特集4・2

UDC 628.512:614.71

大気汚染制御の一方法

A Method of Air Pollution Control

大島康次郎*・長倉　輝**

Yasujiro OHSHIMA and Akira NAGAKURA

大気汚染の問題に関しては，汚染質の排出を完全に防止する製造プロセスを確立することが特に要望される．このような究極の目標が達成されるまでは，大気汚染と工業活動との調和のとれた制御が必要である．生産自体を極端に抑制すれば，文明生活を維持することが不可能になる．したがって，汚染質排出の最適な制御または規制が段階的に引き上げられるべき環境基準を満足しつつ実行されなければならない．

最適制御の評価関数としては

$$J=\int\left\{\|c-c_d\|^2_{G1}+\|u-u_d\|^2_{G2}\right\}dt \cdots\cdots(1)$$

のような2次形を想定する．ここにおいて，c：汚染質濃度，u：汚染質排出量であり，$G1$, $G2$は荷重マトリックス，添字dは基準値を表わしている．この評価関数を想定した根拠は次のとおりである．すなわち，汚染質濃度の基準値からの偏差を損失と考え，また排出量と操業度（工業活動）とが比例すると仮定して，工場側の操業度の基準値からの偏差を同じく損失と考え，これら両者に適当な重み付けをしたものの和をシステム全体としてある時間にわたって積分したものが(1)式であって，これを最小にもたらすことが最適な制御または規制を与るとみなしたのである．

汚染質濃度cと排出量uの関係はFickの偏微分拡散方程式によって表わされるものとした．ここで，さしあたり簡単のため2次元拡散方程式を用いることにした．すなわち，汚染源と地表における汚染質濃度との関係を

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+v_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+v_y\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+Q \cdots\cdots(2)$$

によって表わし，その境界条件を

$$k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}l_x+k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}l_y+\alpha(\phi-\phi_B)=0 \cdots\cdots(3)$$

によって与えることにした．ただし

v_x, v_y：x, y方向における風速成分

k_x, k_y：x, y方向における拡散係数

Q：汚染質排出項

l_x, l_y：対象とする領域の境界における方向余弦

α：比例定数

ϕ, ϕ_B：領域内外の汚染質濃度

である．(2)式における気象条件すなわち拡散係数k_x, k_yおよび風速v_x, v_yは未知であると仮定した．これら気象パラメータはいくつかの観測点における汚染質濃度の観測結果から非線形フィルタの手法によって推定することができる．風速v_x, v_yは時々刻々ランダムに変化するが，観測点における風向、風速の観測結果を利用することもできる．しかし，このアプローチにおいては，さしあたり推定の手法を用いることにした．

偏微分拡散方程式の(2)式は有限要素法の一種である重み付き残差法（Weighted residual method）を用いて常微分方程式に帰着することができる．すなわち，対象の領域を有限個の要素に分割し，要素内の汚染質濃度を要素の節点値によって

$$\phi(x,y,t)=\sum_{i=1}^{n}N_i(x,y)\phi_i(t) \cdots\cdots(4)$$

のように近似補間するのである．ここで

N_i：要素ごとに定義される形状関数

ϕ_i：節点iでの汚染質濃度

n：節点の数

である．(4)式を(2)式に代入し，右辺を左辺に移項すれば，近似による残差を与えるから，これに形状関数の重みを付けて，これをゼロとおくことにより，n元連立微分方程式が得られるのである．

要素の分割においては三角形要素を用い，要素内の汚染質濃度が

$$\phi(x,y)=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y \cdots\cdots(5)$$

のような線形結合で表わされるとし，各三角形の頂点（節点）における汚染質濃度と節点のx, y座標を(5)式に代入することによって得られる三つの連立方程式を解くことにより，α_1, α_2, α_3が求まるから，これより形状関数N_iが決定される．N_iについて重み付き残差法より

$$\int_R N_i\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial}{\partial y}\right)-v_x\frac{\partial}{\partial x}-v_y\frac{\partial}{\partial y}\right]\sum_{j=1}^{n}N_j\phi_j+Q-\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{n}N_j\phi_j\right\}dxdy=0 \cdots(6)$$

*　東京大学生産技術研究所

**　元大学院生

のような式がn個与えられる．これにGreenの定理を用いて2階の導関数を除去し，(3)式の境界条件を含めるとマトリックス形式で

$$[H]\{\phi\}+[P]\{\dot{\phi}\}+\{f\}=0 \quad \cdots\cdots(7)$$

のような式が導かれる．これを標準形に書き換えると

$$\{\dot{\phi}\}=-[P]^{-1}[H]\{\phi\}-[P]^{-1}\{f\} \quad \cdots\cdots(8)$$

のようになる．これは節点値を状態変数と考えたときの状態方程式に他ならない．すなわち

$$\dot{c}=Ac+Bu \quad \cdots\cdots(9)$$

の形である．この式において，A，Bはマトリックスで，Aは未知パラメータを含んでいる．

未知パラメータの推定には前述のように非線形フィルタの手法[1]を用いる．すなわち，(9)式の状態方程式の右辺に既知の共分散をもった白色システムノイズを加え，観測点における汚染質濃度の観測系について，観測マトリックスと観測ノイズを含んだ観測方程式を記述する．ここで，観測は離散時間になされるものと仮定する．

状態方程式に含まれる未知の気象パラメータはいくつかの観測点におけるノイズを含んだ汚染質濃度観測結果から，2次の非線形フィルタを用いて推定される．この2次フィルタはKalmanフィルタの拡張であり，状態の非線形性をTaylor展開して2次の項まで保持するようにしたものである．このようにして未知パラメータが推定されれば，状態方程式の(9)式が決定される．

状態方程式によって汚染質濃度と排出量の関係が求まれば，(1)式の評価関数を用いて，これを最小にもたらすよう排出量の最適制御を実行することができる．最適制御のアルゴリズムにはBellmanの動的計画法の手法[2]を用いる．ここにおいては，(1)，(9)両式を離散値系に書きなおし，最適性の原理を適用するのである．

最後に、上記の手法を四つの排出源と四つの観測点をもった非常に簡単な仮想系（汚染質：SO_2）に適用し，計算機シミュレーションを行なったので，これについて簡単に述べる．

図1に示すように，この仮想系では四つの排出源C1～C4と四つの観測点O4～O4が四つの三角形要素（節点：S1～S6）に配置しており，それぞれの座標が図の括弧内（km単位）に示されているようであったとする．

未知の気象パラメータの真値として$k_x=k_y=0.4$ $(\mathrm{km})^2/\mathrm{h}$

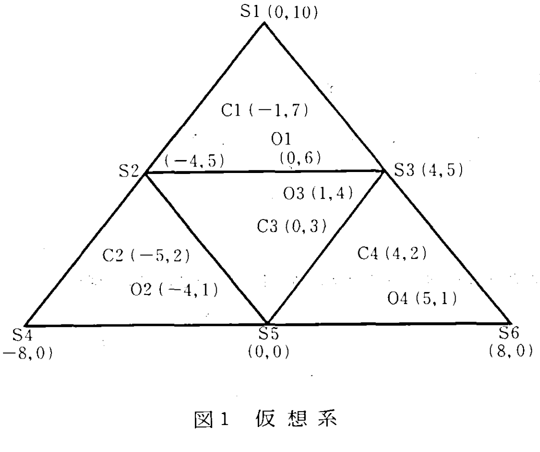

図1　仮想系

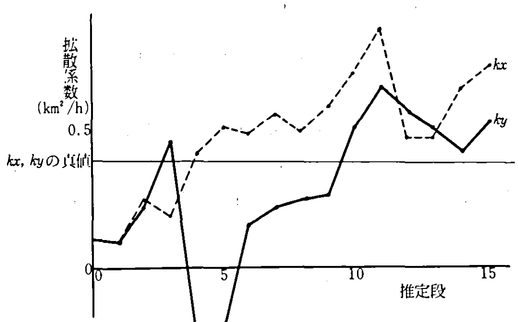

図2　拡散係数の推定効果

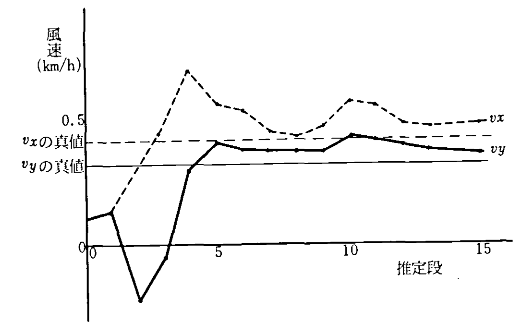

図3　風速の推定効果

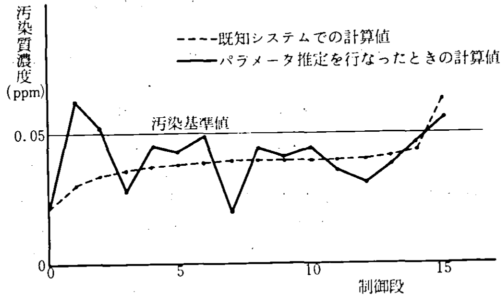

図4　S4点における汚染質濃度変化

状態偏差に対する荷重マトリックス ($G1$)

10.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	20.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	30.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	10.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	10.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	10.0000

制御偏差に対する荷重マトリックス ($G2$)

0.0100	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0300	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0100	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0200

観測ノイズの共分散アトリクス

0.0010	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0010	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0010	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0010

表1　荷重マトリックスと共分散マトリックス

v_x=0.4km/h，v_y=0.3km/hと想定する．

また，$\alpha=0$，サンプリング周期：0.6h，制御段数：15，汚染質濃度目標値（6節点すべて）：0.05ppm 排出量目標値u_d(単位Nm^3/h)：C1=160，C2=40，C3=160，C4=145とし，さらに荷重マトリックス，観測ノイズ共分散マトリックス（システムノイズは0とする）が表1のように与えられたとしてシミュレーションを行なった。なお，汚染質濃度観測値としては気象パラメータに真値を用いたときの計算値を使用した．

図2に拡散係数の推定効果，図3に風速の推定効果，図4にS4点における汚染質濃度変化を示す。

(1975年1月18日受理)

参考文献

1) M. Athans, R. P. Wishner and A. Bertolini: Suboptimal State Estimation for Continuous-Time Nonlinear Systems from Discrete Noisy Measurements, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-13, No. 5, p. 504 (1968)
2) 辻節三：最適制御概論，養賢堂，p. 78 (1971)