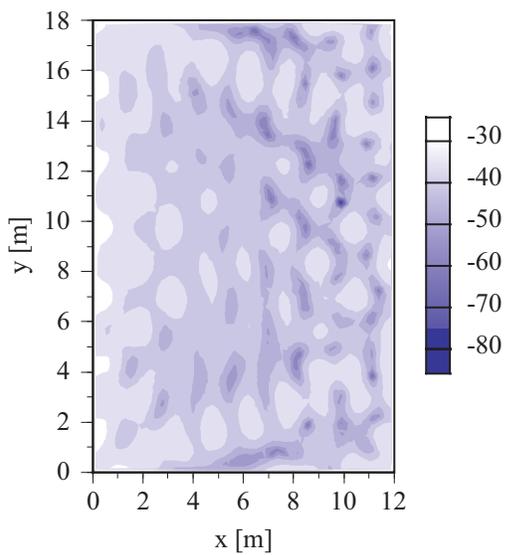


Fig. D.16: 125Hz, NDF, GP-BiCG (without preconditioning)

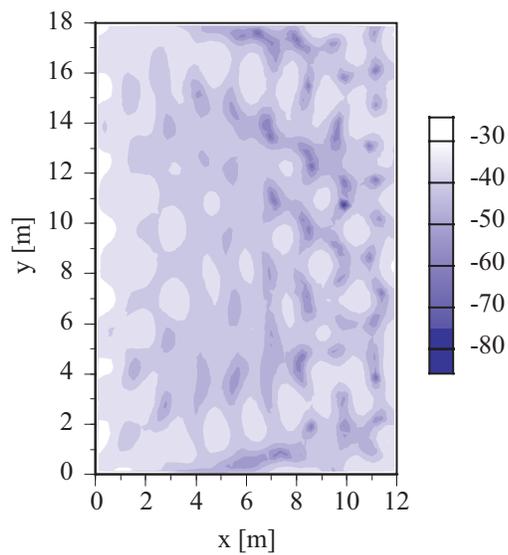


Fig. D.17: 125Hz, NDF, GP-BiCG (diagonal preconditioning)

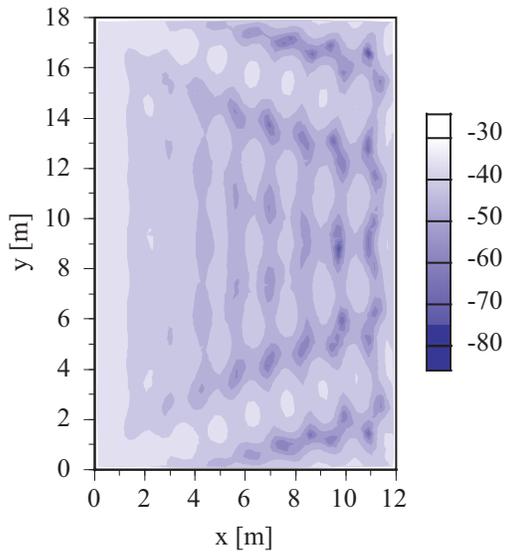


Fig. D.18: 125Hz, Burton-Miller formulation (BM), CGS (without preconditioning)

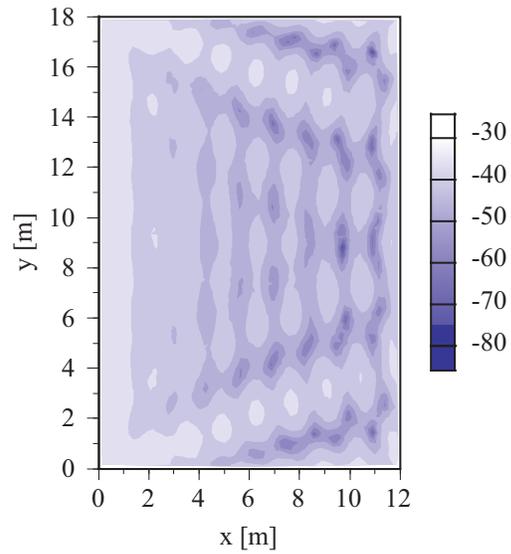


Fig. D.19: 125Hz, Burton-Miller formulation (BM), CGS (diagonal preconditioning)

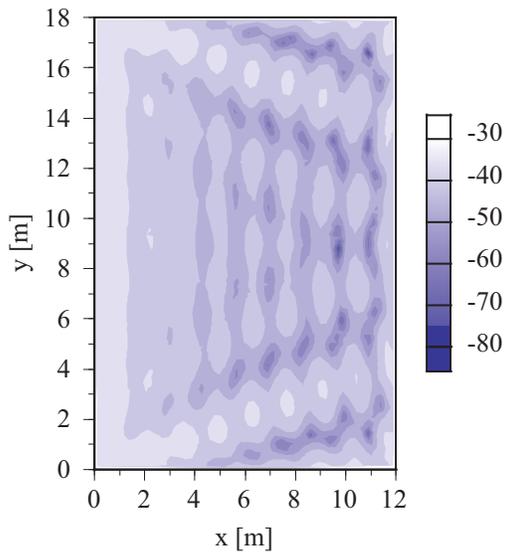


Fig. D.20: 125Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab (without preconditioning)

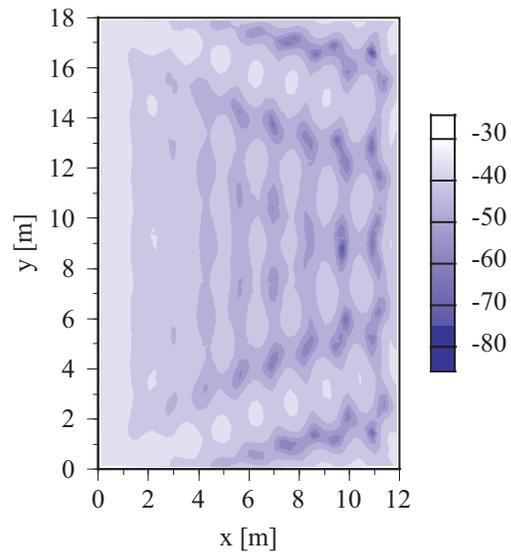


Fig. D.21: 125Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab (diagonal preconditioning)

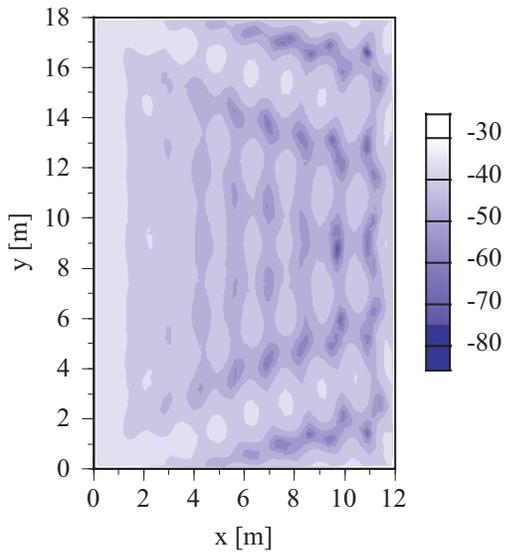


Fig. D.22: 125Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab2 (without preconditioning)

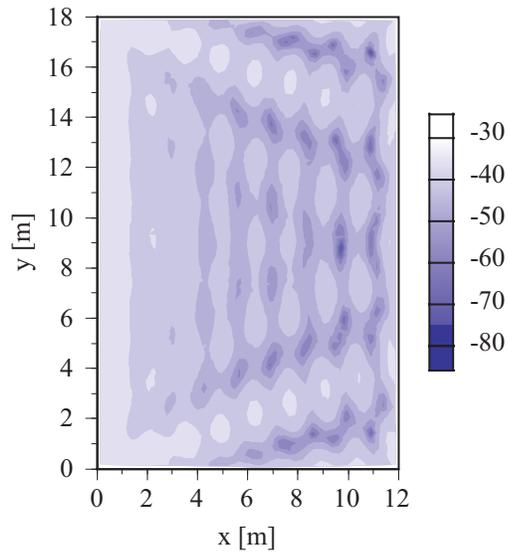


Fig. D.23: 125Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab2 (diagonal preconditioning)

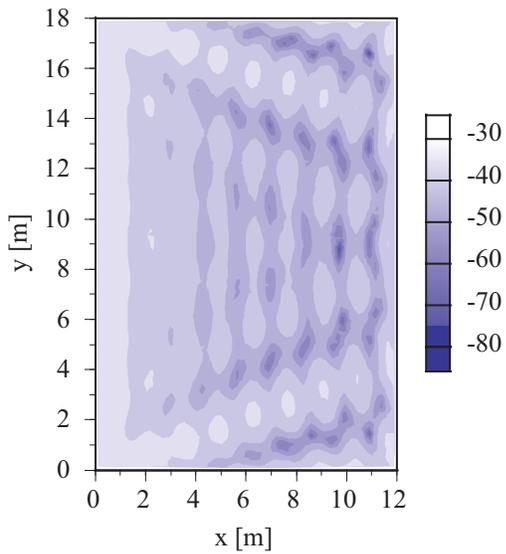


Fig. D.24: 125Hz, Burton-Miller formulation (BM), GPBiCG (without preconditioning)

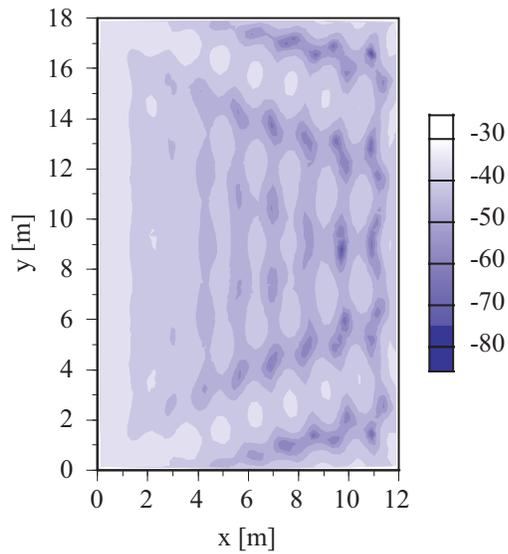


Fig. D.25: 125Hz, Burton-Miller formulation (BM), GPBiCG (diagonal preconditioning)

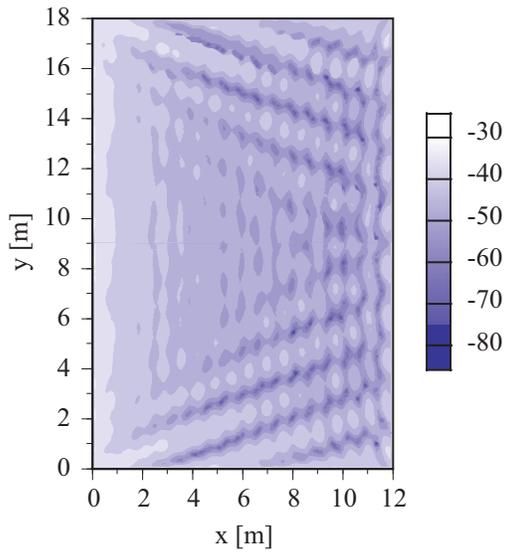


Fig. D.26: 250Hz, BF, CGS
(without preconditioning)

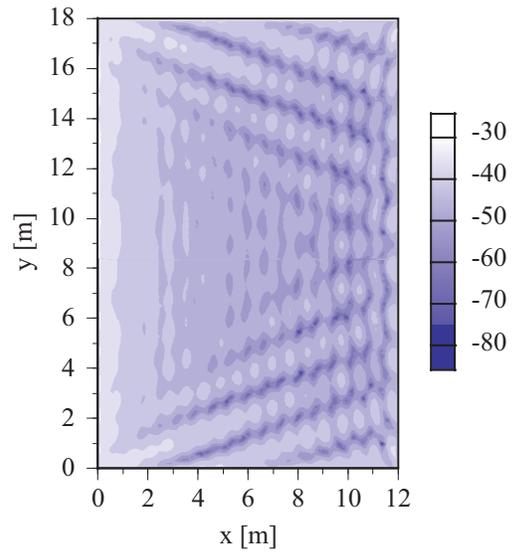


Fig. D.27: 250Hz, BF, CGS (diagonal preconditioning)

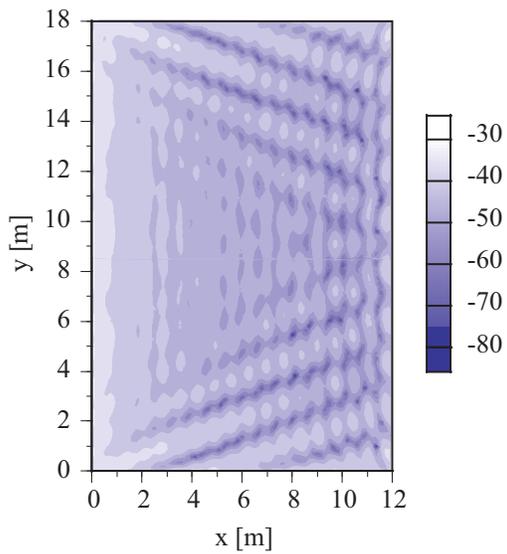


Fig. D.28: 250Hz, BF, CGS
(\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)

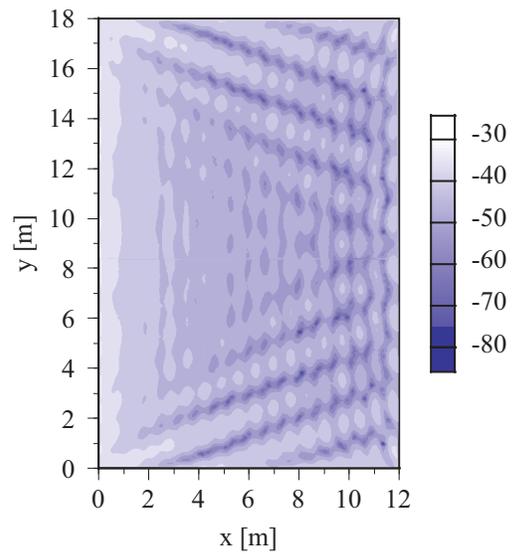


Fig. D.29: 250Hz, BF, CGS
($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)

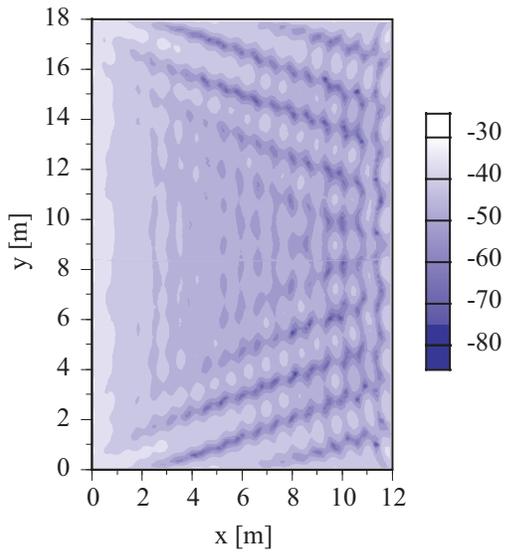


Fig. D.30: 250Hz, BF, BiCGStab
(without preconditioning)

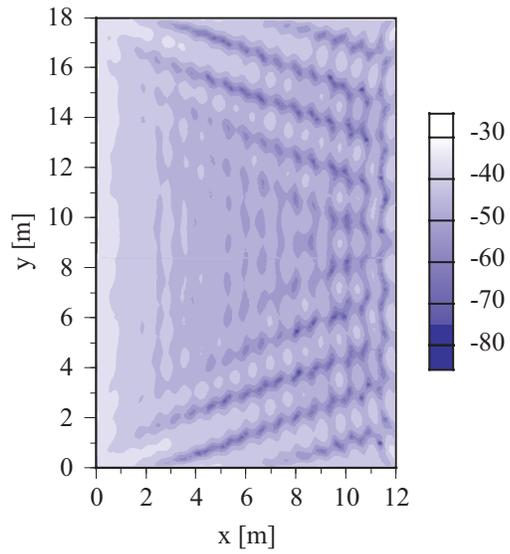


Fig. D.31: 250Hz, BF, BiCGStab
(diagonal preconditioning)

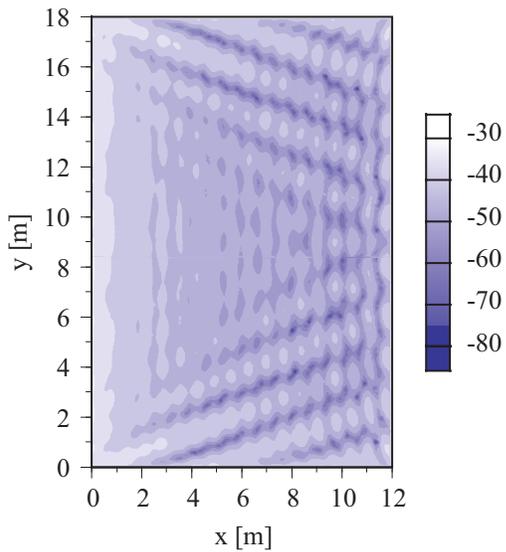


Fig. D.32: 250Hz, BF, BiCGStab
(\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)

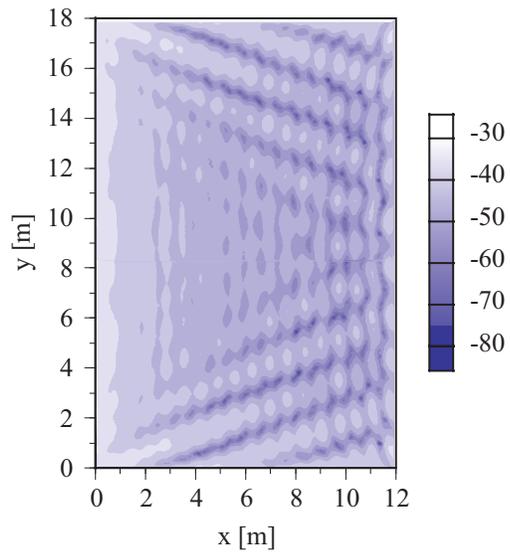


Fig. D.33: 250Hz, BF, BiCGStab
($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)

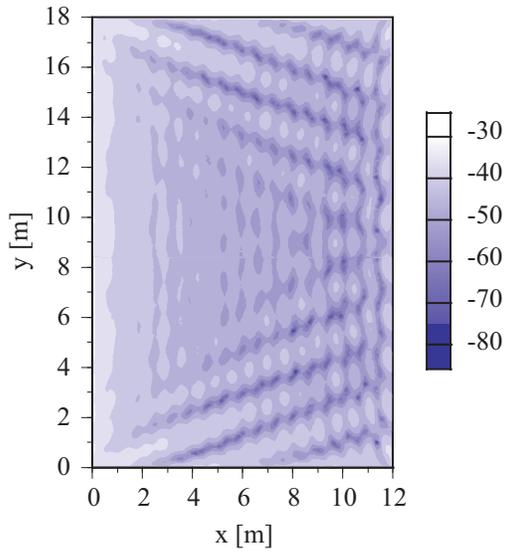


Fig. D.34: 250Hz, BF, BiCGStab2 (without preconditioning)

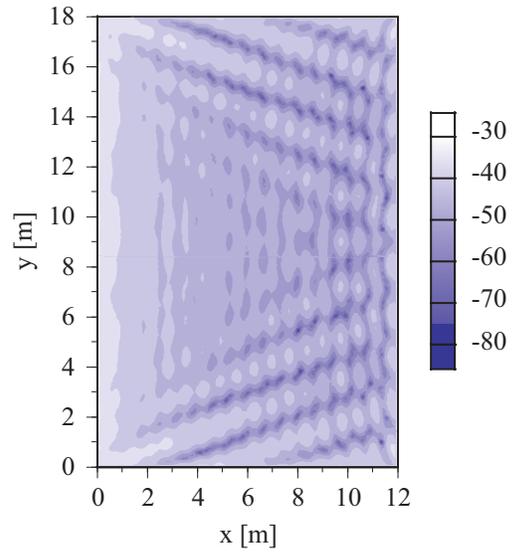


Fig. D.35: 250Hz, BF, BiCGStab2 (diagonal preconditioning)

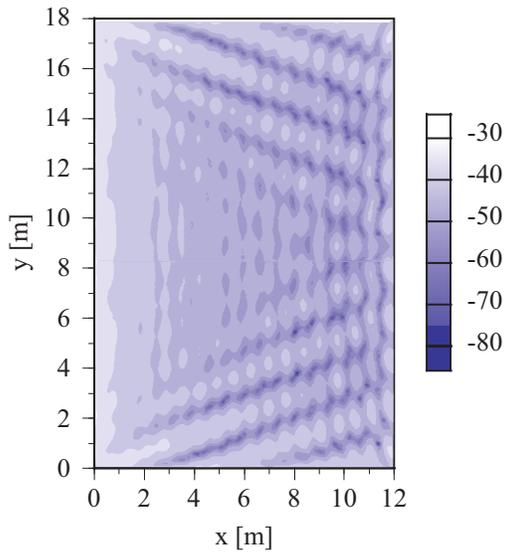


Fig. D.36: 250Hz, BF, BiCGStab2 (\mathbf{r}_0^* = pseudo-random numbers)

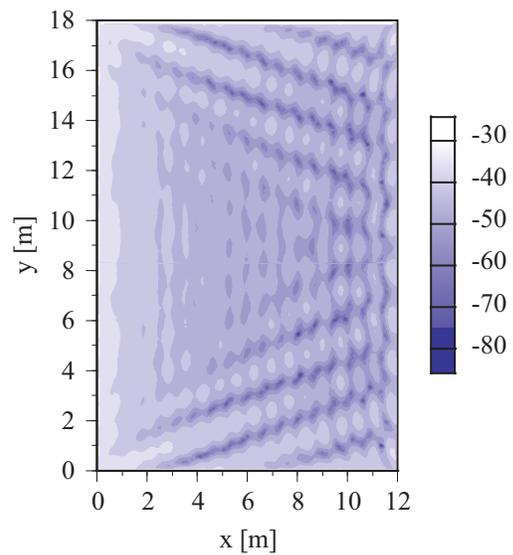


Fig. D.37: 250Hz, BF, BiCGStab2 ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)

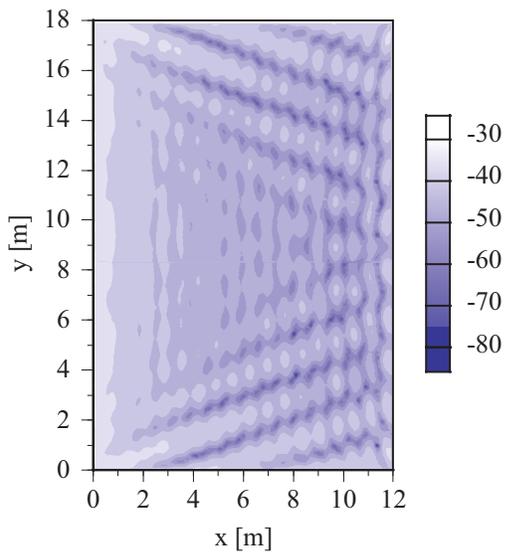


Fig. D.38: 250Hz, BF, GPBiCG
(without preconditioning)

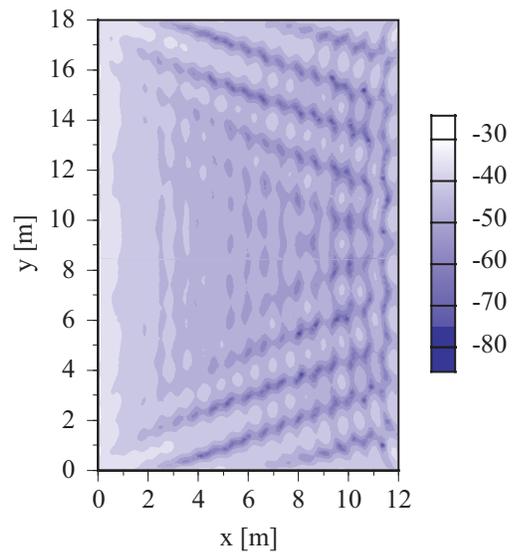


Fig. D.39: 250Hz, BF, GPBiCG
(diagonal preconditioning)

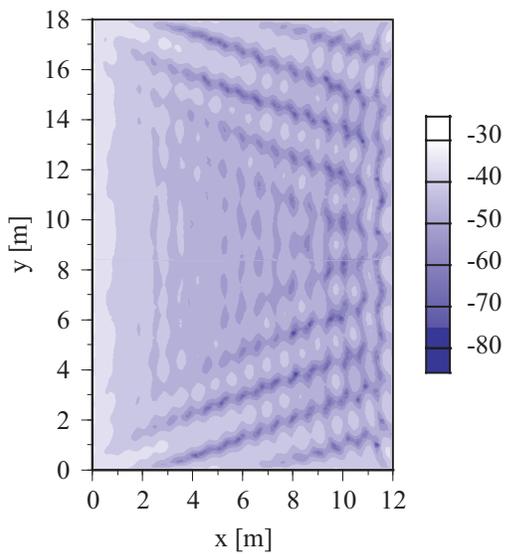


Fig. D.40: 250Hz, BF, GPBiCG
(\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)

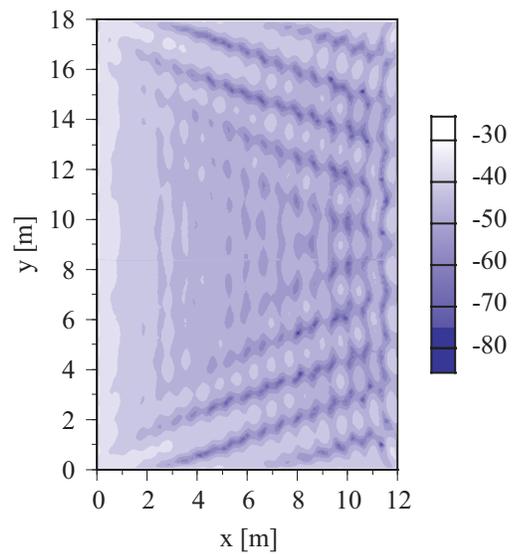


Fig. D.41: 250Hz, BF, GPBiCG
($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)

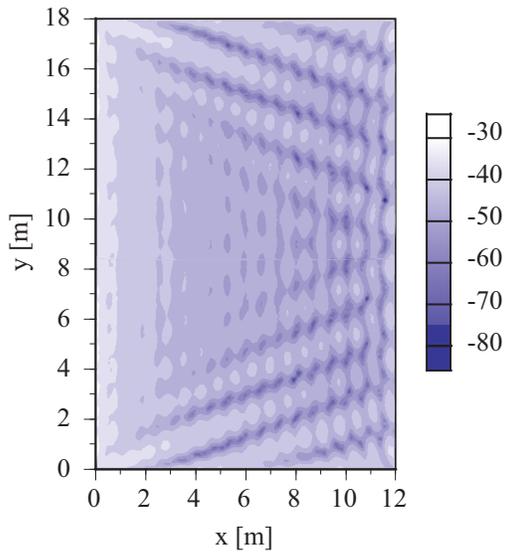


Fig. D.42: 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), CGS (without preconditioning)

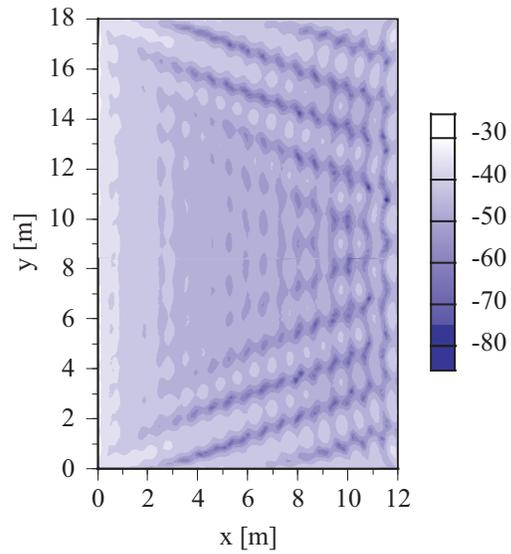


Fig. D.43: 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), CGS (diagonal preconditioning)

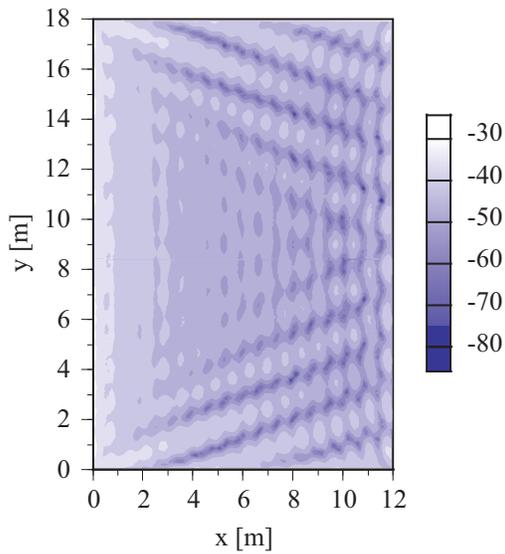


Fig. D.44: 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), CGS (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)

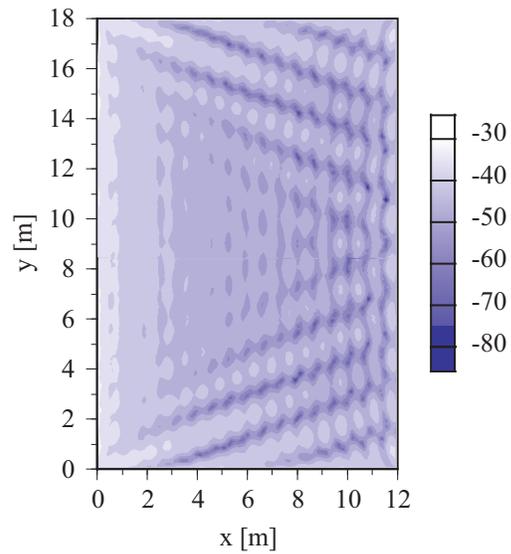


Fig. D.45: 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), CGS ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)

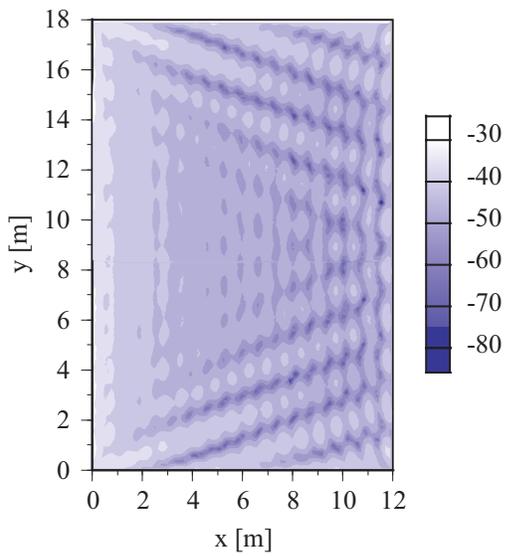


Fig. D.46: 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab2 (without preconditioning)

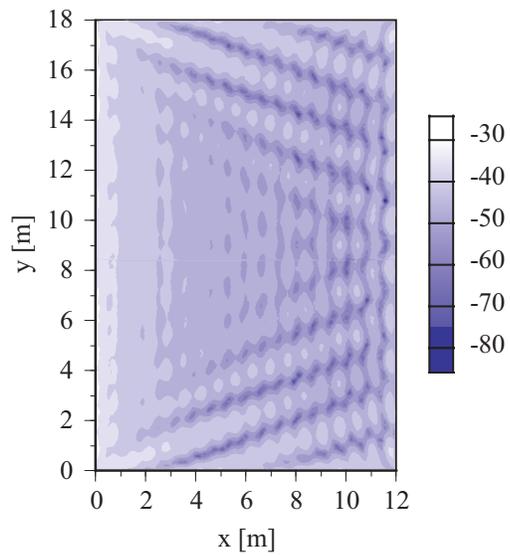


Fig. D.47: 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab2 (diagonal preconditioning)

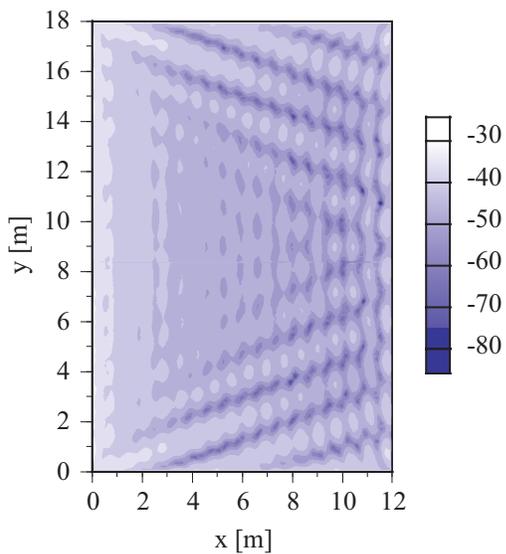


Fig. D.48: 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab2 (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)

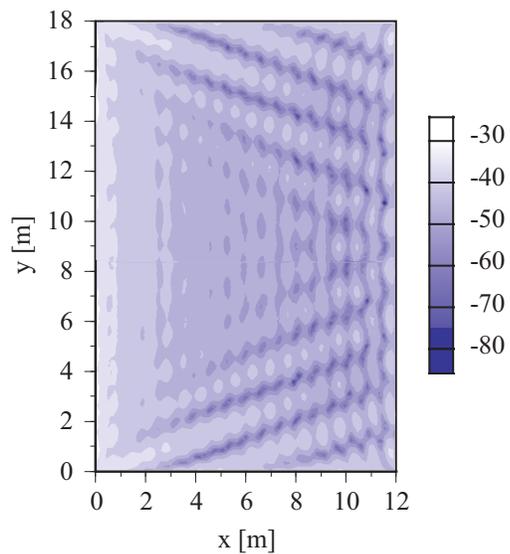


Fig. D.49: 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), BiCGStab2 ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)

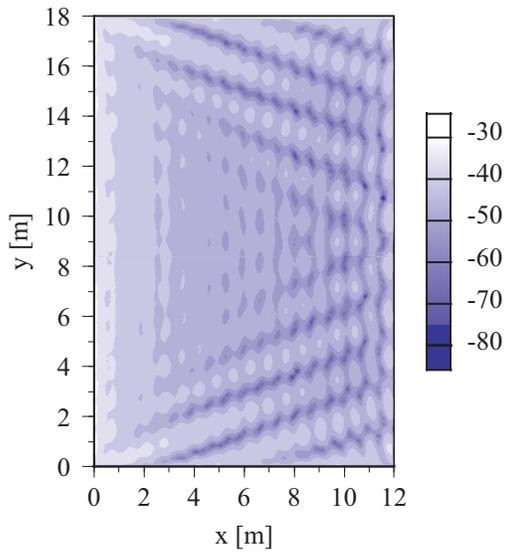


Fig. D.50: 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), GP-BiCG (without preconditioning)

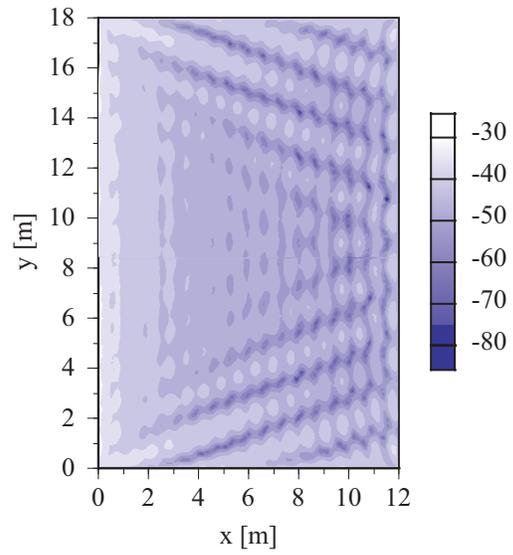


Fig. D.51: 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), GPBiCG (diagonal preconditioning)

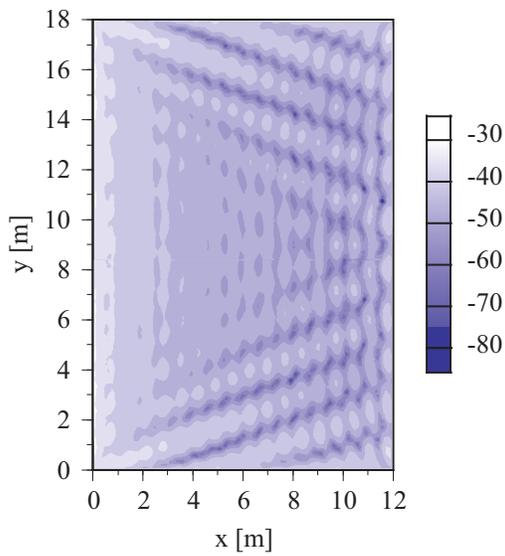


Fig. D.52: 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), GP-BiCG (\mathbf{r}_0^* = pseudorandom numbers)

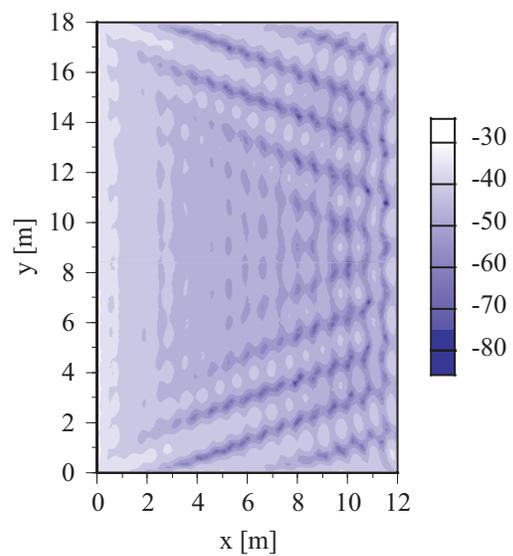


Fig. D.53: 250Hz, Burton-Miller formulation (BM), GPBiCG ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap}$)

関連する発表論文一覧

A. 原著論文

- [1] T. Sakuma and Y. Yasuda. “Fast Multipole Boundary Element Method for Large-Scale Steady-State Sound Field Analysis. Part I: Setup and Validation.” *Acta Acustica united with Acustica*, Vol. 88, pp. 513-525, 2002.
- [2] Y. Yasuda and T. Sakuma. “Fast Multipole Boundary Element Method for Large-Scale Steady-State Sound Field Analysis. Part II: Examination of Numerical Items.” *Acta Acustica united with Acustica*, Vol. 89, pp. 28-38, 2003.
- [3] Y. Yasuda and T. Sakuma. “Effective use of hierarchical cell structure for the fast multipole boundary element method.” *Journal of Computational Acoustics*, (submitted).

B. 国際会議論文

- [4] T. Sakuma and Y. Yasuda. “Application of the Fast Multipole Boundary Element Method to Room Acoustics.” Book of Abstracts of 17th International Congress on Acoustics (Rome), p. 361, 2001.
- [5] T. Sakuma and Y. Yasuda. “Convergency of the iterative process and numerical error in acoustical analysis with the fast multipole boundary element method.” DAGA 2002, pp.-, (in press).
- [6] T. Sakuma, Y. Kosaka, A. Ito, Y. Yasuda and T. Oshima. “3-dimensional simulation of the effect of noise barriers using the fast multipole boundary element method.” Proc. 8th Western Pacific Acoust. Conf. (Melbourne), WD43, 2pp., 2003.
- [7] T. Sakuma, Y. Kosaka, Y. Yasuda and T. Oshima. “A numerical technique for assessing the performance of noise barriers with 3-D modeling.” Proc. Inter-Noise 2003 (Jeju), N86, pp. 3584-3591, 2003.

C. 国内会議論文

- [8] 安田洋介, 佐久間哲哉. “高速多重極境界要素法による 3 次元音場解析 精度・効率の検討.” 日本音響学会講演論文集, pp. 841-842, 1999.9 .
- [9] 安田洋介, 佐久間哲哉. “高速多重極境界要素法による 3 次元音場解析 音響管問題における精度評価.” 日本音響学会講演論文集, pp. 729-730, 2000.3 .
- [10] 安田洋介, 佐久間哲哉. “大規模音場解析に向けた FMBEM の開発 多段階化における打ち切り次数決定.” 日本建築学会学術講演梗概集 (環境工学 I), pp. 81-82, 2000.9 .
- [11] 佐久間哲哉, 安田洋介. “大規模音場解析に向けた FMBEM の開発 音響管解析による計算量・必要記憶容量評価.” 日本建築学会学術講演梗概集 (環境工学 I), pp. 83-84, 2000.9 .
- [12] 安田洋介, 佐久間哲哉. “高速多重極境界要素法による 3 次元音場解析 セル階層化レベルに関する検討.” 日本音響学会講演論文集, pp. 747-748, 2000.9 .
- [13] 伊藤敦子, 安田洋介, 佐久間哲哉, “音響反射板の立体形状が反射特性に及ぼす影響について.” 日本建築学会学術講演梗概集 (環境工学 I), pp. 69-70, 2001.9 .
- [14] 安田洋介, 佐久間哲哉. “大規模音場解析に向けた FMBEM の開発 解析対象と計算効率・セル最適階層化レベルの関係.” 日本建築学会学術講演梗概集 (環境工学 I), pp. 61-62, 2001.9 .
- [15] 安田洋介, 佐久間哲哉. “高速多重極境界要素法の音場予測への適用と計算効率評価.” 日本音響学会騒音・振動研究会資料, N-2002-1, 2002.1 .
- [16] 安田洋介, 佐久間哲哉. “高速多重極境界要素法による 3 次元音場解析 法線方向微分型による定式化と精度・収束性・効率比較.” 日本音響学会講演論文集, pp. 905-906, 2002.3 .
- [17] 安田洋介, 佐久間哲哉. “大規模音場解析に向けた FMBEM の開発 境界条件・定式化による反復解法の収束性.” 日本建築学会学術講演梗概集 (環境工学 I), pp. 31-32, 2002.8 .
- [18] 伊藤敦子, 安田洋介, 佐久間哲哉. “高速多重極境界要素法による大規模音場解析のための基礎的研究 多重極打ち切りに関する考察.” 日本音響学会講演論文集, pp. 787-788, 2002.9 .
- [19] 安田洋介, 佐久間哲哉. “BEM・FMBEM における要素数値積分と計算精度・効率の関係.” 日本音響学会講演論文集, pp. 935-936, 2002.9 .
- [20] 安田洋介, 佐久間哲哉. “高速多重極境界要素法による 3 次元音場解析 定式化・境界

- 条件と精度・収束・効率の関係 .” 日本音響学会建築音響研究会資料 , AA2003-04 , 2003.2 .
- [21] 安田洋介, 佐久間哲哉, 大嶋拓也. “FMBEM による遮音壁の 3 次元解析 有限長モデルと減音効果評価に関する検討 .” 日本音響学会講演論文集 , pp. 939-940, 2003.3 .
- [22] 小坂慶之, 安田洋介, 佐久間哲哉, 大嶋拓也. “遮音壁の減音効果に関する車線方向分布について T 型遮音壁の 3 次元解析による検討 .” 日本音響学会講演論文集 , pp. 941-942, 2003.3 .
- [23] 安田洋介, 佐久間哲哉. “大規模音場解析に向けた FMBEM の開発 対称形となる音場の解析における効率化 .” 日本建築学会学術講演梗概集 (環境工学 I) , pp. 179-180, 2003.9 .
- [24] 安田洋介, 佐久間哲哉. “FMBEM による遮音壁の 3 次元解析 境界形状に適合したセル構造による効率化 .” 日本音響学会講演論文集 , pp. 833-834 , 2003.9 .
- [25] 大嶋拓也, 安田洋介, 佐久間哲哉. “高速多重極境界要素法の効率的実装 非数値演算部アルゴリズムおよびデータ構造の検討 .” 日本音響学会講演論文集 , pp. 921-922 , 2003.9 .
- [26] 佐久間哲哉, 小坂慶之, 安田洋介, 大嶋拓也. “3 次元数値解析による遮音壁の減音効果の評価 .” 日本音響学会騒音・振動研究会資料 , N-2003-73 , 2003.11.

参考文献

- [1] 崔錫柱, 橘秀樹. 有限要素法による室内音場のインパルス応答の計算. 音響学会誌, Vol. 49, pp. 328–333, 1993.
- [2] 高根昭一, 山田祐生, 鈴木陽一, 曾根敏夫. 境界要素法を用いた 3 次元閉空間音場のインパルス応答の推定手法について. 音響学会誌, Vol. 50, pp. 188–197, 1994.
- [3] 坂本慎一, 伊藤清之, 清宮拓磨, 大脇雅直, 橘秀樹. ホールの差分法解析および縮尺模型実験と実物測定との対応. 日本建築学会大会学術講演梗概集 (環境工学 I), pp. 69–70, 9 1999.
- [4] 富来礼次, 大鶴徹. 有限要素法による不整形残響室内音場解析. 日本建築学会計画系論文集, Vol. 551, pp. 9–15, 2002.
- [5] D. C. Hothersall, S. N. Chandler-Wilde, and M. N. Hajmirzae. Efficiency of single noise barriers. *J. Sound Vib.*, Vol. 146, No. 2, pp. 303–322, 1991.
- [6] K. Fujiwara, D. C. Hothersall, and C. H. Kim. Noise barriers with reactive surfaces. *Applied Acoustics*, Vol. 53, No. 4, pp. 255–272, 1998.
- [7] 河井康人. 境界積分方程式による掘割道路からの騒音伝搬予測. 日本音響学会誌, Vol. 56, No. 3, pp. 143–147, 2000.
- [8] 阪上公博, 杉本理恵, 高橋大式, 森本政之. 有限要素法・境界要素法を用いた弾性平板による反射音場の数値解析. 音響学会誌, Vol. 48, pp. 786–793, 1992.
- [9] T. Sakuma and M. Yasuoka. Numerical vibro-acoustic analysis of sound fields coupled with a baffled membrane. *J. Acoust. Soc. Japan (E)*, Vol. 18, pp. 311–318, 1997.
- [10] S. Sakamoto and H. Tachibana H. Mukai. Numerical study on sound absorption characteristics of resonance-type brick/block walls. *J. Acoust. Soc. Jpn (E)*, Vol. 21, No. 1, pp. 9–15, 2000.
- [11] 伊勢史郎, 坂本慎一, 橘秀樹. 境界要素法による室内のアクティブモード制御の解析. 音響学会誌, Vol. 51, pp. 25–33, 1995.
- [12] S. Ise. A principle of sound field control based on the Kirchhoff-Helmholtz integral equation and the theory of inverse systems. *Acustica*, Vol. 85, pp. 78–87, 1999.

- [13] Y. Suzuki S. Takane and T. Sone. A new method for global sound field reproduction based on Kirchhoff's integral equation. *Acustica*, Vol. 85, pp. 250–257, 1999.
- [14] 大鶴徹, 富来礼次, 豊増美喜, 高橋康夫. 有限要素法による大規模音場解析に関する研究 中規模音楽ホールの試行的解析 . 日本建築学会大会学術講演梗概集 (環境工学 I) , pp. 63–64, 9 2001.
- [15] V. Rokhlin. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *J. Comput. Phy.*, Vol. 60, pp. 187–207, 1983.
- [16] L. Greengard. *The rapid evaluation of potential fields in particle systems*. The MIT Press, 1987.
- [17] A. W. Appel. An efficient program for many-body simulation. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 6, pp. 85–103, 1985.
- [18] J. Barnes and P. Hut. A hierarchical $O(N\log N)$ force calculation algorithm. *Nature*, Vol. 324, pp. 446–449, 1986.
- [19] L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *J. Comput. Phy.*, Vol. 73, pp. 325–348, 1987.
- [20] M. S. Warren and J. K. Salmon. Astrophysical N-body simulations using hierarchical tree data structures. In *Supercomputing '92*, pp. 570–576. IEEE Comp. Soc., 1992.
- [21] 牧野淳一郎, 川井敦. 研究展望 : 高速多重極法 粒子法への応用を中心として. 応用力学論文集, Vol. 2, pp. 101–109, 1999.
- [22] 三上益弘, 川田正晃. 大規模系のための分子動力学法の高速度化・加速化法. 材料, Vol. 48, No. 2, pp. 189–197, 1999.
- [23] J. K. Salmon, M. S. Warren, and G. S. Winckelmans. Fast parallel tree codes for gravitational and fluid dynamical N-body problems. *Int. J. Supercomputer Appl.*, Vol. 8, pp. 124–142, 1994.
- [24] C. C. Lu and W. C. Chew. A multilevel algorithm for a boundary integral equation of wave scattering. *Micro. Opt. Tec. Lett.*, Vol. 7, pp. 466–470, 1994.
- [25] J. M. Song and W. C. Chew. Multilevel fast-multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering. *Micro. Opt. Tec. Lett.*, Vol. 10, pp. 14–19, 1995.
- [26] 渡辺修, 速水謙. 多重極展開法を用いた境界要素法の高速度化. 境界要素法研究会 (JASCOME) BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, 第 4 巻, pp. 39–44, 6 1994.
- [27] 西村直志, 吉田研一, 小林昭一. 多重極積分方程式法による 3 次元クラック問題の解析について. 境界要素法論文集, Vol. 14, pp. 37–41, 1997.
- [28] N. Nishimura, K. Yoshida, and S. Kobayashi. A fast multipole boundary integral equa-

- tion method for crack problems in 3D. *Engng. Anal. Boundary Elements*, Vol. 23, pp. 97–105, 1999.
- [29] K. Yoshida, N. Nishimura, and S. Kobayashi. Application of fast multipole Galerkin boundary integral equation method to elastostatic crack problems in 3D. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 50, pp. 525–547, 2001.
- [30] A. Buchau, C. J. Huber, W. Rieger, and W. M. Rucker. Fast BEM computations with the adaptive multilevel fast multipole method. *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 36, No. 4, pp. 680–684, 2000.
- [31] A. Buchau, W. Rieger, and W. M. Rucker. BEM computations using the fast multipole method in combination with higher order elements and the Galerkin method. *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 37, No. 5, pp. 3181–3185, 2001.
- [32] B. Dembart and E. Yip. The accuracy of fast multipole methods for Maxwell's equations. *IEEE Comput. Sci. Eng.*, Vol. 5, pp. 48–56, 1998.
- [33] 山田賢志, 速水謙. クラスタリング法の2次元静弾性問題への適用. 境界要素法研究会 (JASCOME) 境界要素法論文集, Vol. 11, pp. 31–36, 1994.
- [34] 山田賢志, 速水謙. 多重極展開法による二次元静弾性解析の高速化. 境界要素法研究会 (JASCOME) BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, 第5巻, pp. 59–64, 1995.
- [35] K. Hayami and S. A. Sauter. A formulation of the panel clustering method for the three-dimensional elastostatic problem. 境界要素法研究会 (JASCOME) 境界要素法論文集, Vol. 13, pp. 125–130, 1996.
- [36] K. Hayami and S. A. Sauter. A panel clustering method for 3-D elastostatics using spherical harmonics. BTEC 論文集, Vol. 8, pp. 27–32, 1998.
- [37] 福井卓雄, 玖津見敏広. 3次元静弾性問題の高速多重極境界要素法による解析. 計算工学講演会論文集, 第4巻, pp. 963–966, 1999.
- [38] Y. Fu, KJ. Klimkowski, GJ. Robin, E. Berger, JC. Browne, JK. Singer, van de RA. Geijin, and KS. Vemaganti. A fast solution method for three-dimensional many-particle problems of linear elasticity. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 42, pp. 1215–1229, 1998.
- [39] 吉田研一, 西村直志, 小林昭一. 多重極積分方程式法を用いた3次元静弾性クラック問題の解析. 土木学会応用力学論文集, Vol. 1, pp. 365–372, 1998.
- [40] 高橋徹, 浪江雅幸, 西村直志, 小林昭一. 多重極積分方程式法による3次元定常 Stokes 流の解析. BTEC 論文集, Vol. 10, pp. 1–4, 2000.
- [41] 吉田研一, 西村直志, 小林昭一. 多重極積分方程式法を用いたクラックによる3次元弾性波動散乱問題の解析. 土木学会応用力学論文集, Vol. 3, pp. 143–150, 2000.
- [42] V. Rokhlin. Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions. *J. Comput. Phy.*, Vol. 86, pp. 414–439, 1990.

- [43] R. Coifman, V. Rokhlin, and S. Wandzura. The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription. *IEEE Antennas Propag. Magaz.*, Vol. 35, No. 3, pp. 7–12, 1993.
- [44] V. Rokhlin. Diagonal forms of translation operators for the Helmholtz equation in three dimensions. *Applied and Comput. Harm. Anal.*, Vol. 1, pp. 82–93, 1993.
- [45] 福井卓雄, 勝本順三. 高速 fourier 変換を援用した高速多重極境界要素法による 2 次元散乱問題の解析. 境界要素法論文集, Vol. 15, pp. 99–104, 1998.
- [46] 福井卓雄, 服部純一, 土居野優. 高速多重極法の境界要素解析への応用. 構造工学論文集, Vol. 43A, pp. 85–103, 3 1997.
- [47] S. Koc and W. C. Chew. Calculation of acoustical scattering from a cluster of scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 103, No. 2, pp. 721–734, 1997.
- [48] M. F. Gyure and M. A. Stalzer. A prescription for the multilevel Helmholtz FMM. *IEEE Comput. Sci. Eng.*, Vol. 5, pp. 39–47, 1998.
- [49] M. A. Epton and B. Dembart. Multipole translation theory for the three-dimensional Laplace and Helmholtz equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 16, No. 4, pp. 865–897, 1995.
- [50] W. D. Elliott and Jr. J. A. Board. Fast fourier transform accelerated fast multipole algorithm. *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 17, No. 2, pp. 398–415, 1996.
- [51] S. Amini and A. T. J. Profit. Multi-level fast multipole solution of the scattering problem. *Engng. Anal. Boundary Elements*, Vol. 27, pp. 547–564, 2003.
- [52] 奥村陽三, 久野和宏. 境界要素法による 3 次元定常音場解析への高速多重極法の応用. 音響学会誌, Vol. 55, pp. 405–411, 1999.
- [53] Y. Okumura. The improvement of computational efficiency of three-dimensional sound field analysis by boundary element method using two-level fast multipole method. *Elect. Commun. Japan, Part 3*, Vol. 85, No. 8, pp. 30–37, 2002.
- [54] S. Aluru, J. Gustafson, G. M. Prabhu, and F. E. Sevilben. Distribution-independent hierarchical algorithms for the N-body problem. *J. of Supercomputing*, Vol. 12, pp. 303–323, 1998.
- [55] P. M. Morse and K. U. Ingard. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, New Jersey, 1968.
- [56] T. Terai. On calculation of sound fields around three dimensional objects by integral equation methods. *J. Sound Vib.*, Vol. 69, pp. 71–100, 1980.
- [57] H. A. Schenk. Improved integral formulation for acoustic radiation problems. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 44, pp. 41–58, 1968.
- [58] A. J. Burton and G. F. Miller. The application of integral equation methods to the

- numerical solution of some exterior boundary value problems. In *Roy. Soc. London, Ser. A*, Vol. 323, pp. 201–210, 1971.
- [59] K. A. Cuneface and G. Koopmann. A boundary element method for acoustic radiation valid for all wavenumbers. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 85, No. 1, pp. 39–48, 1989.
- [60] S. Stein. Addition theorems for spherical wave functions. *Q. Appl. Math.*, Vol. 19, pp. 15–24, 1961.
- [61] A. Messiah. *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [62] M. Abramowitz and B. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1972.
- [63] L. S. Nyland, J. F. Prins, and J. H. Reif. A data-parallel implementation of the adaptive fast multipole algorithm. In *DAGS/PC Symposium, Dartmouth College, Hanover, NH*, June 23 1993.
- [64] E. Darve. The fast multipole method I: error analysis and asymptotic complexity. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 38, No. 1, pp. 98–128, 2000.
- [65] A. Brandt. Multilevel computations of integral transforms and particle interactions with oscillatory kernels. *Comput. Phys. Commun.*, Vol. 65, pp. 24–38, 1991.
- [66] H. A. van der Vorst. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 13, No. 2, pp. 631–644, 1992.
- [67] J. Rahola. Experiments on iterative methods and the fast multipole method in electromagnetic scattering calculations. Technical Report TR/PA/98/49, CERFACS, Toulouse, France, 1998.
- [68] P. B. Callahan and S. R. Kosaraju. A decomposition of multidimensional point sets with applications to k -nearest neighbors and n -body potential fields. *J. of the ACM*, Vol. 42, No. 1, pp. 67–90, 1995.
- [69] F. E. Sevilgen, S. Aluru, and N. Futamura. A provably optimal, distribution-independent parallel fast multipole method. In *IEEE 14th International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS'00), Cancun, Mexico*, pp. 77–84, May 1-5 2000.
- [70] S. Aluru. Greengard's N -body algorithm is not order N . *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 17, No. 3, pp. 773–776, 1996.
- [71] R. Sez nec. Diffraction of sound around barriers: use of the boundary elements technique. *J. Sound Vib.*, Vol. 73, pp. 195–209, 1980.
- [72] A. F. Seybert and T. W. Wu. Modified Helmholtz integral equation for bodies sitting on an infinite plane. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 85, No. 1, pp. 19–23, 1989.
- [73] Y. Yasuda and T. Sakuma. Effect of stage risers on the sound of lower string instruments.

- In *Book of Abstracts 17th International Congress on Acoustics (Rome)*, p. 164, 2001.
- [74] J. J. Bowman, T. B. A. Senior, and P. L. E. Uslenghi. *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes*. North-Holland, Amsterdam, 1969.
- [75] 川井孝雄, 伊藤毅. 半無限障壁による回折音場. 日本音響学会誌, Vol. 32, No. 5, pp. 319–327, 1976.
- [76] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. M. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. van der Vorst. *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1994.
- [77] 藤野清次, 張紹良. 応用数値計算ライブラリ 反復法の数理. 朝倉書店, 1996.
- [78] 福井義成, 野寺隆志, 久保田光一, 戸川隼人. インターネット時代の数学シリーズ 2 新数値計算. 共立出版, 1999.
- [79] M. R. Hestenes and E. Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, Vol. 49, pp. 409–435, 1952.
- [80] Y. Saad and M. Schultz. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 7, pp. 856–869, 1986.
- [81] C. Lanczos. Solution of systems of linear equations by minimized iterations. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, Vol. 49, pp. 33–53, 1952.
- [82] R. Fletcher. Conjugate gradient methods for indefinite systems. In *Dundee Conference on Numerical Analysis, 1975, Lecture Notes in Mathematics 506*, pp. 73–89. G. A. Watson, ed., Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [83] P. Sonneveld. CGS, a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 10, pp. 36–52, 1989.
- [84] M. H. Gutknecht. Variants of BiCGSTAB for matrices with complex spectrum. *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 14, No. 5, pp. 1020–1033, 1993.
- [85] G. L. G. Sleijpen and D. R. Fokkema. BiCGSTAB(l) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum. *Electronic Transactions on Numer. Anal.*, Vol. 1, pp. 11–32, 1993.
- [86] S.-L. Zhang. GPBi-CG: Generalized product-type methods based on Bi-CG for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 18, No. 2, pp. 537–551, 1997.
- [87] K. G. Prasad, J. H. Kane, D. E. Keyes, and C. Balakrishna. Preconditioned Krylov solvers for BEA. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 37, pp. 1651–1672, 1994.
- [88] S. Marburg and S. Schneider. Performance of iterative solvers for acoustic problems. Part I. Solvers and effect of diagonal preconditioning. *Engng. Anal. Boundary Elements*, Vol. 27, pp. 727–750, 2003.

- [89] 藤野清次, 阿部邦美. BiCG 系統の反復法に対する効果的な収束改善法について. ハイパフォーマンスコンピューティングと計算科学シンポジウム HPCS2002, pp. 51–58, January 2002.
- [90] 日本建築学会環境工学委員会音環境小委員会音響数値解析 WG. Round robin test on wave-based methods, <http://gacoust.hwe.oita-u.ac.jp/TCCA-RRT/index.html>.
- [91] S. Amini and N. D. Maines. Preconditioned Krylov subspace methods for boundary element solution of the Helmholtz equation. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 41, pp. 875–898, 1998.

謝辞

本論文は、筆者が東京大学大学院新領域創成科学研究科環境学専攻博士課程において、同専攻 佐久間哲哉助教授のご指導のもとに行った研究をまとめたものであります。筆者は東京大学に佐久間研究室が誕生して最初の所属学生であったこともあり、佐久間先生からは学部4年のとき以来研究に止まらず様々な刺激をいただく機会に恵まれました。不肖の弟子であろう筆者に対し、修士論文のテーマの選定から博士論文作成時に至るまで終始一貫して懇切丁寧なご指導を頂きましたことに対し、ここに心より感謝申し上げます。

東京大学大学院工学系研究科建築学専攻 鎌田元康教授、坂本雄三教授、平手小太郎助教授には、工学系研究科建築学専攻環境系でのゼミナールにおいて、多角的な視点からの貴重なご助言を頂きました。特に平手小太郎助教授には、平手・佐久間研究室共同でのゼミナールにおいて度々有益なご助言を頂きました。また、坂本雄三教授には、本論文の副査も担当していただき、より広い視野からのご指摘を頂きました。ここに深く感謝申し上げます。

東京大学大学院新領域創成科学研究科環境学専攻 神田順教授、崔恒助教授、東京大学生産技術研究所 坂本慎一助教授には、本論文の副査を担当していただき、有益かつ貴重なご意見及びご指摘を頂きました。ここに感謝申し上げます。

新潟大学工学部建設学科 大嶋拓也助手には、筆者のC言語によるFMBEMプログラムをFortranに書き換えてくださるなど、ご助言にとどまらずプログラミング実装の点で本研究に実質的に貢献していただきました。感謝の念に絶えません。

東京大学大学院工学系研究科建築学専攻 今野雅助手には、計算機関連及びプログラミングに関してしばしば有益かつ実際的なアドバイスを頂きました。ここに謝意を表します。

同時期に同じ院生室で博士論文を書いた東京大学大学院建築学専攻環境系博士課程の稲本淳平氏、遠藤智行氏、王祥武氏とは、直接的な助け合いに止まらず、様々な刺激を受ける環境を共有することができました。また、佐久間研究室並びに大学院工学系研究科建築学専攻環境系の大学院生・卒業生の皆様にはいろいろと助けていただき、特に佐久間研究室所属修士課程の高村紀行氏には提出直前の慌しい時期に様々な形で手伝っていただきま

した．ここに心からお礼申し上げます．

最後に，妻 香織は研究以外の様々な側面から常に筆者を支えてくれました．私事ではありますが，この場を借りて心から感謝いたします．